УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Частина 2

Харків – 2020

Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища та прикладна математика: конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2020. – Ч. 2. – 47 с.

Рекомендується для студентів освітнього рівня «бакалавр» економічного факультету всіх форм навчання.

Іл. 12, табл. 1, бібліогр.: 9 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики 1 червня 2020 р., протокол № 14.

Рецензент:

доц. А. П. Рибалко (ХНЕУ ім. С. Кузнеця)

ЗМІСТ

1 ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1 Математична символіка

У курсі вищої математики використовують ряд символів з математичної логіки. Наведемо найважливіші з них:

$\exists$ – квантор існування («існує»);

$\forall$ – квантор загальності («для кожного», «для будь-якого»);

$\Leftrightarrow$ – символ еквівалентності («рівносильно»);

$\Rightarrow$ – символ імплікації («випливає»);

! – символ єдності («єдиний»).

1.2 Множина

Визначення. *Множина* – сукупність (набір) деяких об'єктів, пов'язаних певною ознакою чи властивістю.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її *елементами*.

Множини позначають великими латинськими літерами, а їхні елементи – малими.

Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$. Відповідно запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів, тобто про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні.

Приклад 1. Задано множину натуральних чисел $N = \{1;2;3;...\}$. Число $10 \in N$, а число $0{,}1 \notin N$.

Визначення. Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*.

Множина, яка містить нескінченну кількість елементів, називається *нескінченною*.

Приклад 2.

$A = \{2;4;6;8;10\}$ – скінченна множина, а $N = \{1;2;3;...\}$ – нескінченна множина.

Визначення. Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, то їх називають *рівними* і пишуть $A = B$.

Символом Ø позначають порожню множину.

Визначимо деякі *операції над множинами*.

1 *Сумою* (об'єднанням) множин A і B називають множину $C = A + B$ (або $C = A \cup B$), яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або множині B:

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \text{ або } x \in B.$$

2 *Добутком* (перетином) множин A і B називають множину $D = A \cdot B$ (або $D = A \cap B$), яка складається з елементів, кожен з яких одночасно належить і множині A і множині B:

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \; і \; x \in B.$$

3 *Різницею* множин A і B називається така множина $K = A \backslash B$, що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і не належить множині B:

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \; і \; x \notin B.$$

Приклад 3. Якщо $A = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$, $B = \left\{-1; 0; \frac{1}{2}; 2\right\}$, то

$C = A + B = \left\{-4; -2; -1; 0; \frac{1}{2}; 2; 4\right\}$;

$D = A \cdot B = \{0; 2\}$;

$K = A \backslash B = \{-4; -2; 4\}$.

Визначення. *Околом* точки x_0, $x_0 \in R$ називається довільний інтервал $(\alpha; \beta)$, що містить точку x_0 ($\alpha < x_0 < \beta$).

Інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ називається ε – околом точки x_0, причому точка x_0 – центр околу, а число ε – радіус околу.

Інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$ називається виколотим ε – околом точки x_0.

1.3 Поняття та основні властивості функції

Визначення. Якщо кожному числу x з деякої множини X за певним законом можна поставити у відповідність єдине число y, то кажуть, що y є *функцією* від x і записують $y = f(x)$.

Змінна x називається *незалежною змінною* або *аргументом*, а y – *залежною* змінною або *функцією*.

Множина X, на якій визначена функція, називається *областю визначення* і позначається $D(f)$.

Сукупність всіх значень, яких може набувати залежна змінна y, називається *областю значень* функції $y = f(x)$ і позначається $E(f)$.

Основні способи задавання функцій:

- *аналітичний*: відповідність між функцією та аргументом задається формулою (аналітичним виразом);

- *графічний*: відповідність між x та y задають графіком функції – множиною точок $(x;y)$, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$;

- *табличний*: відповідність між x та y задається у вигляді таблиці.

1.4 Класифікація елементарних функцій

Основними *елементарними* функціями називаються:

1 *Степенева* функція $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$ (рисунок 1.1)

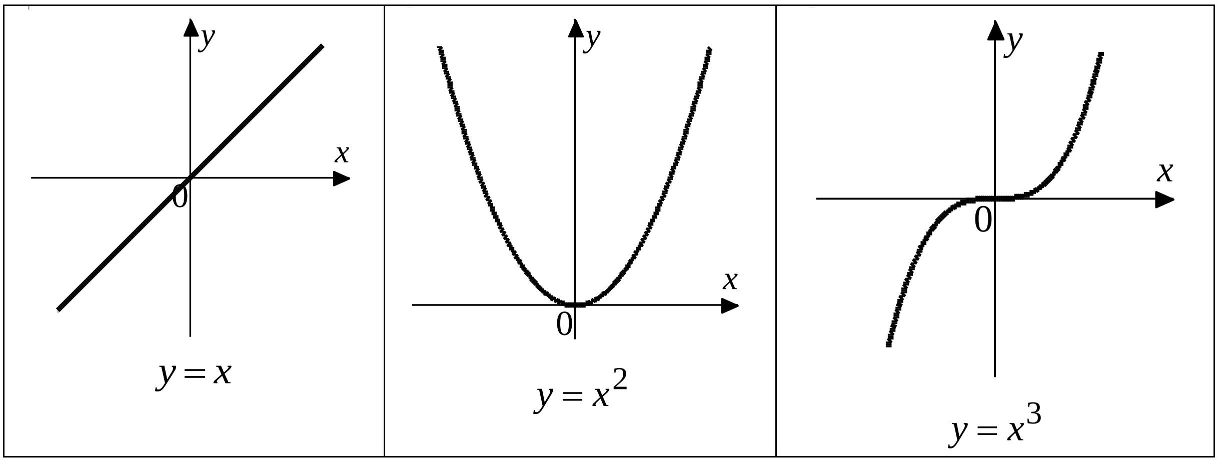


Рисунок 1.1 – Степенева функція (аркуш 1)

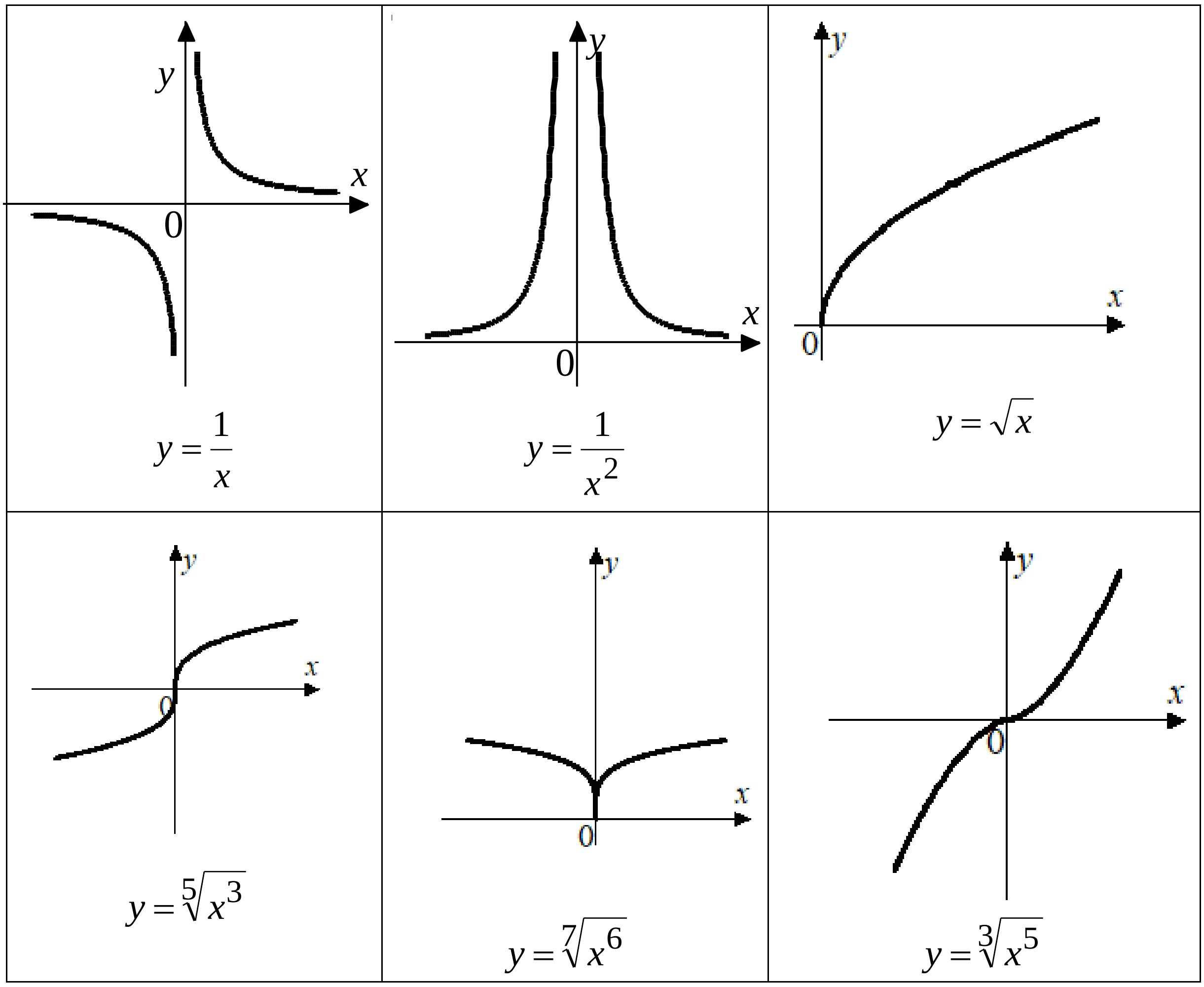


Рисунок 1.1 (аркуш2)

2 *Показникова* функція $y=a^x$, $a>0, a\neq 1$ (рисунок 1.2).

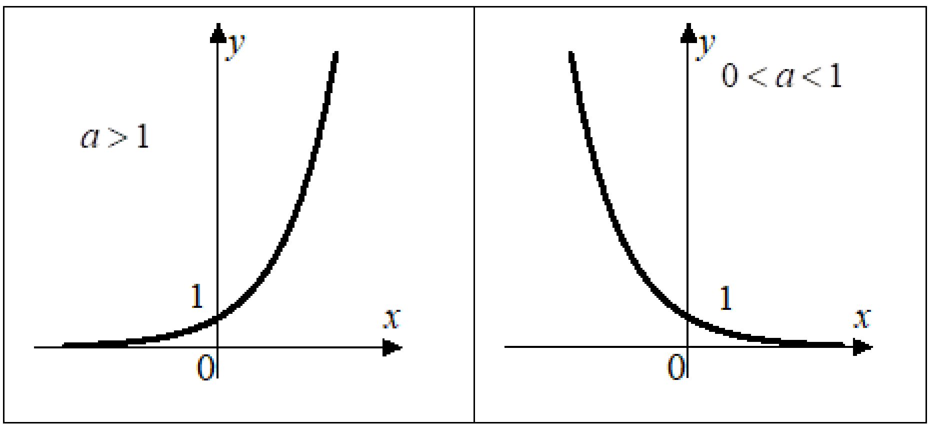


Рисунок 1.2 – Показникова функція

3 *Логарифмічна* функція $y=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$ (рисунок 1.3).

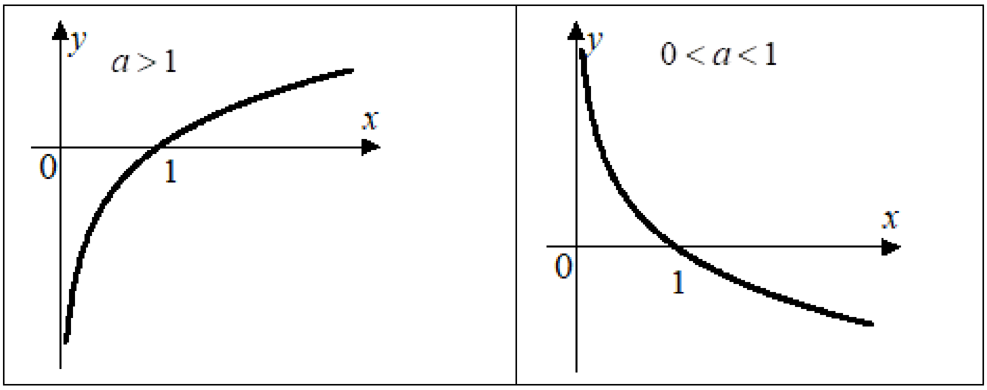


Рисунок 1.3 – Логарифмічна функція

4 *Тригонометричні* функції $y=\sin x, y=\cos x, y=tgx, y=ctgx$ (рисунок 1.4).

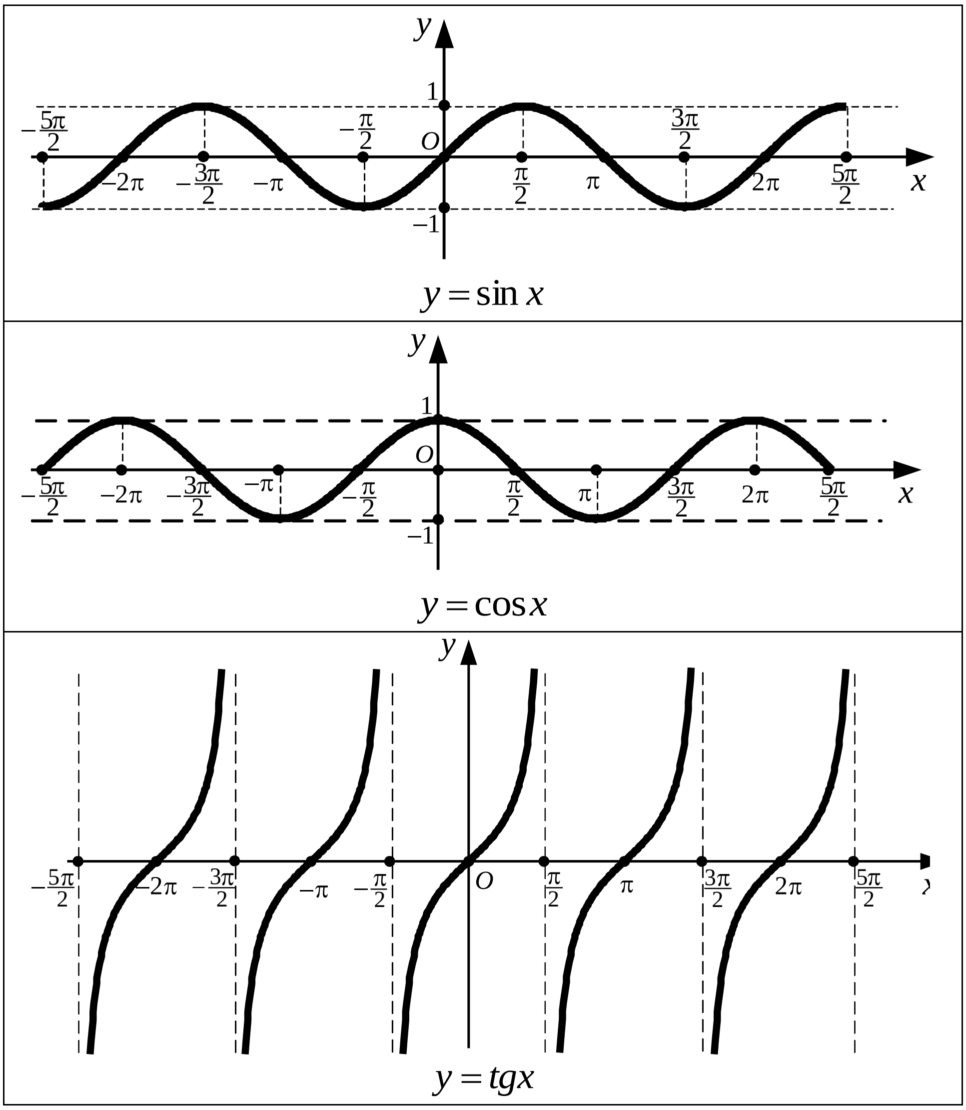


Рисунок 1.4 – Тригонометричні функції (аркуш 1)

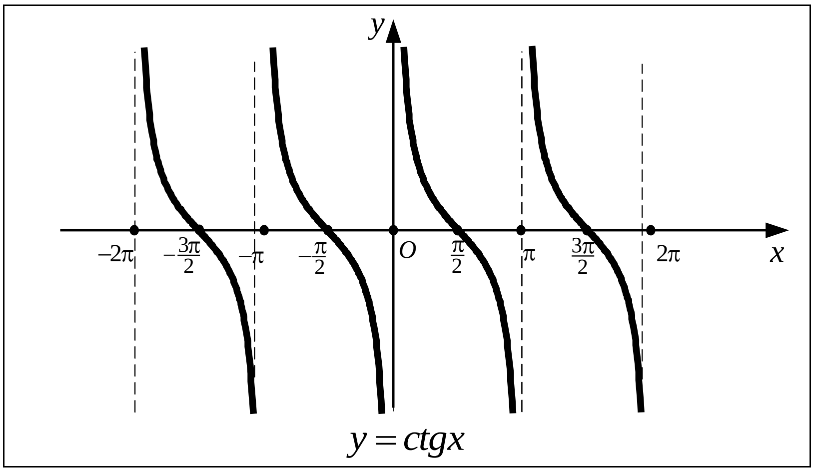


Рисунок 1.4 (аркуш 2)

5 *Обернені тригонометричні* функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ (рисунок 1.5).

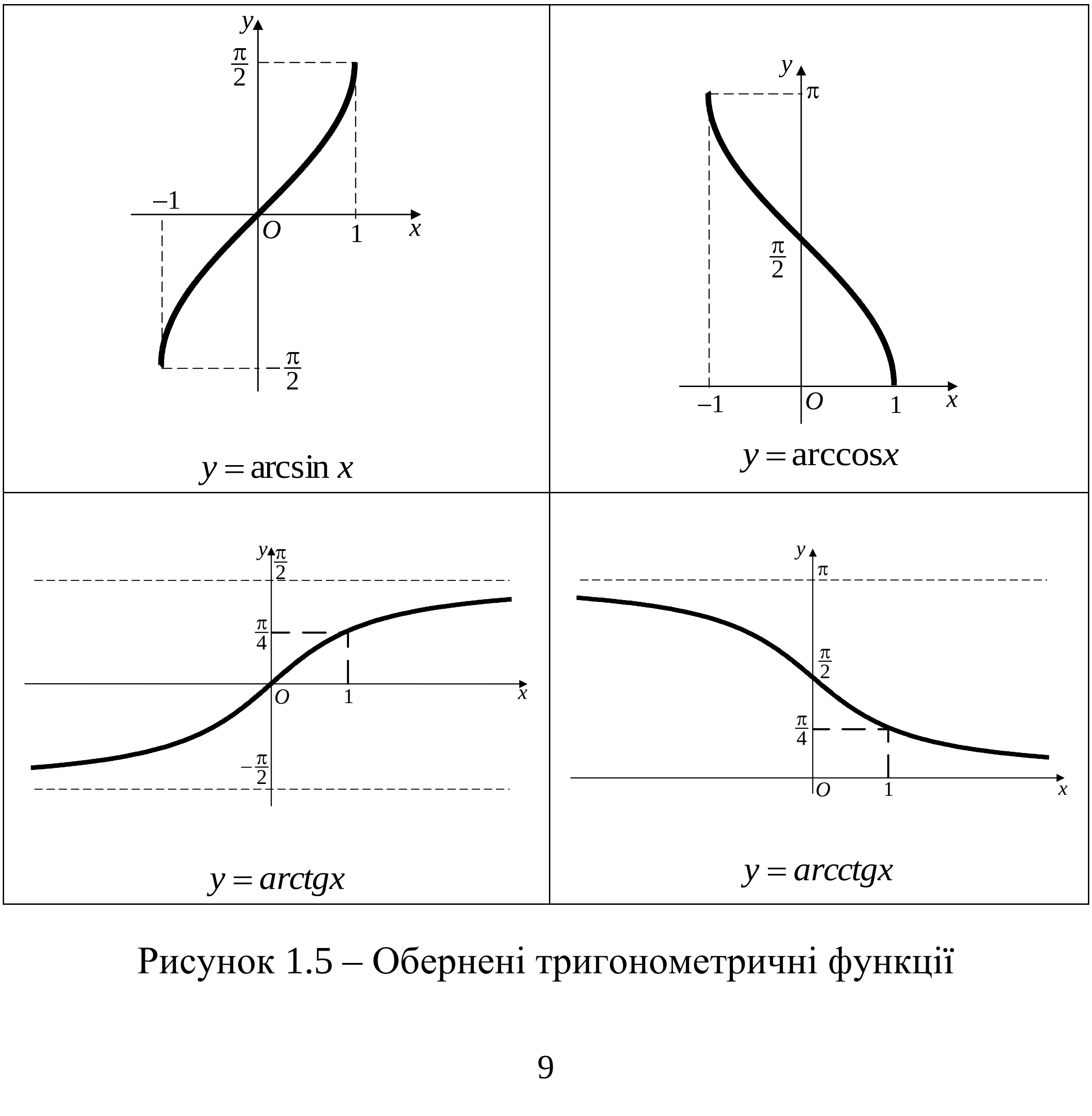


Рисунок 1.5 – Обернені тригонометричні функції

1.5 Границя функції

Визначення. Число A називається *границею* функції $y = f(x)$ за умови, що $x \to x_0$, якщо для всіх точок x, відмінних від x_0, що містяться в δ- околі точки x_0, значення функції $f(x)$ містяться в $\varepsilon-$ околі точки A.

Визначення границі функції $y = f(x)$ за умови, що $x \to x_0$, можна також записати у вигляді

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Границя функції при $x \to x_0$ позначається

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A . \qquad (1.1)$$

Зауваження:

1) число A називається границею функції $y = f(x)$ за умови, що $x \to \infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 \ \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

При цьому записують

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A ;$$

2) функція $y = f(x)$ називається *нескінченно великою* за умови, що $x \to x_0$, якщо

$$\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M) > 0 \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M .$$

При цьому пишуть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty ;$$

3) функція $y = f(x)$ називається *нескінченно малою* за умови, що $x \to x_0$, якщо

$$\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon .$$

При цьому пишуть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 .$$

1.6 Визначення похідної, геометричний зміст, таблиця похідних, правила диференціювання

Визначення. *Похідною* функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу Δx прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

або

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометричний зміст похідної в точці

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 і *кутовому коефіцієнту* цієї дотичної (рисунок 1.6):

$$k = tg\alpha = f'(x_0) \quad . \qquad (1.2)$$

З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k, має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

а нормаль

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$

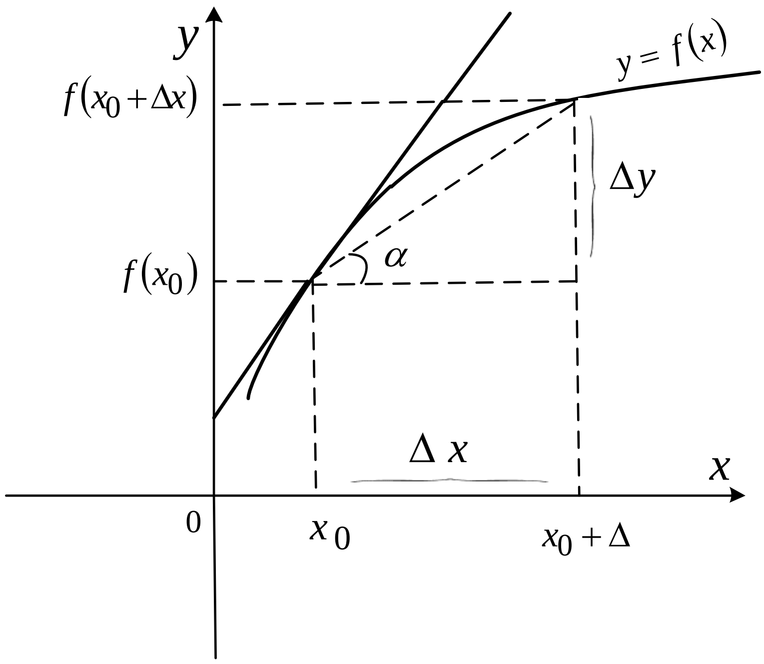


Рисунок 1.6 – Геометричний зміст похідної

Тоді з формули (1.2) отримаємо *рівняння дотичної* і *нормалі* до графіка функції в точці $M_0(x_0;y_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{1.3}$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{1.4}$$

Фізичний зміст похідної

Похідна за часом є мірою *швидкості* зміни відповідної функції. Якщо функція $s = s(t)$ описує рух матеріальної точки, тобто залежність пройденої відстані s від часу t, то її похідна задає залежність швидкості v від часу t:

$$v(t) = s'(t), \tag{1.5}$$

а похідна від швидкості відповідно є прискоренням

$$a(t) = v'(t) = s''(t). \tag{1.6}$$

Похідні елементарних функцій наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Похідні елементарних функцій

1	$(C)' = 0, C = const$	8	$(\cos x)' = -\sin x$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	9	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
3	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	10	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
4	$(e^x)' = e^x$	11	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\log_a x = \dfrac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$	12	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	13	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

1 Похідна суми (різниці) двох функцій, кожна з яких має похідну, дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x). \tag{1.7}$$

2 Похідна добутку двох функцій, кожна з яких має похідну, дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну іншої функції

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{1.8}$$

3 Похідна частки двох функцій, кожна з яких має похідну, обчислюється за формулою

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, v(x) \neq 0. \tag{1.9}$$

4 Сталий множник можна виносити за знак похідної

$$(Cf(x))' = Cf'(x). \tag{1.10}$$

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, тоді ця функція неперервна в точці x_0.

Приклад 4. Обчислити похідну функції $y = \sin x + 2^x - x^3 + 4$.

Розв'язання. За формулою (1.7) та таблицею 1.1. отримаємо

$$y' = \left(\sin x + 2^x - x^3 + 4\right)' = (\sin x)' + \left(2^x\right)' - \left(x^3\right)' + (4)' =$$
$$= \cos x + 2^x \ln 2 - 3x^2.$$

Відповідь: $y' = \cos x + 2^x \ln 2 - 3x^2$.

Приклад 5. Обчислити похідну функції

$$y = \sqrt{x}\, tgx + 2\arcsin x - 1.$$

Розв'язання. За формулами (1.7)–(1.8) та таблицею 1.1 отримаємо

$$y' = \left(\sqrt{x}\, tgx + 2\arcsin x - 1\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' tgx + \sqrt{x}(tgx)' + 2(\arcsin x)' - (1)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot tgx + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Відповідь:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot tgx + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Приклад 6. Обчислити похідну функції $y = \dfrac{\ln x}{arctgx} - e^x$.

Розв'язання. За формулами (1.7), (1.9) та таблицею 1.1 отримаємо

$$y' = \left(\frac{\ln x}{arctgx} - e^x\right)' = \frac{(\ln x)' arctgx - \ln x (arctgx)'}{(arctgx)^2} - \left(e^x\right)' =$$
$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot arctgx - \ln x \cdot \frac{1}{1 + x^2}}{arctg^2 x} - e^x.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot arctgx - \ln x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}}{arctg^2 x} - e^x$.

Приклад 7. Знайти кут, який утворює з віссю OX дотична до графіка функції $y = x^2 - 6x + 8$ в точці $x_0 = 3{,}5$. Записати рівняння дотичної та нормалі в цій точці.

Розв'язання. За формулою (1.2) кутовий коефіцієнт дотичної в точці буде

$$k = tg\alpha = \left(x^2 - 6x + 8\right)'\Big|_{x_0 = 3{,}5} = (2x - 6)\big|_{x_0 = 3{,}5} = 1.$$

Отже, дотична в точці $x_0 = 3{,}5$ утворює кут $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Враховуючи, що $f(x_0) = f(3{,}5) = (3{,}5)^2 - 6 \cdot 3{,}5 + 8 = -0{,}75$, отримаємо за формулою (1.3) рівняння дотичної

$$y - (-0{,}75) = 1 \cdot (x - 3{,}5) \text{ або } y = x - 4{,}25.$$

За формулою (1.14) запишемо рівняння нормалі:

$$y - (-0{,}75) = -\frac{1}{1} \cdot (x - 3{,}5),$$
$$y = -x + 2{,}75.$$

Відповідь: рівняння дотичної $y = x - 4{,}25$, рівняння нормалі $y = -x + 2{,}75$.

Приклад 8. Функції попиту та пропозиції мають вигляд $q = \dfrac{p+9}{p+1}$ та $s = \dfrac{1}{3}p + 2$ відповідно, де q і s - обсяги товарів, p - ціна товару. Потрібно:

1 Визначити рівноважну ціну.

2 Обчислити показники еластичності попиту та пропозиції за рівноважної ціни. Зробити висновок.

Зауваження. *Еластичністю* $E_x(y)$ *функції* $y = f(x)$ відносно змінної x називають

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x). \qquad (1.11)$$

Величину $E_x(y)$, обчислену при заданому значенні x, називають *коефіцієнтом* або *показником еластичності*.

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться залежна змінна при зміні незалежної змінної на 1 %.

Розв'язання:

1 Обчислюємо рівноважну ціну p^*:

$$q\left(p^*\right) = s\left(p^*\right);$$

$$\frac{p^* + 9}{p^* + 1} = \frac{1}{3} p^* + 2;$$

$$p^* + 9 = \left(p^* + 1\right)\left(\frac{1}{3} p^* + 2\right);$$

$$\frac{1}{3}\left(p^*\right)^2 + \frac{4}{3} p^* - 7 = 0;$$

$$\left(p^*\right)^2 + 4p^* - 21 = 0,$$

звідси $p_1^* = 3$, $p_2^* = -7$.

Друге значення $p_2^* = -7 < 0$ не задовольняє умову задачі, оскільки ціна не буває від'ємною.

Отже, рівноважна ціна $p_1^* = 3$.

2 За формулою (1.11) обчислюємо еластичність попиту:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'_p = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{p+9}{p+1}\right)' = \frac{p}{q} \cdot \frac{(p+9)' \cdot (p+1) - (p+9) \cdot (p+1)'}{(p+1)^2} =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \left(-\frac{8}{(p+1)^2}\right) = -\frac{8p}{q(p+1)^2}.$$

Аналогічно обчислюємо еластичність пропозиції:

$$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot s'_p = \frac{p}{s} \cdot \left(\frac{1}{3} p + 2\right)' = \frac{p}{3s}.$$

За рівноважної ціни $p_1^* = 3$ отримаємо показники еластичності попиту та пропозиції:

$$E_{p=3}(q) = -\frac{8 \cdot 3}{\frac{3+9}{3+1} \cdot (3+1)^2} = -\frac{1}{2};$$

$$E_{p=3}(s) = \frac{3}{3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3 + 2\right)} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: Отримані значення показників еластичності $E_{p=3}(q) = -\frac{1}{2}$, $E_{p=3}(s) = \frac{1}{3}$ за абсолютною величиною менші за одиницю. Таким чином, при збільшенні ціни p на 1 % попит зменшиться на 0,5 %, а пропозиція збільшиться приблизно на 0,33 %.

Це означає, що попит і пропозиція даного товару при ціні рівноваги нееластичні відносно ціни. Тобто зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту й пропозиції.

1.7 Похідна складеної функції

Визначення. Якщо аргументом функції $y = f(u)$ є функція незалежної змінної x, тобто $u = u(x)$, то функція $y = f(u(x))$ називається *складеною* функцією від x. При цьому функцію $f(u)$ називають *зовнішньою* функцією, а функцію $u(x)$ - *внутрішньою* функцією складеної функції $y = f(u(x))$.

Приклад 9. Записати формули для елементарних функцій f і u, якщо $y = f(u(x))$:

1) $y = \sin(2x-3)$;

2) $y = (4x+1)^5$;

3) $y = tg^3 x.$

Розв'язання:

1) $u = u(x) = 2x - 3; y = f(u) = \sin u$;

2) $u = u(x) = 4x + 1; y = f(u) = u^5$;

3) $u = u(x) = tgx;\ y = f(u) = u^3.$

Для обчислення похідної складеної функції $y = f(u(x))$ введемо такі позначення:

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – похідна функції y за аргументом x;

$f'_u = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta u}$ – похідна функції f за аргументом u;

$u'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ – похідна функції u за аргументом x.

Похідна складеної функції $y = f(u(x))$ обчислюється за формулою

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x, \tag{1.12}$$

де f'_u – похідна зовнішньої функції за проміжною змінною;
u'_x – похідна внутрішньої функції за основним аргументом.

Приклад 10. Обчислити похідні функцій:
1) $y = \sin(2x - 3)$;
2) $y = (4x + 1)^5$;
3) $y = tg^3 x$;
4) $y = \left(e^{4x} - x\right) \cdot arctg\,3x$;
5) $y = \dfrac{2^x + tg(3x)}{\arcsin x}$.

Розв'язання:

1) $y' = (\sin(2x - 3))' = \cos(2x - 3) \cdot (2x - 3)' =$
$= \cos(2x - 3) \cdot 2 = 2\cos(2x - 3)$;

2) $y' = \left((4x + 1)^5\right)' = 5(4x + 1)^4 \cdot (4x + 1)' = 5(4x + 1)^4 \cdot 4 = 20(4x + 1)^4$;

3) $y' = \left(tg^3 x\right)' = 3tg^2 x \cdot (tgx)' = 3tg^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

4) $y' = \left(\left(e^{4x} - x\right)\cdot arctg\,3x\right)' = \left(e^{4x} - x\right)' \cdot arctg\,3x + \left(e^{4x} - x\right)\cdot (arctg\,3x)' =$

$$= \left(\left(e^{4x}\right)' - (x)'\right) \cdot arctg\,3x + \left(e^{4x} - x\right)\cdot (arctg\,3x)' =$$

$$= \left(4e^{4x} - 1\right)\cdot arctg\,3x + \left(e^{4x} - x\right)\cdot \frac{3}{1+9x^2};$$

5) $y' = \left(\dfrac{2^x + tg(3x)}{\arcsin x}\right)' = \dfrac{\left(2^x + tg(3x)\right)' \cdot (\arcsin x) - \left(2^x + tg(3x)\right)\cdot (\arcsin x)'}{(\arcsin x)^2} =$

$$= \frac{\left(2^x \ln 2 + \dfrac{3}{\cos^2 3x}\right)\cdot (\arcsin x) - \left(2^x + tg(3x)\right)\cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

Відповідь:

1) $y' = 2\cos(2x - 3)$;

2) $y' = 20(4x+1)^4$;

3) $y' = 3tg^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

4) $y' = \left(4e^{4x} - 1\right)\cdot arctg\,3x + \left(e^{4x} - x\right)\cdot \dfrac{3}{1+9x^2}$;

5) $y' = \dfrac{\left(2^x \ln 2 + \dfrac{3}{\cos^2 3x}\right)\cdot (\arcsin x) - \left(2^x + tg(3x)\right)\cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}$.

1.8 Логарифмічне диференціювання функцій

Метод логарифмічного диференціювання зручно використовувати, попередньо прологарифмувавши функцію. Наприклад, необхідно обчислити похідну *показниково-степеневої* функції

$$y = (f(x))^{g(x)}. \tag{1.13}$$

Спочатку прологарифмуємо обидві частини рівності (1.13):

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{g(x)} = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right),$$

$$\ln y = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right). \qquad (1.14)$$

Далі обчислюємо похідну від обох частин рівності (1.14), вважаючи $\ln y$ складеною функцією від змінної x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x). \qquad (1.15)$$

З отриманого рівняння (1.15) знаходимо y':

$$y' = \left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\right)\cdot\left(f(x)\right)^{g(x)}. \qquad (1.16)$$

Зауваження. Метод логарифмічного диференціювання зручно застосовувати при диференціюванні добутку (частки) кількох функцій, а також при диференціюванні виразів, що містять корені з добутку (частки) декількох функцій.

Наведемо *основні властивості* логарифма:

1) $\log_a a = 1$;
2) $\log_a 1 = 0$;
3) $\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$;
4) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
5) $\log_a x^p = p\cdot\log_a x$;
6) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
7) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;
8) $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\cdot\log_a x$;
9) $a^{\log_a b} = b$;
10) $\log_{a^k} x^m = \frac{m}{k}\cdot\log_a x$.

Приклад 11. Обчислити похідні функцій:

1) $y = x^{\sin x}$;

2) $y = \dfrac{(x+1)^2 tgx}{(3x-4)^5}$;

3) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(4x-0{,}5)^5\left(x^2+3\right)}{\ln x}}$.

Розв'язання:

1) прологарифмуємо обидві частини рівності $y = x^{\sin x}$:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x .$$

Продиференціюємо обидві частини отриманої рівності:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\sin x)' \cdot (\ln x) + (\sin x) \cdot (\ln x)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot (\ln x) + (\sin x) \cdot \frac{1}{x} .$$

Виражаючи y' за формулою (1.16), отримаємо:

$$y' = \left(\cos x \cdot (\ln x) + (\sin x) \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot (x)^{\sin x};$$

2) знаходимо логарифми лівої і правої частин виразу $y = \dfrac{(x+1)^2 tgx}{(3x-4)^5}$:

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^2 tgx}{(3x-4)^5} = \ln\left((x+1)^2 tgx\right) - \ln(3x-4)^5 =$$
$$= 2\ln(x+1) + \ln tgx - 5\ln(3x-4),$$

звідси

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 5 \cdot \frac{3}{3x-4};$$

$$y' = \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{15}{3x-4} \right) \cdot \left(\frac{(x+1)^2 tgx}{(3x-4)^5} \right).$$

3) за формулою (1.14) отримаємо

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{\frac{(4x-0{,}5)^5 (x^2+3)}{\ln x}} = \ln \left(\frac{(4x-0{,}5)^5 (x^2+3)}{\ln x} \right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5\ln(4x-0{,}5) + \ln(x^2+3) - \ln\ln x \right).$$

За формулами (1.15)-(1.16) маємо

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3}\left[5 \cdot \frac{4}{4x-0{,}5} + \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right];$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[\frac{20}{4x-0{,}5} + \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{x\ln x} \right] \cdot \sqrt[3]{\frac{(4x-0{,}5)^5 (x^2+3)}{\ln x}}.$$

Відповідь:

1) $y' = \left(\cos x \cdot (\ln x) + (\sin x) \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot (x)^{\sin x}$;

2) $y' = \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{15}{3x-4} \right) \cdot \left(\frac{(x+1)^2 tgx}{(3x-4)^5} \right)$;

3) $y' = \frac{1}{3}\left[\frac{20}{4x-0{,}5} + \frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{x\ln x} \right] \cdot \sqrt[3]{\frac{(4x-0{,}5)^5 (x^2+3)}{\ln x}}$.

1.9 Диференціал функції. Похідні вищих порядків

Нехай x_0 – фіксована точка, Δx – приріст аргументу функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Визначення. *Диференціалом аргументу* в точці x_0 називається приріст аргументу Δx і позначається

$$dx = \Delta x. \qquad (1.17)$$

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається добуток похідної $f'(x_0)$ на диференціал аргументу $\Delta x = dx$, тобто

$$dy = f'(x_0)\Delta x,$$

або

$$dy = f'(x_0)dx. \qquad (1.18)$$

Нехай функція $y = f(x)$ задана на інтервалі $(a;b)$ і диференційована у кожній точці цього інтервалу. Тоді на інтервалі $(a;b)$ буде визначеною функція $f'(x)$. Якщо і ця функція буде диференційованою у деякій точці x інтервалу $(a;b)$, то значення похідної від функції $f'(x)$ в точці x називається *другою похідною* (або *похідною другого порядку*) функції $y = f(x)$ і позначається $f''(x)$, тобто

$$f''(x) = (f'(x))'. \qquad (1.19)$$

Якщо функція $y = f(x)$ в точці x має другу похідну $f''(x)$, то функція називається *двічі диференційованою* в цій точці.

Аналогічно визначається похідна третього, четвертого і т. д. порядку, тобто

$$f'''(x) = (f''(x))',$$
$$f^{(4)}(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)', \ldots$$

У загальному вигляді

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ n = 2,3,4,\ldots. \qquad (1.20)$$

Приклад 12. Обчислити диференціал функції $y = x^2 - 2x + 3$ в точці $x = 2$, якщо $\Delta x = 0{,}3$.

Розв'язання. За формулами (1.17), (1.18) отримаємо

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \left(x^2 - 2x + 3\right)'\Big|_{x=2} \cdot 0{,}3 = (2x - 2)\big|_{x=2} \cdot 0{,}3 = 0{,}6.$$

Відповідь: $dy = 0{,}6$.

Приклад 13. Обсяг виробництва продукції описується функцією $u(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7t + 1155$ (од.), де t – календарний місяць року. Потрібно обчислити продуктивність праці та швидкість її зміни:

1) наприкінці першого календарного місяця;

2) на початок четвертого кварталу.

Зауваження. За визначенням:

- *продуктивність праці* – це похідна від обсягу виробництва $z(t) = u'(t)$;
- *швидкість зміни продуктивності праці* – це похідна від продуктивності праці $v_z(t) = (u'(t))'$.

Розв'язання. Знаходимо похідні:

$$z(t) = \left(\frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7t + 1155\right)' = \frac{5}{3}\cdot 3t^2 - \frac{1}{2}\cdot 2t + 7 = 5t^2 - t + 7;$$

$$v_z(t) = \left(5t^2 - t + 7\right)' = 10t - 1.$$

Тоді продуктивність праці та швидкість її зміни дорівнюють відповідно:

1) наприкінці першого календарного місяця $t = 1$

$$z(1) = 11\left(\frac{од}{міс}\right),\ v_z(1) = 9\left(\frac{од}{міс^2}\right);$$

2) на початок четвертого кварталу $t = 9$

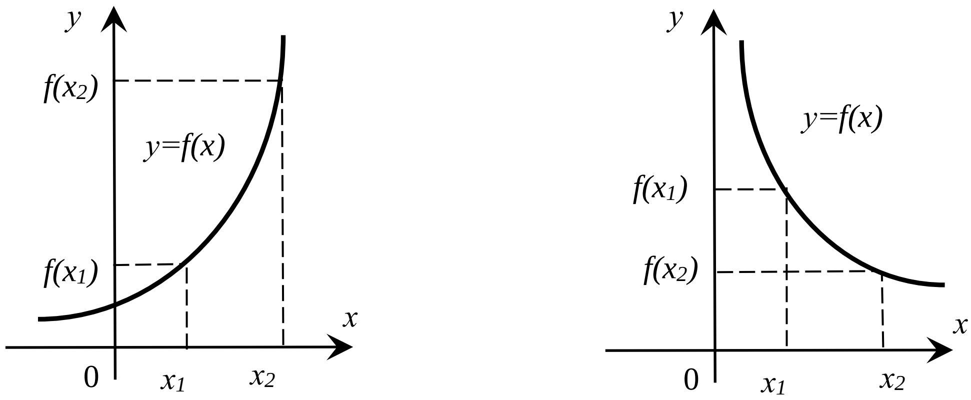
$$z(9) = 403\left(\frac{од}{міс}\right),\ v_z(9) = 89\left(\frac{од}{міс^2}\right).$$

Відповідь: 1) $11\left(\frac{од}{міс}\right)$, $9\left(\frac{од}{міс^2}\right)$; 2) $403\left(\frac{од}{міс}\right)$, $89\left(\frac{од}{міс^2}\right)$.

1.10 Монотонність функції, екстремум

Визначення. Функція $y=f(x)$ називається відповідно *монотонно зростаючою* (*спадною*) на інтервалі $(a;b)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу $x_1, x_2 \in (a;b)$ таких, що $x_1 < x_2$, відповідні значення функції задовольняють нерівності (рисунок 1.7)

$$f(x_1) \le f(x_2)\,\bigl(f(x_1) \ge f(x_2)\bigr).$$



Зростаюча функція Спадна функція

Рисунок 1.7 – Монотонні функції

Теорема (*необхідна умова монотонності*). Якщо функція $y=f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$ і зростає (спадає), то

$$f'(x) \ge 0 \;\bigl(f'(x) \le 0\bigr)\; \forall x \in (a;b). \tag{1.21}$$

Якщо функція є сталою на проміжку $(a;b)$, то $f'(x)=0, \forall x \in (a;b)$.

Теорема (*достатня умова монотонності*). Нехай функція $y=f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$, тоді якщо

$$f'(x) > 0 \;\bigl(f'(x) < 0\bigr)\; \forall x \in (a;b), \tag{1.22}$$

то функція на цьому проміжку зростає (спадає).

Визначення. Точки, в яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю, називаються *стаціонарними точками*.

Точки, в яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками*.

Визначення. Функція $y = f(x)$ має *максимум* в точці x_0, якщо існує такий виколотий δ - окіл точки x_0, що

$$f(x) < f(x_0).$$

Визначення. Функція $y = f(x)$ має *мінімум* в точці x_0, якщо існує такий виколотий δ - окіл точки x_0, що

$$f(x) > f(x_0).$$

Точки максимуму $x_{\max}$ і мінімуму $x_{\min}$ називають *точками екстремуму* функції, а відповідні їм значення функції – *екстремумами функції* (максимумами $\max f$ та мінімумами $\min f$).

Теорема (*необхідна умова екстремуму*). Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то

$$f'(x_0) = 0 \text{ або } f'(x_0) \text{ не існує.} \qquad (1.23)$$

Зауваження. Функція може не досягати екстремуму, навіть якщо необхідна умова екстремуму виконується.

Приклад 14. Задано функцію $y = x^3$. Перевірити, чи буде її стаціонарна точка точкою екстремуму.

Розв'язання. Обчислюємо похідну функції $y' = 3x^2$. За формулою (1.23) отримаємо стаціонарну точку

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Але за рисунком 1.8 бачимо, що точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму.

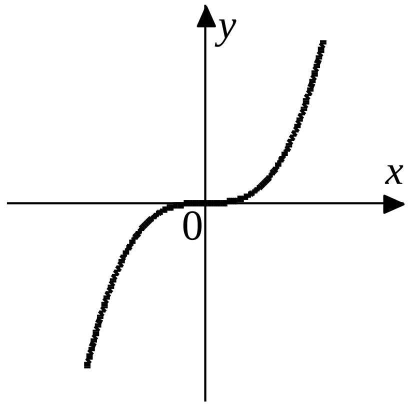


Рисунок 1.8 – Графік функції $y = x^3$

Відповідь: ні.

Достатні умови екстремуму

Теорема *(перша достатня умова екстремуму).* Нехай x_0 – критична точка неперервної функції $y = f(x)$ і в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, існує скінченна похідна. Якщо похідна функції $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак, то x_0 – точка екстремуму функції $y = f(x)$ (рисунок 1.9). Якщо ж при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $y = f(x)$.

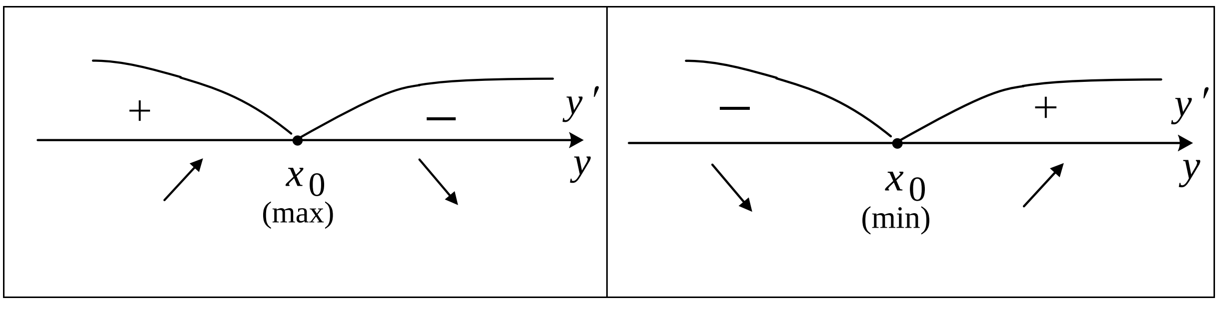


Рисунок 1.9 – Перша достатня умова екстремуму

Отже, для відшукання екстремуму функції необхідно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти критичні точки функції;

3) дослідити на екстремум кожну критичну точку, яка належить області визначення функції.

Зауваження. Розглянуті екстремуми називаються *локальними*, бо може бути таке, що значення локального максимуму функції в одній точці менше за значення локального мінімуму функції в іншій точці.

Теорема *(друга достатня умова екстремуму).* Нехай точка x_0 – стаціонарна точка функції $y = f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, а друга похідна $f''(x_0)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і $f''(x_0) \neq 0$, тоді:

а) якщо $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 функція $y = f(x)$ має локальний мінімум;

б) якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці x_0 функція $y = f(x)$ має локальний максимум.

Приклад 15. Дослідити на монотонність і знайти точки екстремуму заданих функцій:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$;

2) $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

Розв'язання:

1) функція $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$ визначена на всій числовій осі, тобто $D(f)$: $x \in R$.

Знайдемо точки, в яких перша похідна функції або не існує, або дорівнює нулю (критичні точки функції):

$$y'(x) = \left(2x^3 + 3x^2 - 36x + 7\right)' = 6x^2 + 6x - 36 = 6\left(x^2 + x - 6\right);$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = -3. \end{array}\right.$$

Згідно з формулою (1.22) з'ясуємо знак першої похідної на кожному з отриманих інтервалів. Якщо перша похідна має додатнє (від'ємне) значення на інтервалі (рисунок 1.10), то на цьому інтервалі функція монотонно зростає (спадає).

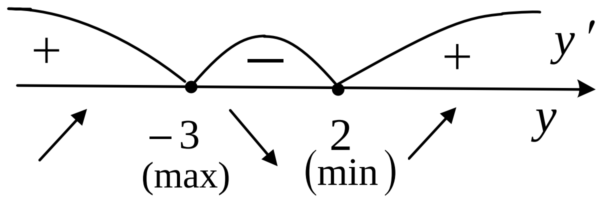


Рисунок 1.10

На інтервалі $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$ функція монотонно зростає, а на інтервалі $(-3;2)$ спадає.

За першою достатньою умовою екстремуму в точці $x=-3$ функція досягає свого максимуму, а в точці $x=2$ - мінімуму:

$$\max y = y(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 3\cdot(-3)^2 - 36\cdot(-3) + 7 = 88;$$
$$\min y = y(2) = 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 - 36\cdot 2 + 7 = -37.$$

Зауваження. Дослідити функцію $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$ на екстремум можна також за другою достатньою умовою екстремуму. Для цього обчислюємо другу похідну функції в стаціонарних точках $x_1 = 2$, $x_2 = -3$:

$$y''(x) = \left(6x^2 + 6x - 36\right)' = 12x + 6;$$

$y''(2) = 12\cdot 2 + 6 = 30 > 0 \Rightarrow$ в точці $x_1 = 2$ функція має локальний мінімум;

$y''(-3) = 12\cdot(-3) + 6 = -30 < 0 \Rightarrow$ в точці $x_2 = -3$ функція має локальний максимум.

Відповідь: на інтервалі $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$ функція монотонно зростає, а на інтервалі $(-3;2)$ спадає; $\max y = y(-3) = 88$; $\min y = y(2) = -37$;

2) функція $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$ визначена на всій числовій осі, окрім точок $x = \pm 2$, тобто $D(f)$: $x \in (-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

Знайдемо критичні точки функції:

$$y'(x)=\left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\cdot\left(4-x^2\right)-x^3\cdot\left(4-x^2\right)'}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{3x^2\cdot\left(4-x^2\right)-x^3\cdot(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{12x^2-3x^4+2x^4}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{12x^2-x^4}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(12-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(2\sqrt{3}-x\right)\left(2\sqrt{3}+x\right)}{\left(4-x^2\right)^2}.$$

$$y'(x)=0: x^2\left(2\sqrt{3}-x\right)\left(2\sqrt{3}+x\right)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=2\sqrt{3}, x_3=-2\sqrt{3};$$

$y'(x)$ не існує: $\left(4-x^2\right)^2=0 \Rightarrow x_4=2\notin D(f), x_5=-2\notin D(f).$

За формулою (1.22) з'ясуємо знак першої похідної на кожному з отриманих інтервалів (рисунок 1.11).

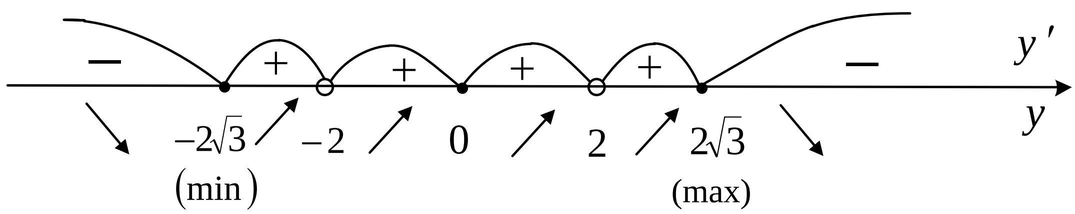


Рисунок 1.11

За першою достатньою умовою екстремуму в точці $x=-2\sqrt{3}$ функція досягає свого мінімуму, а в точці $x=2\sqrt{3}$ – максимуму:

$$\min y=y\left(-2\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-2\sqrt{3}\right)^3}{4-\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-24\sqrt{3}}{-8}=3\sqrt{3};$$

$$\max y=y\left(2\sqrt{3}\right)=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3}{4-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\frac{24\sqrt{3}}{-8}=-3\sqrt{3}.$$

Відповідь: На інтервалі $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ функція монотонно спадає, а на інтервалі $\left(-2\sqrt{3};2\right)\cup(-2;2)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right)$ монотонно зростає; $\min y=y\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$; $\max y=y\left(2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$.

Приклад 16. Відомо, що залежність між витратами виробництва і обсягом продукції описується законом $y=x^3-12x+19$. При яких значеннях обсягу продукції витрати спадають, а при яких зростають? Знайти обсяг виробництва, при якому витрати будуть мінімальними.

Розв'язання. Функція $y = x^3 - 12x + 19$ за умовою задачі визначена на інтервалі $x \geq 0$.

Знайдемо критичні точки функції:

$$y'(x) = \left(x^3 - 12x + 19\right)' = 3x^2 - 12 = 3\left(x^2 - 4\right) = 3(x-2)(x+2);$$
$$3(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = -2. \end{array}\right.$$

За формулою (1.22) з'ясуємо знак першої похідної на кожному з отриманих інтервалів (рисунок 1.12).

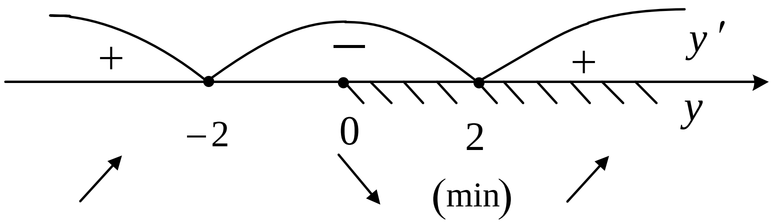


Рисунок 1.12

Враховуючи, що $x \geq 0$, за першою достатньою умовою екстремуму в точці $x = 2$ функція досягає свого мінімуму. Обчислюємо

$$\min y = y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 19 = 3.$$

Відповідь: при $x \in (0;2)$ витрати спадають, при $x > 2$ витрати зростають, $\min y = y(2) = 3$ грош. од.

1.11 Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Визначення. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та існує таке значення $x_0 \in [a;b]$, що для $\forall x \in [a;b]$ виконується умова $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$), тоді число $f(x_0)$ називають *найбільшим* (*найменшим*) значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку $[a;b]$ необхідно:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти всі критичні точки, які належать відрізку $[a;b]$;

3) обчислити значення функції $y=f(x)$ у знайдених критичних точках і на кінцях відрізку $[a;b]$;

4) вибрати серед отриманих чисел найбільше та найменше.

Приклад 17. Знайти найбільше та найменше та найменше значення функції $y=\frac{4}{x}+x$ на відрізку $[1;3]$.

Розв'язання:

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції $y=\frac{4}{x}+x$ на відрізку $[1;3]$ виконуємо таке:

1) область визначення функції $y=\frac{4}{x}+x$ $D(f)$: $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

2) знаходимо критичні точки, які належать відрізку $[1;3]$:

$$y'=\left(\frac{4}{x}+x\right)'=-\frac{4}{x^2}+1;$$

$$-\frac{4}{x^2}+1=0;$$

$$\frac{4}{x^2}=1;\ x^2=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-2\notin[1;3],\\ x_2=2\in[1;3].\end{array}\right.$$

3) обчислюємо значення функції $y=\frac{4}{x}+x$ у точці $x=2$ і на кінцях відрізку $[1;3]$:

$$y(2)=4;\quad y(1)=5;\quad y(3)=\frac{13}{3}.$$

4) обираємо серед отриманих чисел найбільше та найменше:

$$y_{найм}=4,\ y_{найб}=5.$$

Відповідь: $y_{найм}=y(2)=4,\ y_{найб}=y(1)=5$.

2 ФУНКЦІЯ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1 Функція кількох змінних. Частинні похідні

Визначення. Змінна z називається *функцією незалежних змінних* x, y *на множині* D, якщо кожній парі значень $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z.

При цьому множина D називається *областю визначення функції*, змінні x, y – її *аргументами*. Функціональна залежність позначається $z = f(x, y)$ або $z = z(x, y)$.

Визначення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною* функції $z = f(x, y)$ *за* x в точці $M_0(x_0, y_0)$ і позначається одним із символів: $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, $z'_x(M_0)$, $f'_x(M_0)$, тобто

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Аналогічно визначається *частинна похідна за* y і позначається $\frac{\partial z}{\partial y}$, $z'_y(M_0)$, $f'_y(M_0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = f'_y(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}. \qquad (2.2)$$

При обчисленні частинної похідної z'_x треба вважати y сталою, а при обчисленні частинної похідної z'_y сталою величиною вважається x.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції:

1) $Z = 0{,}5y^3 - x^2 y + y + 10{,}5$;

2) $Z = e^{x^3 - 4x - y^2} + 2x$.

Розв'язання:

1) вважаючи y сталою, диференціюємо функцію за змінною x:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\left(0{,}5y^3-x^2y+y+10{,}5\right)'_x=\left(0{,}5y^3\right)'_x-\left(x^2y\right)'_x+\left(y\right)'_x+\left(10{,}5\right)'_x=$$
$$=-2xy.$$

Тоді, вважаючи x сталою, одержимо

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\left(0{,}5y^3-x^2y+y+10{,}5\right)'_y=\left(0{,}5y^3\right)'_y-\left(x^2y\right)'_y+\left(y\right)'_y+\left(10{,}5\right)'_y=$$
$$=1{,}5y^2-x^2+1;$$

2) аналогічно:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\left(e^{x^3-4x-y^2}+2x\right)'_x=\left(e^{x^3-4x-y^2}\right)'_x+\left(2x\right)'_x=$$
$$=e^{x^3-4x-y^2}\cdot\left(x^3-4x-y^2\right)'+2=e^{x^3-4x-y^2}\cdot\left(3x^2-4\right)+2;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\left(e^{x^3-4x-y^2}+2x\right)'_y=\left(e^{x^3-4x-y^2}\right)'_y+\left(2x\right)'_y=$$
$$=e^{x^3-4x-y^2}\cdot\left(x^3-4x-y^2\right)'_y=e^{x^3-4x-y^2}\cdot\left(-2y\right)=$$
$$=-2y\cdot e^{x^3-4x-y^2}.$$

Відповідь:

1) $\frac{\partial Z}{\partial x}=-2xy$, $\frac{\partial Z}{\partial y}=1{,}5y^2-x^2+1$;

2) $\frac{\partial Z}{\partial x}=e^{x^3-4x-y^2}\cdot\left(3x^2-4\right)+2$, $\frac{\partial Z}{\partial y}=-2y\cdot e^{x^3-4x-y^2}$.

Зауваження. Для функції $u=f(x_1,x_2...x_n)$ n змінних можна знаходити n частинних похідних

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}, i = 1,2 \ldots n, \qquad (2.3)$$

де $\Delta_{x_i} f = f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n)$.

При обчисленні частинної похідної $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ за змінною x_i треба вважати решту змінних сталими.

Зауваження. Наведемо *економічну інтерпретацію* частинних похідних.

Нехай задано виробничу функцію $Z = f(x; y)$, яка відображує зв'язок між зміною обсягів двох задіяних у процесі виробництва типів ресурсів x та y відповідно і результатами цієї взаємодії.

Еластичність виробничої функції $Z = f(x; y)$ відносно чинників виробництва x та y відповідно обчислюється за формулами:

$$E_x(Z(x; y)) = \frac{x}{Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad (2.4)$$

$$E_y(Z(x; y)) = \frac{y}{Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y}. \qquad (2.5)$$

Величини $E_x(Z)$ та $E_y(Z)$, обчислені при заданому значенні $(x; y)$, називають *коефіцієнтами* еластичності, причому $E_x(Z)$ - коефіцієнтом еластичності Z за x, а $E_y(Z)$ - коефіцієнтом еластичності Z за y.

Коефіцієнт еластичності $E_x(Z)$ ($E_y(Z)$) показує відсотковий приріст виробничої функції відповідно до приросту чинника x (y) на 1 % за умови, що інший чинник y (x) не змінюється.

Приклад 2. Обсяг виробництва деякого товару характеризується виробничою функцією $Z = x^2 y - 2y^3 + x^4 + 15xy$, де x та y – чинники виробництва. Обчислити коефіцієнти еластичності $E_x(Z)$ та $E_y(Z)$ в точці $M_0(1{,}5;1)$. Зробити висновок. Всі розрахунки округлити до третього знака після коми.

Розв’язання. За формулами (2.4)–(2.5) обчислюємо коефіцієнти еластичності:

$$E_x(Z(x;y)) = \frac{x}{x^2y - 2y^3 + x^4 + 15xy} \cdot \left(2xy + 4x^3 + 15y\right);$$

$$E_y(Z(x;y)) = \frac{y}{x^2y - 2y^3 + x^4 + 15xy} \cdot \left(x^2 - 6y^2 + 15x\right).$$

Отже,

$$E_x(Z(M_0)) = E_x(Z(x;y))\Big|_{M_0(1,5;1)} = \frac{1{,}5 \cdot \left(2 \cdot 1{,}5 \cdot 1 + 4 \cdot (1{,}5)^3 + 15 \cdot 1\right)}{(1{,}5)^2 \cdot 1 - 2 \cdot (1)^3 + (1{,}5)^4 + 15 \cdot 1{,}5 \cdot 1} \approx 1{,}699$$

$$E_y(Z(M_0)) = E_y(Z(x;y))\Big|_{M_0(1,5;1)} = \frac{1 \cdot \left((1{,}5)^2 - 6 \cdot (1)^2 + 15 \cdot 1{,}5\right)}{(1{,}5)^2 \cdot 1 - 2 \cdot (1)^3 + (1{,}5)^4 + 15 \cdot 1{,}5 \cdot 1} \approx 0{,}674\,.$$

Відповідь: $E_x(Z(M_0)) \approx 1{,}699$; $E_y(Z(M_0)) \approx 0{,}674$.

Таким чином, збільшення чинника виробництва x на 1 % (за умови, що чинник y не змінюється) дає зростання обсягу виробництва на 1,699 %, а збільшення чинника виробництва y на 1 % (за умови, що чинник x не змінюється) дає зростання обсягу виробництва на 0,674 %.

2.2 Частинні похідні другого порядку

Визначення. Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні $z'_x = f'_x(x;y)$, $z'_y = f'_y(x;y)$ в усіх точках $(x, y) \in D$. Якщо існують частинні похідні за x та y від функцій z'_x, z'_y, то вони називаються *частинними похідними другого порядку* функції $z = f(x, y)$ і позначаються

$$f''_{xx}(x;y),\ \ f''_{xy}(x;y),\ \ f''_{yy}(x;y),\ \ f''_{yx}(x;y)$$

або відповідно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Короткий запис: $z''_{xx}, \ z''_{xy}, \ z''_{yy}, \ z''_{yx}$.

Таким чином,

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y) = (f'_x(x;y))'_x;$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x;y) = (f'_y(x;y))'_y; \qquad (2.6)$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x;y) = (f'_x(x;y))'_y;$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x;y) = (f'_y(x;y))'_x.$$

Частинні похідні $z''_{xy}(x;y), z''_{yx}(x;y)$ називаються *мішаними* частинними похідними другого порядку.

Теорема. Якщо функція $z = f(x,y)$ визначена разом зі своїми похідними $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому z''_{xy} і z''_{yx} неперервні в точці M_0, то в цій точці

$$z''_{xy}(M_0) = z''_{yx}(M_0). \qquad (2.7)$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні другого порядку функції $Z = -2xy^5 + 4x^3y^2 + xy + 16y + 42$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку похідні першого порядку:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -2y^5 + 12x^2y^2 + y,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -10xy^4 + 8x^3y + x + 16.$$

Диференціюємо функцію $\frac{\partial Z}{\partial x} = -2y^5 + 12x^2y^2 + y$ за змінною x, вважаючи y сталою. Одержимо частинну похідну другого порядку

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 24xy^2.$$

Тоді продиференціюємо цю саму функцію $\frac{\partial Z}{\partial x} = -2y^5 + 12x^2y^2 + y$ за змінною y, вважаючи x сталою. Отримаємо

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \left(-2y^5 + 12x^2y^2 + y\right)'_y = -10y^4 + 24x^2y + 1.$$

Нарешті, вважаючи сталою x, продиференціюємо за y функцію $\frac{\partial Z}{\partial y} = -10xy^4 + 8x^3y + x + 16$. Тоді отримаємо

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \left(-10xy^4 + 8x^3y + x + 16\right)'_y = -40xy^3 + 8x^3.$$

Відповідь: $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 24xy^2$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -10y^4 + 24x^2y + 1$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -40xy^3 + 8x^3$.

2.3 Дослідження на екстремум функції двох змінних

Визначення. Функція $z = f(x; y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ *максимум (мінімум)* $f(x_0; y_0)$, якщо в деякому околі цієї точки для всіх точок $M(x; y)$, відмінних від M_0, виконується умова $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ $\left(f(x; y) > f(x_0; y_0)\right)$.

Точки мінімуму та максимуму називаються *точками екстремуму*.

Теорема ***(необхідна умова екстремуму).*** Якщо функція $z = f(x;y)$ має в точці $M_0(x_0;y_0)$ екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку $z'_x(x_0;y_0), z'_y(x_0;y_0)$ дорівнюють нулю або не існують.

Визначення. Точка $M_0(x_0;y_0)$, в якій

$$\begin{cases} z'_x(x_0;y_0) = 0, \\ z'_y(x_0;y_0) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

називається *стаціонарною*.

Стаціонарні точки і точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками*.

Критична точка лише підозрюється на екстремум і потребує дослідження, яке полягає в перевірці достатніх умов екстремуму.

Теорема ***(достатня умова екстремуму).*** Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0;y_0)$ і деякому її околі функція $z = f(x;y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку.

Введемо такі позначення:

$$z''_{xx}(x_0;y_0) = A, \quad z''_{xy}(x_0;y_0) = B, \quad z''_{yy}(x_0;y_0) = C .$$

Якщо $AC - B^2 < 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ функція $z = f(x;y)$ екстремуму не має.

Якщо $AC - B^2 > 0$, то функція $z = f(x;y)$ має в точці $(x_0;y_0)$ екстремум, причому максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$.

У випадку $AC - B^2 = 0$ потрібне додаткове дослідження.

Приклад 4. Знайти екстремум функції:

1) $Z(x;y) = x^2 + y^2 - 6xy + 4x$;

2) $Z(x;y) = 5x^3 + 4y^2 - 15x - 8y + 1$;

3) $Z(x;y) = e^{-x^2 - 2x + 4y - y^2}$.

Розв'язання:

1) функція $Z(x;y) = x^2 + y^2 - 6xy + 4x$ визначена на всій площині XOY, тобто $D(Z):(x;y) \in R^2$.

Знайдемо частинні похідні:

$$Z'_x(x;y) = 2x - 6y + 4, \quad Z'_y(x;y) = 2y - 6x.$$

За формулою (2.8) виявимо стаціонарні точки функції , розв'язуючи систему:

$$\begin{cases} 2x - 6y + 4 = 0, \\ 2y - 6x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -2, \\ y - 3x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x = -2, \\ y = 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Отримаємо єдину стаціонарну точку $M_0\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

Обчислюємо частинні похідні другого порядку:

$$Z''_{xx}(x;y) = 2, \quad Z''_{xy}(x;y) = -6, \quad Z''_{yy}(x;y) = 2.$$

Для всіх значень x та y ці похідні сталі, отже, $A = 2, B = -6, C = 2$. Маємо

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-6)^2 = 4 - 36 = -32 < 0.$$

Отже, в точці $M_0\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right)$ функція екстремуму не має;

2) функція $Z(x;y) = 5x^3 + 4y^2 - 15x - 8y + 1$ визначена на всій площині XOY, тобто $D(Z):(x;y) \in R^2$.

Обчислюємо частинні похідні:

$$Z'_x(x;y) = 15x^2 - 15, \quad Z'_y(x;y) = 8y - 8.$$

За формулою (2.8) знаходимо координати стаціонарних точок:

$$\begin{cases} 15x^2 - 15 = 0, \\ 8y - 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1, \\ y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отримаємо дві стаціонарні точки $M_1(1;1), M_2(-1;1)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$Z''_{xx}(x;y) = 30x, \quad Z''_{xy}(x;y) = 0, \quad Z''_{yy}(x;y) = 8.$$

Таким чином, отримаємо $A = 30x, \quad B = 0, \quad C = 8.$

Для точки $M_1(1;1)$ за достатньою умовою екстремуму

$$AC - B^2\Big|_{M_1} = 30 \cdot 1 \cdot 8 - 0^2 = 240 > 0.$$

Отже, в точці $M_1(1;1)$ екстремум є, причому це мінімум, бо $A = 30 > 0$. Обчислюємо значення функції в точці $M_1(1;1)$:

$$\min Z = Z(1;1) = 5 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 - 8 \cdot 1 + 1 = -13.$$

Аналогічно для точки $M_2(-1;1)$ за достатньою умовою екстремуму отримаємо

$$AC - B^2\Big|_{M_1} = 30 \cdot (-1) \cdot 8 - 0^2 = -240 < 0.$$

Отже, в точці $M_2(-1;1)$ екстремуму немає;

3) функція $Z(x;y) = e^{-x^2 - 2x + 4y - y^2}$ має область визначення $D(Z): (x;y) \in R^2$.

Обчислюємо частинні похідні функції $Z = e^{-x^2 - 2x + 4y - y^2}$:

$$Z'_x(x;y) = e^{-x^2 - 2x + 4y - y^2} \cdot \left(-x^2 - 2x + 4y - y^2\right)'_x =$$
$$= e^{-x^2 - 2x + 4y - y^2} \cdot (-2x - 2);$$

$$Z'_y(x;y) = e^{-x^2 - 2x + 4y - y^2} \cdot \left(-x^2 - 2x + 4y - y^2\right)'_y =$$
$$= e^{-x^2 - 2x + 4y - y^2} \cdot (4 - 2y).$$

За формулою (2.8) розв’язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(-2x-2)=0, \\ e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(4-2y)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2=0, \\ 4-2y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=2; \end{cases}$$

та отримаємо стаціонарну точку $M_0(-1;2)$.

Обчислюємо частинні похідні другого порядку:

$$Z''_{xx}(x;y)=\left(e^{-x^2-2x+4y-y^2}\right)'_x\cdot(-2x-2)+\left(e^{-x^2-2x+4y-y^2}\right)\cdot(-2x-2)'_x=$$

$$=\left(e^{-x^2-2x+4y-y^2}\right)\cdot(-2x-2)^2+\left(e^{-x^2-2x+4y-y^2}\right)\cdot(-2)=$$

$$=e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot\left((2x+2)^2-2\right);$$

$$Z''_{xy}(x;y)=\left(e^{-x^2-2x+4y-y^2}\right)'_y\cdot(-2x-2)+\left(e^{-x^2-2x+4y-y^2}\right)\cdot(-2x-2)'_y=$$

$$=e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(4-2y)\cdot(-2x-2)=-4e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(2-y)\cdot(x+1);$$

$$Z''_{yy}(x;y)=\left(e^{-x^2-2x+4y-y^2}\right)'_y\cdot(4-2y)+e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(4-2y)'_y=$$

$$=e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(4-2y)^2+e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(-2)=$$

$$=e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot\left((4-2y)^2-2\right).$$

За достатньою умовою екстремуму для точки $M_0(-1;2)$ обчислюємо:

$$A\big|_{M_0}=e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot\left((2x+2)^2-2\right)\Big|_{M_0(-1;2)}=-2e^5;$$

$$B\big|_{M_0}=-4e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot(2-y)\cdot(x+1)\Big|_{M_0(-1;2)}=0;$$

$$C\big|_{M_0} = e^{-x^2-2x+4y-y^2}\cdot\left((4-2y)^2-2\right)\Big|_{M_0(-1;2)} = -2e^5;$$

$$AC - B^2 = 4e^{10} > 0.$$

Отже, в точці $M_0(-1;2)$ екстремум є, причому це максимум, бо $A = -2e^5 < 0$. Обчислюємо значення функції $Z(x;y) = e^{-x^2-2x+4y-y^2}$ в точці $M_0(-1;2)$:

$$\max Z = Z(-1;2) = e^5.$$

Відповідь:

1) екстремуму нема;
2) $\min Z = Z(1;1) = -13$;
3) $\max Z = Z(-1;2) = e^5$.

Приклад 5. Фірма виробляє два види продукції, яку потім продає за цінами 800 грош. од. та 900 грош. од. за одиницю відповідно. Обсяги випуску продукції становлять x_1 од. і x_2 од. відповідно. Задано функцію витрат $K(x_1;x_2) = 2x_1^{\,2} + x_1x_2 + x_2^{\,2}$. Знайти такий план випуску продукції, за яким отриманий прибуток буде максимальним. Обчислити цей прибуток.

Розв'язання. За умовою задачі складаємо функцію прибутку

$$Z(x_1;x_2) = 800x_1 + 900x_2 - 2x_1^{\,2} - x_1x_2 - x_2^{\,2}, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Далі необхідно отриману функцію $Z(x_1;x_2)$ дослідити на екстремум. Знаходимо стаціонарні точки, для чого спочатку визначаємо частинні похідні:

$$Z'_{x_1}(x_1;x_2) = 800 - 4x_1 - x_2,$$
$$Z'_{x_2}(x_1;x_2) = 900 - x_1 - 2x_2.$$

За необхідною умовою екстремуму

$$\begin{cases} Z'_{x_1}(x_1;x_2)=0, \\ Z'_{x_2}(x_1;x_2)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 800-4x_1-x_2=0, \\ 900-x_1-2x_2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1+x_2=800, \\ x_1+2x_2=900; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=100, \\ x_2=400. \end{cases}$$

Отримуємо стаціонарну точку $\Pi(100;400)$.

Перевіримо, що при такому обсязі продукції прибуток буде максимальним. Для цього використовуємо достатню умову екстремуму:

$$Z''_{x_1x_1}=-4=A,$$
$$Z''_{x_1x_2}=-1=B,$$
$$Z''_{x_2x_2}=-2=C.$$

Тоді $AC-B^2=-4\cdot(-2)-(-1)^2=7>0$. Оскільки $A=-4<0$, то при обсязі продукції $x_1=100$ од. і $x_2=400$ од. фірма отримає максимальний прибуток, який становить

$$\max Z = Z(100;400)=800\cdot100+900\cdot400-2\cdot100^2-100\cdot400-400^2=$$
$$=220000 \text{ грош. од.}$$

Відповідь: максимальний прибуток у розмірі 220 000 грош. од. фірма отримає, якщо буде виробляти 100 од. продукції першого виду та 400 од. продукції другого виду.

2.4 Похідна за напрямом. Градієнт

Нехай функція $z=f(x;y)$ задана в деякій області на площині.

В цій області зафіксуємо будь-яку точку $M_0(x_0;y_0)$, виберемо деякий напрям $\vec{a}=(a_x;a_y)$ і проведемо промінь в цьому напрямі через точку M_0.

Визначення. *Похідною функції* $z=f(x;y)$ *за напрямом вектора* $\vec{a}$ в точці M_0 називається границя

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta S}, \qquad (2.9)$$

де $f(M)$ − значення функції $z = f(x;y)$ в довільній точці $M(x;y)$, яка належить вектору $\vec{a} = (a_x; a_y)$;

$f(M_0)$ − значення функції $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$;

ΔS − відстань між точками M_0 і M.

Для обчислення цієї похідної користуються формулою

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta, \qquad (2.10)$$

де α, β − кути, утворені вектором $\vec{a} = (a_x; a_y)$ з осями OX та OY відповідно.

Нагадаємо, що напрямні косинуси цих кутів визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad (2.11)$$

де a_x, a_y − проекції вектора $\vec{a}$ на осі OX, OY;

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ − модуль вектора $\vec{a}$.

Зауваження. Похідна функції за даним напрямом характеризує швидкість зміни функції в цьому напрямі.

Приклад 6. Знайти похідну функції $Z(x;y) = x^4 + 3y^3 + 7xy - 16x$ в точці $M_0(1;-1)$ за напрямом вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

Розв'язання. Функція $Z(x;y) = x^4 + 3y^3 + 7xy - 16x$ визначена на всій площині XOY, тобто $D(Z):(x;y) \in R^2$.

Знайдемо частинні похідні:

$$Z'_x(x;y) = 4x^3 + 7y - 16, \quad Z'_y(x;y) = 9y^2 + 7x.$$

Обчислюємо їхні значення в точці $M_0(1;-1)$:

$$Z'_x(M_0) = Z'_x(1;-1) = 4\cdot 1^3 + 7\cdot(-1) - 16 = -19,$$
$$Z'_y(M_0) = Z'_y(1;-1) = 9\cdot(-1)^2 + 7\cdot 1 = 16.$$

За формулами (2.11) обчислюємо

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Використовуючи формулу (2.10), отримаємо

$$\frac{\partial Z(M_0)}{\partial \vec{a}} = -19\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 16\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-19+32}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Оскільки $\frac{\partial Z(M_0)}{\partial \vec{a}} > 0$, то функція $Z(x;y) = x^4 + 3y^3 + 7xy - 16x$ в напрямі вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ зростає.

Відповідь: $\frac{\partial Z(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$.

Визначення. *Градієнтом* функції $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних в точці $M_0(x_0;y_0)$, тобто

$$\operatorname{grad} Z(M_0) = z'_x(M_0)\vec{i} + z'_y(M_0)\vec{j}. \tag{2.12}$$

Зауваження. Градієнт визначає напрям максимальної швидкості зростання функції.

Приклад 7. За умовою прикладу 6 обчислити $\operatorname{grad} Z(M_0)$.

Розв'язання. Враховуючи отримані обчислення в прикладі 6, за формулою (2.12) маємо

$$\operatorname{grad} Z(M_0) = \operatorname{grad} Z(1;-1) = -19\vec{i} + 16\vec{j} = (-19;16).$$

Відповідь: $\operatorname{grad} Z(M_0) = -19\vec{i} + 16\vec{j} = (-19;16)$.

Список літератури

1 Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. Київ: Національна академія управління, 1997. 397 с.

2 Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: навч. посіб.: у 2 ч. Київ: КНЕУ, 2001. Ч. 1. 546 с.

3 Васильченко І. П. Вища математика для економістів: підручник. Київ: Знання–Прес, 2002. 454 с.

4 Вища математика: підручник у 2 кн. Кн. 1. Основні розділи / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с.

5 Вища математика: підручник у 2 кн. Кн. 2. Основні розділи / за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 368 с.

6 Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ: А.С.К., 2001. 648 с.

7 Неміщ В. М., Процик А. І., Березька К. М. Вища математика (практикум): навч. посіб. Тернопіль: Економічна думка, 2001. 266 с.

8 Коваленко Л. Б., Станішевський С. О. Збірник тестових завдань для менеджерів: навч. посіб. Харків: ХНАМГ, 2010. 423 с.

9 Юрчак Н. С., Волохова Н. І., Панченко Н. Г. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Харків: УкрДАЗТ, 2009. 86 с.

Н. Г. Панченко, М. Є. Резуненко

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Частина 2

Відповідальний за випуск Панченко Н. Г.

Редактор Третьякова К. А.

Підписано до друку 19.06.20 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк. арк. 2,5. Тираж 10. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.