Щербакова І.А., Стасюк О.І. Математичні моделі і комп'ютерно - орієнтовані методи оптимізації вартості електроспоживання на основі диференційованих комерційних тарифів. Розглянуті шляхи і методи організації математичних моделей і критеріїв мінімізації комерційної вартості електроенергії залізничним транспортом, запропоновані математичні моделі , що описують процеси руху потягів і, на основі теорії графів, сформульована задача призначення вагонопотоків.
Ключові слова: Модель, критерій,процес, мінімізація, система.

I. Shcherbakova, A. Stasiuk. Mathematical models and computer-oriented methods of power consumption cost optimization on the basis of the differentiated commercial tariffs. Ways and methods of organization of mathematical models and minimization criteria of electricity commercial cost consumed by railroads have been considered. Mathematical models describing the processes of train operation have been offered and the task of setting car traffic volumes on the basis of graph theory has been formulated.
Key words: Model, criterion, process, minimization, system.

Рецензент д.т.н., професор Тимченко Л.І. (ДЕТУТ)

Поступила 24.04.2014 г.

УДК 621.391

ВОЛКОВ А.С., к.т.н., ст. преподаватель,
ЖУЧЕНКО С.С., магистрант (УкрГАЖТ)

Метод кодирования алгебраических сверточных кодов с малой плотностью проверок на четность

Предложен метод кодирования алгебраических сверточных кодов с малой плотностью проверок на четность. Показано, как формируется порождающая матрица алгебраических сверточных кодов с малой плотностью проверок на четность.

Ключевые слова: *сверточные коды, кодирование, проверочная матрица, коды с малой плотностью проверок на четность, помехоустойчивые коды.*

Постановка проблемы в общем виде и анализ литературы

В каналах связи современных телекоммуникационных систем и сетей для обеспечения заданной достоверности передачи информации нашли широкое применение блоковые и сверточные коды. В настоящее время активно развиваются и используются блоковые коды с малой плотностью проверок на четность (МППЧ), предложенные Галлагером [1]. Такие коды максимально близко приближаются к границе Шеннона [8] и обладают относительно не высокой сложностью реализации процедур кодирования и декодирования. Для увеличения эффективности кодирования применяют недвоичные блоковые коды с МППЧ [10], такие коды могут быть построены на основе недвоичных блоковых кодов Рида-Соломона [6]. Важным недостатком таких кодов является их высокая сложность реализации процедур кодирования и декодирования.

В настоящее время известно несколько методов построения проверочной матрицы блоковых кодов с МППЧ. Используя алгебраические методы построения можно построить проверочную матрицу и код с заранее известными параметрами, потому что она будет однозначно определять код [1].

Известно, что сверточные коды обладают лучшими свойствами по сравнению с блоковыми [8]. Среди сверточных кодов известны алгебраические сверточные коды, которые допускают произвольно большие длины кодового ограничения [2]. Также были предложены сверточные коды с МППЧ, которые только начинают развиваться и используют следующие основные методы построения проверочных матриц: заполнение строк и столбцов матрицы переборным способом и «метод развертывания», суть которого состоит в построение сверточных кодов с МППЧ из блоковых [6]. В [5] был предложен алгебраический метод построения проверочной матрицы недвоичных и двоичных алгебраических сверточных кодов с МППЧ.

В настоящее время существует несколько методов кодирования сверточных кодов с МППЧ [6], однако для алгебраических сверточных кодов с МППЧ они отсутствуют. Следовательно, актуальной научно-технической задачей является разработка метода кодирования алгебраических сверточных кодов с МППЧ.

Цель статьи – разработка метода кодирования алгебраических сверточных кодов с МППЧ с заранее заданными параметрами.

Основной материал

Построение проверочной матрицы алгебраического сверточного кода с МППЧ

Пусть задан нерекурсивный несистематический сверточный (n^0, k^0)–код над $GF(q)$. Для сверточного (n^0, k^0)-кода зафиксируем порождающий многочлен $g(x)$ над $GF(q)$ [2, 3]

$$g(x) = g_0 + g_1 x + ... + g_{r-2} x^{r-2} + g_{r-1} x^{r-1}, \qquad (1)$$

где $g_j \in GF(q)$, $q = p^m$; $j = 0,1,2...r-1$.

Степень $r-1$ порождающего многочлена $g(x)$ определяет количество регистров сдвига в кодирующем устройстве, и, следовательно, число информационных кадров хранящихся в кодере [2, 3].

Пусть на вход кодирующего устройства алгебраического сверточного (n^0, k^0) – кода поступает полубесконечная информационная последовательность i, которую представим многочленом $i(x)$

$$i(x) = i_0 + i_1 x + i_2 x^2 + \cdots, \tag{2}$$

где $i_j \in GF(q)$, $j = 0,1,2...$

В общем случае при рассмотрении алгебраических сверточных кодов информационная последовательность разбивается на сегменты [2], тогда многочлен, соответствующий, например, r информационным кадрам запишем как

$$I(x) = i_0 + i_1 x + \ldots + i_{r-1} x^{r-1}. \tag{3}$$

Каждый информационный кадр состоит из k^0 символов, при этом $k^0 \geq 1$. Кадр информационных символов $k^0 = \log_q |M|$, где $M \subseteq GF(q^m)$, $|M| \geq |GF(q)|$. Кадр кодового слова $n^0 = m$ и скорость кодирования $R = k^0 / m$ [2, 3].

Кодовая последовательность алгебраического сверточного кода над $GF(q)$ однозначно определяется выражением [2]

$$c(x) = g(x) \cdot i(x). \tag{4}$$

В работах [2, 3] показано, что если на вход кодирующего устройства подать K информационных кадров длины k^0, то кодовая последовательность $c(x)$ над $GF(q)$ алгебраического сверточного кода будет кодовым словом длины $N = q - 1$ недвоичного блокового (N, K) – кода Рида-Соломона над $GF(q)$. При этом порождающий многочлен кода Рида-Соломона $G(x)$ является порождающим многочленом $g(x)$ алгебраического сверточного кода.

Для построения проверочной матрицы алгебраического сверточного кода с МППЧ воспользуемся свойством линейности сверточного (n^0, k^0) – кода [2]. Тогда зафиксируем два многочлена кодовых слов [2]:

$$c_1(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{N-2} + x^{N-1}, \tag{5}$$

$$c_2(x) = \alpha^0 + \alpha^1 x + \alpha^2 x^2 + \cdots + \alpha^{N-2} x^{N-2} + \alpha^{N-1} x^{N-1} \tag{6}$$

Выполним сложения выражений (5) и (6), и получим многочлен кодового слова

$$\begin{gathered} c_3(x) = C_0(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{N-2} + x^{N-1}) + \\ + (\alpha^0 + \alpha^1 x + \alpha^2 x^2 + \cdots + \alpha^{N-2} x^{N-2} + \alpha^{N-1} x^{N-1}) = \\ = (\alpha^0 + 1) + (\alpha^1 + 1)x + (\alpha^2 + 1)x^2 + \cdots + \\ + (\alpha^{N-2} + 1)x^{N-2} + (\alpha^{N-1} + 1)x^{N-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Перепишем выражения (5) и (6) в виде векторов кодовых слов c_1 и c_2:

$$c_1 = (1,1,1,\ldots,1), \tag{8}$$

$$c_2 = (1, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{N-1}). \tag{9}$$

Тогда для выражения (7) соответствующий вектор кодового слова C_0

$$C_0 = (0, \alpha^1 + 1, \alpha^2 + 1, \ldots, \alpha^{N-2} + 1, \alpha^{N-1} + 1). \tag{10}$$

Выполним один циклический сдвиг вектора кодового слова C_0 [6]. Тогда, после циклического сдвига полученный вектор представим

$$C_1 = (\alpha^{N-1} + 1, 0, \alpha^1 + 1, \alpha^2 + 1, \ldots, \alpha^{N-2} + 1). \tag{11}$$

Данную операцию выполним $N - 1$ раз, в результате чего будет сформировано N векторов кодовых слов алгебраического сверточного (n^0, k^0) – кода. Тогда вектор кодового слова C_{N-1}

$$C_{N-1} = (\alpha^1 + 1, \alpha^2 + 1, \ldots, \alpha^{N-1} + 1, 0). \tag{12}$$

Далее для построения фрагмента полубесконечной проверочной матрицы алгебраического сверточного кода с МППЧ над $GF(q)$ сформируем матрицы W' и W [5]. Матрица W' – представляет собой вектор-столбец, содержащий N векторов кодовых слов алгебраического сверточного (n^0, k^0) – кода. В первую строку матрицы W' запишем вектор кодового слова C_0, который соответствует многочлену кодового слова $C_0(x)$. Остальные $N-1$ строк матрицы – это полученные в результате циклического сдвига вектора кодовых слов $C_j, j=1,2,...,N-1$.

$$W'=\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Тогда матрица W – это квадратная матрица, размерности $N \times N$ [5]. Каждая строка матрицы W содержит N компонент векторов кодовых слов

$$W=\begin{bmatrix} \alpha^0+1 & \alpha^1+1 & \cdots & \alpha^{N-1}+1 \\ \alpha^{N-1}+1 & \alpha^0+1 & \cdots & \alpha^{N-2}+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^1+1 & \alpha^2+1 & \cdots & \alpha^0+1 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Каждая строка и каждый столбец матрицы будет содержать один нулевой элемент, который расположен на главной диагонали матрицы *W* [6]. А две произвольные строки матрицы будут отличаться во всех N позициях [6].

Из (14) видно, что каждая строка матрицы *W* является циклическим сдвигом предыдущей строки. В теории матриц матрица (14) называется циркулянт.

Далее необходимо представить каждый элемент поля $\alpha^i \in GF(q)$ в виде последовательности $z(\alpha^i)$ длины N [7]

$$z(\alpha^i)=(z_0, z_1, ... z_{N-1}), \qquad (15)$$

где $z_j=\alpha^i$ при $j=i$; $i, j=0,1,...N-1$; остальные $N-1$ элементов последовательности $z(\alpha^i)$ будут равны нулю.

Последовательность $z(\alpha^i)$ при $\alpha^i=0$ будет нулевой последовательностью длины N. Поэтому две разные последовательности $z(\alpha^i)$ содержат α^i элемент поля $GF(q)$ на двух различных позициях [6].

Сформируем матрицу *A*, размерности $N \times N$. Пусть первая строка *A* содержит последовательность $z(\alpha^i)$, а остальные $N-1$ строк матрицы – это циклический сдвиг предыдущей строки [6]. Первая строка матрицы соответствует циклическому сдвигу последней строки. Тогда матрицу *A* в общем виде можно записать как

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ a_N & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Представим каждый элемент из (14) в виде матриц *A* и сформируем фрагмент полубесконечной проверочной матрицы алгебраического сверточного кода с МППЧ, тогда [5]

$$H=\begin{bmatrix} 0 & A_{0,1} & \cdots & A_{0,N-1} \\ A_{0,N-1} & 0 & \cdots & A_{0,N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{0,1} & A_{0,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Матрица *H* обладает следующими структурными свойствами: каждая строка и каждый столбец матрицы будет содержать одну нулевую матрицу *A*, которая расположена на главной диагонали матрицы *H*. Все матрицы *A* в одной строке или столбце различны [6].

Построение проверочной матрицы недвоичного алгебраического сверточного кода с МППЧ предусматривает выбор пары целых чисел (γ, ρ), которые находятся в пределах $1 \le \gamma, \rho \le N$ [5 - 8].

Тогда предположим, что $H(\gamma, \rho)$ будет подматрицей H. Тогда эта матрица будет иметь размерность $\gamma \cdot N \times \rho \cdot N$. Нулевое пространство этой матрицы полностью задает (γ, ρ) - регулярный недвоичный алгебраический сверточный код с МППЧ, если учитывать, что работа кодера алгебраического сверточного МППЧ-кода обобщена на случай полубесконечной длины. Такой код будет иметь следующие параметры: длина кодового слова $\rho \cdot N$, скорость кода $R=(\rho-\gamma)/\rho$, и минимальное кодовое расстояние $\gamma+1$ [6, 8].

Полученный (γ, ρ) – регулярный недвоичный алгебраический сверточный код с МППЧ имеет следующие свойства, определяемые его частью проверочной матрицей $H(\gamma, \rho)$ над $GF(q)$: каждая строка и столбец проверочной матрицы недвоичного алгебраического сверточного кода с МППЧ имеют вес ρ и γ соответственно [5]; в проверочной матрице недвоичного алгебраического сверточного кода с МППЧ будут отсутствовать 2 строки или столбца, которые имеют на одной позиции одинаковый ненулевой элемент.

Если обобщить работу кодера алгебраического сверточного кода с МППЧ на случай полубесконечной длины, то его проверочная матрица будет иметь вид

$$H_{\infty} = \begin{pmatrix} H(\gamma,\rho) & & & \\ & H(\gamma,\rho) & & \\ & & H(\gamma,\rho) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

и называться полубесконечной проверочной матрицей алгебраического сверточного кода с МППЧ [5]. Предполагается, что пустые места в (18) заполнены нулями.

Формирование порождающей матрицы алгебраического сверточного кода с МППЧ

Пусть задан алгебраический сверточный регулярный (γ,ρ) - код с МППЧ определенный фрагментом проверочной матрицы $H(\gamma,\rho)$. Тогда он имеет следующие параметры: кадр кодового слова c длины $n = \rho \cdot N$, информационный кадр i длины k, скорость $R = (\rho - \gamma)/\rho$.

По известному фрагменту $H(\gamma,\rho)$ полубесконечной проверочной матрицы, построим фрагмент порождающей матрицы G и обобщим на случай полубесконечной длины. Для получения порождающей матрицы алгебраического сверточного кода с МППЧ в канонической (систематической) форме необходимо используя метод исключения Гаусса-Жордана привести проверочную матрицу $H(\gamma,\rho)$ к канонической форме [6, 8, 9]

$$H_{syst} = [P \mid I_{n-k}], \qquad (19)$$

где P – матрица размерности $(n-k)\times k$, а I – единичная матрица размерности $n-k$.

Тогда порождающая матрица G в канонической форме будет иметь вид

$$G_{syst} = [I_k \mid P^T]. \qquad (20)$$

Строки порождающей матрицы ортогональны строкам проверочной матрице, поэтому выполняется равенство $G \cdot H^T = 0$ [9]. Порождающая матрица, также как и проверочная, полностью задает код. После выполнения метода исключения Гаусса-Жордана, проверочная матрица H_{syst} не будет разряженной [6], в отличие от исходной проверочной матрицы. Поэтому и полученная порождающая матрица также не будет разряженной.

Метод кодирования алгебраических сверточных кодов с МППЧ

Для полубесконечного случая, порождающая матрица алгебраического сверточного регулярного (γ,ρ) - кода с МППЧ будет иметь вид

$$G_{\infty} = \begin{pmatrix} G & & & \\ & G & & \\ & & G & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

где G – матрица, размерности $k \times n$, вида (22). Пустые части матрицы (21) заполнены нулями. В случае, если $k = 1$, то G будет матрица-строка длины n [2]

$$G = \begin{pmatrix} g_i^{(1,1)} & \cdots & g_i^{(1,n)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_i^{(k,1)} & \cdots & g_i^{(k,n)} \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Если порождающая матрица G имеет каноническую форму, как показано в (20), то кодер будет систематическим [6]. Тогда первые k символов кодового кадра будут совпадать с символами соответствующего информационного кадра [2]. Если матрица (22) не соответствует канонической форме, то кодер называется несистематическим.

Пусть информационная последовательность несистематического алгебраического сверточного кода с МППЧ в виде вектора

$$i = (i_0, i_1, \ldots, i_{K-1} \ldots) = (i_0^{(1)} i_0^{(2)} \ldots i_0^{(k)}, i_1^{(1)} i_1^{(2)} \ldots i_1^{(k)}, \ldots, i_{K-1}^{(1)} i_{K-1}^{(2)} \ldots i_{K-1}^{(k)}, \ldots). \qquad (23)$$

Кадр кодового слова алгебраического сверточного кода с МППЧ образуется в результате умножения порождающей матрицы на информационную последовательность. Тогда символ $c_t^{(j)}$ j-ой передаваемой последовательности, будет определяться выражением [2, 4]

$$c_t^{(j)} = i_t \cdot G + i_{t-1} \cdot G + \cdots + i_{t-r} \cdot G, \quad (24)$$

где G - матрица (22).

В общем виде, операцию кодирования алгебраического сверточного кода с МППЧ можно представить как [4]

$$c = i \cdot G_{\infty}. \quad (25)$$

Тогда кодовая последовательность алгебраического сверточного регулярного (γ, ρ) - кода с МППЧ имеет вид

$$c = (c_0, c_1, ..., c_{N-1} \ldots) = (c_0^{(1)} c_0^{(2)} ... c_0^{(n)}, c_1^{(1)} c_1^{(2)} ... c_1^{(n)}, ..., c_{N-1}^{(1)} c_{N-1}^{(2)} \ldots c_{N-1}^{(n)}, \ldots). \quad (26)$$

Из выражений (4), (23) и (26) сегмент кодового слова алгебраического сверточного регулярного (γ, ρ) - кода с МППЧ длины N – 1 справедливо представить

$$c = (c_0, c_1, ..., c_{N-1}) = (c_0^{(1)} c_0^{(2)} ... c_0^{(n)}, c_1^{(1)} c_1^{(2)} ... c_1^{(n)}, ..., c_{N-1}^{(1)} c_{N-1}^{(2)} \ldots c_{N-1}^{(n)}) \quad (27)$$

Тогда (26) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= (c_0, c_1, c_2, ..., c_{N-2}, c_{N-1}, c_N, c_{N+1}, ..., c_{2N-2}, c_{2N-1}, c_{2N}, c_{2N+1}, \ldots c_{3N-2}, c_{3N-1}, \ldots) = \\ &= (c_0^{(1)} c_0^{(2)} ... c_0^{(n)}, c_1^{(1)} c_1^{(2)} ... c_1^{(n)}, c_2^{(1)} c_2^{(2)} ... c_2^{(n)}, \ldots, c_{N-2}^{(1)} c_{N-2}^{(2)} ... c_{N-2}^{(n)}, c_{N-1}^{(1)} c_{N-1}^{(2)} ... c_{N-1}^{(n)}), \\ &(c_N^{(1)} c_N^{(2)} ... c_N^{(n)}, c_{N+1}^{(1)} c_{N+1}^{(2)} ... c_{N+1}^{(n)}, \ldots, c_{2N-2}^{(1)} c_{2N-2}^{(2)} ... c_{2N-2}^{(n)}, c_{2N-1}^{(1)} c_{2N-1}^{(2)} ... c_{2N-1}^{(n)}), \\ &(c_{2N}^{(1)} c_{2N}^{(2)} ... c_{2N}^{(n)}, c_{2N+1}^{(1)} c_{2N+1}^{(2)} ... c_{2N+1}^{(n)}, \ldots, c_{3N-2}^{(1)} c_{3N-2}^{(2)} ... c_{3N-2}^{(n)}, c_{3N-1}^{(1)} c_{3N-1}^{(2)} ... c_{3N-1}^{(n)}), \ldots \end{aligned} \quad (28)$$

Последовательность символов c является кодовым словом алгебраического сверточного кода с МППЧ если выполняется следующее равенство [4]:

$$c \cdot H_{\infty}^{T} = 0, \quad (29)$$

где H_{∞}^{T} – транспонированная полубесконечная проверочная матрица алгебраического сверточного кода с МППЧ.

Алгебраические сверточные коды обладают свойством линейности, следовательно, предложенные алгебраические сверточные коды с МППЧ также линейны [6]. Минимальное кодовое расстояние равно минимальному весу его ненулевого кадра кодовой последовательности, соответствующей произвольному ненулевому информационному кадру [2, 6-8]. При этом нижняя граница минимального кодового расстояния представлена выражением [5, 7]

$$d_{\min} \geq \gamma + 1. \quad (30)$$

Выводы

В работе предложен метод формирования полубесконечной проверочной матрицы алгебраических сверточных кодов с МППЧ, в основе которого лежит синтез математического аппарата теории алгебраического сверточного кодирования и математического аппарата теории блокового кодирования с МППЧ.

Данный метод позволяет за фиксированное число шагов построить порождающую матрицу алгебраических сверточных кодов с МППЧ, которая полностью определяет код.

Формирование полубесконечной проверочной матрицы алгебраических сверточных кодов с МППЧ определяет минимальное кодовое расстояние, которое равно минимальному весу его ненулевого кадра кодовой последовательности, соответствующей произвольному ненулевому информационному кадру.

Литература

1. Gallager R.G. Low-density parity-check codes / R.G. Gallager. – Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1963. – P. 92.
2. Данько Н.И. Алгебраические сверточные коды: учеб. пособие/ Н.И. Данько, С.П. Евсеев, А.А. Кузнецов, П.Ф. Поляков, С.И. Приходько. – Х.: УкрГАЖТ, 2007. – 238 с.
3. Приходько С.И. Метод построения алгебраических каскадных сверточных кодов / С.И. Приходько, А.С. Волков // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, – 2010. Вип. 6(87). – С. 224 – 228.
4. Теория кодирования: Пер. с япон./ Т. Касами, Н. Токура, Е. Ивадари, Я. Инагаки /Под ред. Б.С. Цыбакова и С.И. Гельфанда. – М.: Мир.- 1978.- с. 226-230.
5. Волков А.С. Метод построения проверочной матрицы алгебраических сверточных кодов с малой плотностью проверок на четность / А.С. Волков, С.С. Жученко // Системи управління, навігації та зв’язку. – К.: ДП «Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління», – 2012. Вип. 4(24). – С.135 – 137.
6. William E. Ryan. Channel Codes / E. Ryan William, S. Lin – Cambridge, 2009. – P. 710.
7. Djurdjevic I. A Class of Low-Density Parity-Check Codes Constructed Based on Reed-Solomon Codes With Two Information Symbols / I. Djurdjevic, Jun Xu, K.Abdel-Ghaffar, S. Lin // IEEE Communications Letters. – 2003. – Vol.7, №7. – July. – P. 317-319.
8. Shu Lin. Error Control Coding (2nd Edition) / S. Lin, D.J. Costello. – Pearson-Prentice Hall, 2004. – P. 1260.
9. Moreira J.C. Essentials of Error-Control Coding / J.C. Moreira, P.G. Farrell. – John Wiley & Sons, 2006. – P. 388.
10. Davey M.C. Low density parity check codes over GF(q) / M.C. Davey, D.J.C. MacKay // IEEE Communications Letters. – 1998. – Vol.2, №6. – June. – P. 165-167.

Volkov A.S., Zhuchenko S.S. Method of algebraic convolutional codes encoding with low-density even parity check. A method of algebraic convolutional codes encoding with low-density even parity check has been proposed. It has been shown how to form a generating matrix of algebraic convolutional codes with low-density even parity check.

Key words: convolutional codes, encoding, the check matrix, codes with low-density even parity check codes, noise combating codes.

Волков О.С., Жученко С.С. Метод кодування алгебраїчних згорткових кодів з малою щільністю перевірок на парність. Запропоновано метод кодування алгебраїчних згорткових кодів з малою щільністю перевірок на парність. Показано, як формується породжуюча матриця алгебраїчних згорткових кодів з малою щільністю перевірок на парність.

Ключові слова: згорткові коди, кодування, перевірочна матриця, коди з малою щільністю перевірок на парність, завадостійкі коди.

Рецензент д.т.н., профессор Краснобаев В.А. (Полтавский национальный технический университет им. Ю.Кондратюка)

Поступила 25.04.2014г.