№755

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до розрахунково-графічної роботи
з дисципліни

«*ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА*»

Харків - 2012

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики від 30 травня 2011 року, протокол № 8.

Методичні вказівки призначено для студентів факультету УПП денної і заочної форми навчання.

Укладачі:
доценти Н.Г. Панченко,
М.Є. Резуненко,
старші викладачі Л.О. Балака,
А.П. Рибалко

Рецензент
доц. О.А. Осмаєв

ВСТУП

Методичні вказівки розроблені для використання студентами другого курсу факультету «Управління процесами перевезень» при виконанні розрахунково-графічної роботи при вивченні курсу теорії ймовірностей та математичної статистики. Методичні вказівки містять теоретичний матеріал, завдання та приклад виконання розрахунково-графічної роботи.

Математична статистика вивчає закономірності, яким підлягають масові випадкові явища, за допомогою методів теорії ймовірностей. Методи математичної статистики дозволяють знаходити оцінки невідомих імовірнісних характеристик спостереженої випадкової величини, закони розподілу та їх параметри виходячи лише з емпіричних даних. Однією з основних задач математичної статистики є висунення та перевірка гіпотез про вигляд невідомого розподілу спостереженої випадкової величини.

Метою даної розрахунково-графічної роботи є вивчення основних методів аналізу статистичних даних, оволодіння методом Пірсона перевірки статистичних гіпотез та застосування його до різних видів розподілів.

Варіаційний ряд

Нехай X − випадкова величина, що вивчається. Множина значень, отриманих в результаті n експериментів, називається *вибірковою сукупністю* або *вибіркою.* Кількість n об’єктів вибірки називається *об’ємом.*

Спостережені значення називаються *варіантами* ознаки X, а їх послідовність у порядку зростання називається *варіаційним рядом.*

Кількість спостережень n_i варіанти x_i називається *частотою* варіанти x_i, а величина $w_i = \frac{n_i}{n}$ − *відносною частотою* варіанти x_i. З цих означень випливає

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n, \qquad \sum_{i=1}^{k} w_i = 1$$

(k − кількість різних варіант).

Якщо число варіант досить велике або ж вивчається неперервна ознака X, то варіаційний ряд розподілу стає незручним для користування. У цьому випадку на основі варіаційного ряду розподілу складають *інтервальний ряд розподілу*. Для цього інтервал, на якому знаходяться всі значення ознаки, що спостерігається, розбивають на декілька часткових інтервалів довжиною h і для кожного інтервалу знаходять суму частот n_j варіант, що потрапили в j-й інтервал. Довжину часткового інтервалу h потрібно вибирати так, щоб побудований ряд не був занадто громіздким і в той же час дозволяв виявити характерні риси зміни значень випадкової величини, що вивчається.

Побудова інтервального ряду розподілу здійснюється так:

1) визначають *розмах варіації* R за формулою

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \tag{1}$$

де $x_{\min}, x_{\max}$ – найменша та найбільша варіанти відповідно;

2) обирають число інтервалів s за *формулою Стерджеса*

$$s = 1 + 3{,}322 \lg n, \tag{2}$$

де n – об'єм вибірки; у випадку дробової правої частини (2) вона округляється до цілого числа, зазвичай, більшого;

3) інтервал зміни значень ознаки ділять на s однакових інтервалів довжини

$$h = \frac{R}{s}; \tag{3}$$

4) відносять до кожного інтервалу відповідні варіанти та вказують відповідні суми частот цих варіант.

Інтервальний ряд розподілу можна подати у такому вигляді:

інтервали	$x_1 \div x'_2$	$x'_2 \div x'_3$	$x'_3 \div x'_4$	$\dots$	$x'_s \div x'_{s+1}$
інтервальна частота, n_j	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_s

де n_j – сума частот варіант, що потрапили до j-го інтервалу. Очевидно, $\sum\limits_{j=1}^{s} n_j = n.$

Зауваження. Якщо варіанта потрапляє на межу інтервалу, то її включають лише один раз до лівого чи правого інтервалу.

Емпірична функція розподілу

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називається функція $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \qquad (4)$$

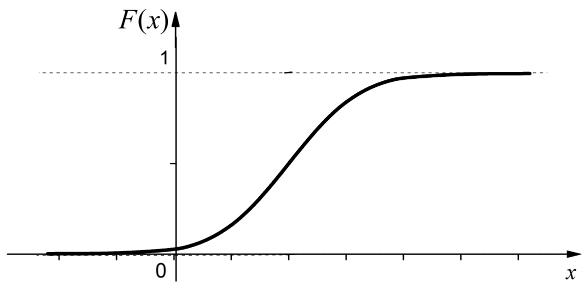
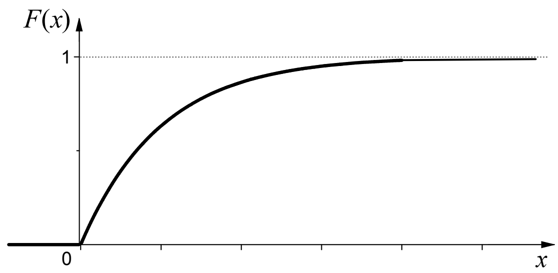
де n_x – сумарна частота варіант, які менше від x, n – об'єм вибірки.

Інтегральна функція розподілу $F(x) = P(X < x)$ генеральної сукупності у математичній статистиці називається *теоретичною функцією* розподілу. Вона відрізняється від емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ тим, що визначає ймовірність події $X < x$, а не її відносну частоту. Оскільки відносна частота при $n \to +\infty$ прямує до ймовірності цієї події, то значення функцій $F(x)$ та $F^*(x)$ мало відрізняються. Таким чином емпірична функція розподілу служить оцінкою теоретичної функції розподілу.

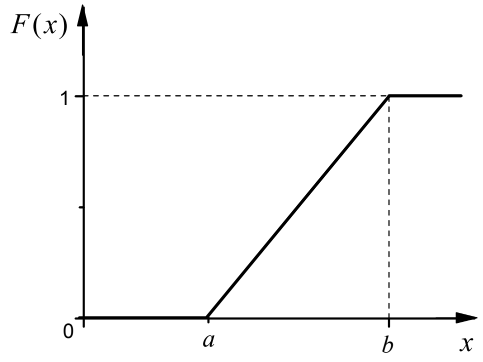
У випадку спостереження неперервної випадкової величини емпіричну функцію будують за інтервальним рядом розподілу вибірки. Оскільки при групуванні даних інформація про точні значення варіант губиться, емпіричну функцію розподілу будують наближено. Для цього за формулою (4) обчислюються значення $F^*(x'_j)$ в граничних точках інтервалів згрупованого ряду, після чого точки площини з координатами $\left(x'_j; F^*(x'_j)\right)$ з'єднуються відрізками прямих. Згідно з властивостями емпіричної функції розподілу, додатково вважається: $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le x_{\min}, \\ 1 & \text{при } x > x_{\max}. \end{cases}$ Побудована таким чином наближена емпірична функція є неперервною.

При виконанні розрахунково-графічної роботи ми порівнюємо заданий емпіричний розподіл з теоретичними трьох видів: нормальним, показниковим та рівномірним. Для порівняння вигляду емпіричної функції розподілу з графіками інтегральних функцій теоретичних розподілів нагадаємо їх вигляд у таблиці 1.

Таблиця 1

Функція розподілу $F(x)$	Графік функції розподілу
Нормальний розподіл $N(a;\sigma)$: $$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$$ $(a \in R,\ \sigma > 0)$	
Показниковий розподіл $E(\lambda)$: $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0, \end{cases}$$ $(\lambda > 0)$	

Продовження таблиці 1

Функція розподілу $F(x)$	Графік функції розподілу
Рівномірний розподіл $U(a;b)$: $$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a\le x\le b,\\ 1 & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$ $(a,b\in R)$	

Гістограма

У випадку, коли спостерігається неперервна ознака, то графічним зображенням відповідного статистичного розподілу служить гістограма.

Гістограмою частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант довжиною h, а висоти дорівнюють $\frac{n_j}{h}$ (щільність частоти).

Гістограмою відносних частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант, а висоти дорівнюють $\frac{w_j}{h}$ (щільність відносної частоти).

З означень випливає, що площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки, а площа гістограми відносних частот – одиниці.

Схема побудови гістограми

1 Знайти інтервал $(A;B)$, що містить всі спостережені значення, тобто $A<x_{\min}$; $x_{\max}<B$.

2 За формулою Стерджеса (2) знайти кількість s часткових інтервалів.

3 Обчислити довжину часткового інтервалу за формулою

$$h = \frac{B - A}{s}. \tag{5}$$

4 Розбити $(A; B)$ на s часткових інтервалів $(a_j; b_j)$ довжини h частот (додаючи до кінця попереднього інтервалу довжину h).

5 Знайти інтервальні частоти n_j, тобто кількість значень ознаки, що потрапили в кожний частковий інтервал.

6 На кожному частковому інтервалі як на основі побудувати прямокутник висотою:

$$H_j = \frac{n_j}{h} \quad \text{для гістограми частот;} \tag{6}$$

$$W_j = \frac{w_j}{h} = \frac{n_j}{nh} \quad \text{для гістограми відносних частот.}$$

Зауваження. Якщо варіанта потрапляє на границю між інтервалами, то її включають лише до одного з них.

Вигляд гістограми відносних частот дає уявлення про щільність імовірностей випадкової величини, яку досліджують. Гістограма відносних частот – це наближений графік щільності ймовірностей випадкової величини, тобто наближений графік диференціальної функції її розподілу.

При виконанні розрахунково-графічної роботи ми порівнюємо заданий емпіричний розподіл з теоретичними трьох видів: нормальним, показниковим та рівномірним. Для порівняння вигляду гістограми з графіками щільностей відповідних розподілів нагадаємо їх вигляд у таблиці 2.

Числові характеристики вибіркової сукупності

Розглянутий варіаційний ряд та емпірична функція дають вичерпну характеристику статистичних даних. Проте іноді достатньо знати лише окремі ознаки даного варіаційного ряду. Числа, які є кількісним виразом таких ознак, називаються *числовими характеристиками вибірки*.

До основних числових характеристик вибірки належать: *вибіркова середня, вибіркова дисперсія та вибіркове середнє квадратичне відхилення*. Ці числові характеристики ознаки X проведеної вибірки є аналогами відповідно математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкової величини X.

Вибірковою середньою ознаки X вибірки називається середнє арифметичне усіх варіант, яке обчислюється за формулою

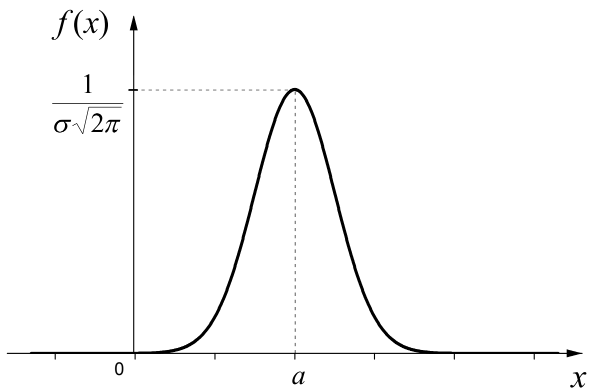
$$\overline{x}_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{7}$$

Вибіркова середня є незміщеною оцінкою математичного сподівання.

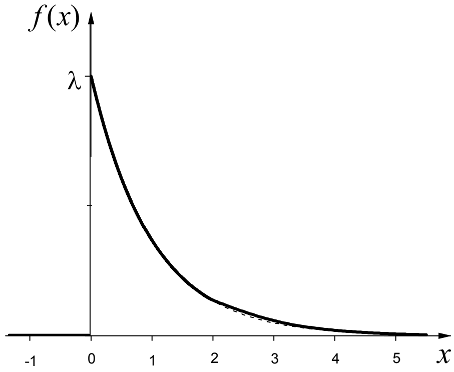
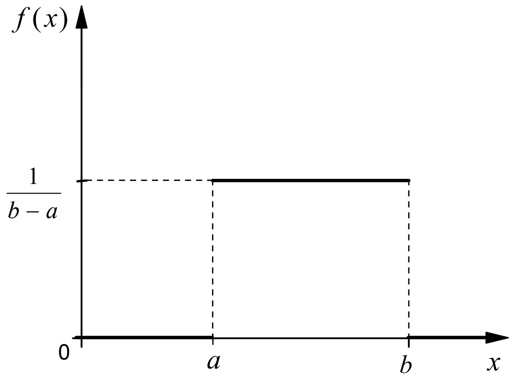
Вибірковою дисперсією $D_в$ називається число, яке дорівнює середньому арифметичному квадратів відхилень варіант від вибіркової середньої

$$D_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_в\right)^2. \tag{8}$$

Таблиця 2

Щільність розподілу $f(x)$	Графік щільності розподілу
Нормальний розподіл $N(a;\sigma)$: $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$ ($a \in R$, $\sigma > 0$)	

Продовження таблиці 2

Щільність розподілу $f(x)$	Графік щільності розподілу
Показниковий розподіл $E(\lambda)$: $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ $(\lambda>0)$	
Рівномірний розподіл $U(a;b)$: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in[a;b],\\ 0 & \text{при } x\notin[a;b].\end{cases}$ $(a,b\in R)$	

Для обчислення вибіркової дисперсії можна також скористатись формулою

$$D_в=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\bar{x}_в\right)^2. \tag{9}$$

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням називається квадратний корінь з вибіркової дисперсії

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}. \tag{10}$$

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою дисперсії $D(X)$. Щоб ліквідувати це зміщення, слід ввести поправку. *Виправленою вибірковою дисперсією* називають величину

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в. \tag{11}$$

Вона є незміщеною оцінкою для $D(X)$. Величина $s = \sqrt{s^2}$ називається *виправленим середнім квадратичним відхиленням* і є незміщеною оцінкою для $\sigma(X)$.

Перевірка статистичних гіпотез

Часто на практиці необхідно знати закон розподілу випадкової величини X. Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави вважати, що він має вигляд $F(x)$(інтегральна функція) або $f(x)$ (щільність розподілу), то *висувають гіпотезу*: випадкова величина X розподілена за законом $F(x)$ або $f(x)$.

Статистичною гіпотезою називають будь-яке твердження про вигляд або властивості розподілу випадкової величини, що спостерігається. *Нульовою (основною)* називають висунуту гіпотезу H_0. *Конкуруючою (альтернативною)* називають гіпотезу H_1, яка суперечить нульовій.

Вибір нульової гіпотези повністю покладається на дослідника і залежить від постановки задачі. Математична статистика пропонує лише методи перевірки статистичних гіпотез. Зміст методів перевірки такий: якщо приймається гіпотеза H_0, то відхиляється H_1, і навпаки.

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціальні *статистичні критерії* – величини, обчислені на основі спостережень, в залежності від значення яких нульову гіпотезу приймають або відхиляють.

Для перевірки гіпотези про розподіл генеральної сукупності розроблено декілька критеріїв згоди. Найчастіше використовується так званий критерій згоди «хі – квадрат» (χ^2) Пірсона, суть якого полягає у порівнянні емпіричних і теоретичних частот.

Етапи перевірки гіпотези за допомогою критерію Пірсона

1 Задаємось рівнем значущості α. (α дорівнює ймовірності відхилення правильної гіпотези, тому зазвичай приймається рівним 0,01; 0,05…)

2 Інтервал спостережених значень $(A;B)$ розбиваємо на s часткових інтервалів $(a_j;b_j)$ та знаходимо емпіричні інтервальні частоти n_j.

3 Для кожного часткового інтервалу обчислюємо його теоретичну частоту n'_j за формулою

$$n'_j = np_j, \tag{12}$$

де n − об'єм вибірки, p_j− ймовірність попадання в частковий інтервал $(a_j;b_j)$.

Зауваження 1. Формула обчислення ймовірності p_j залежить від того, який вигляд має теоретичний розподіл згідно з висунутою гіпотезою.

Зауваження 2. Очевидно, для p_j та n'_j повинні виконуватись умови: $\sum_{j=1}^{s} n'_j = n$, $\sum_{j=1}^{s} p_j = 1$. Розбіжності внаслідок наближених розрахунків необхідно усунути.

4 Обчислюємо *критерій (статистику) Пірсона*

$$\chi^2_{спост} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_j - n'_j\right)^2}{n'_j}, \tag{13}$$

де n_j – емпіричні (обчислені за вибіркою), а n'_j – теоретичні частоти.

5 Знаходимо число степеней вільності

$$k = s - 1 - r, \tag{14}$$

де s − кількість часткових інтервалів, r – число параметрів розподілу генеральної сукупності, що оцінюються за вибіркою.

6 За заданим рівнем значущості α і числом степенів вільності k, за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (додаток Б) знаходимо критичну точку критерію $\chi^2_{кр}$.

7 Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$, то гіпотеза H_0 про вигляд розподілу приймається; якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Зауваження 1. Для застосування критерію згоди Пірсона потрібно, щоб об'єм вибірки був достатньо великим: $n \geq 50$.

Зауваження 2. Необхідною умовою застосування критерію χ^2 Пірсона є наявність у кожному з інтервалів не менш ніж 5 спостережень (тобто $n_j \geq 5, j = 1,2,...,s$). Якщо в окремих інтервалах частота спостережень менш ніж 5, то потрібно об'єднати такі інтервали з сусідніми, зменшуючи загальну кількість інтервалів.

При перевірці гіпотез про різні види теоретичних розподілів виникають розбіжності у розрахунках. Розглянемо основні з них.

Обчислення критерію χ^2 для нормального розподілу

1 Нормальний закон розподілу має два параметри a і σ (математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X). Оскільки вони невідомі, тому визначаємо їх за вибіркою незміщеними й обґрунтованими оцінками $\overline{x}_в$ та виправленим середнім квадратичним відхиленням s відповідно

$$a \approx \overline{x}_в, \quad \sigma \approx s. \tag{15}$$

2 Для обчислення ймовірностей p_j попадання випадкової величини X в інтервал $(a_j; b_j)$ використовуємо функцію Лапласа (додаток А):

$$p_j = P\left(a_j < X < b_j\right) = \Phi\left(\frac{b_j - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_j - a}{\sigma}\right). \tag{16}$$

3 Оскільки за вибіркою обчислено два параметри a і σ теоретичного розподілу ($r=2$), то число степенів вільності дорівнює

$$k = s - 1 - r = s - 3. \qquad (17)$$

Обчислення χ^2 для показникового розподілу

1 Показниковий закон розподілу має єдиний параметр $\lambda = \dfrac{1}{M(X)}$. Тому оцінка цього параметра визначається формулою

$$\lambda \approx \frac{1}{\bar{x}_в}, \qquad (18)$$

де $\bar{x}_в$ − вибіркова середня.

2 Теоретична ймовірність p_j попадання випадкової величини X, розподіленої за показниковим законом, в j-й інтервал визначається за формулою

$$p_j = P\left(a_j < X < b_j\right) = e^{-\lambda a_j} - e^{-\lambda b_j}, \quad j = 1,...,s. \qquad (19)$$

3 Оскільки за вибіркою обчислено один параметр λ теоретичного розподілу ($r=1$), то число степенів вільності дорівнює

$$k = s - 1 - r = s - 2. \qquad (20)$$

Обчислення χ^2 для рівномірного розподілу.

1 Рівномірний закон розподілу має два параметри a і b − кінці сегмента розподілу. Визначаємо їх за вибіркою за допомогою формул

$$a \approx \bar{x}_в - s\sqrt{3}; \quad b \approx \bar{x}_в + s\sqrt{3}, \qquad (21)$$

де $\bar{x}_в$ − вибіркова середня, s − виправлене середнє квадратичне відхилення

2 Ймовірність p_j попадання випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом, в j-й інтервал обчислюється за формулою

$$p_j = P\left(a_j < X < b_j\right) = \frac{b_j - a_j}{b - a}, \quad j = 1,...,s. \tag{22}$$

3 Оскільки за вибіркою обчислено два параметри a і b теоретичного розподілу ($r = 2$), то число степенів вільності дорівнює

$$k = s - 1 - r = s - 3. \tag{23}$$

План виконання розрахунково-графічної роботи

1 За даними спостережень скласти варіаційний ряд, розташовуючи варіанти в порядку зростання.

2 Скласти інтервальний ряд та побудувати емпіричну функцію розподілу.

3 Побудувати гістограму та проаналізувати її вигляд.

4 Обчислити числові характеристики вибірки. За їх допомогою знайти точкові оцінки параметрів розподілу.

5 Перевірити гіпотезу про розподіл спостереженої ознаки за допомогою критерію Пірсона.

Приклад виконання розрахунково-графічної роботи

Завдання 1 Задано вибірку, що отримана в результаті спостереження ознаки X. Провести повний статистичний аналіз даних та при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про **нормальний** розподіл генеральної сукупності за критерієм згоди Пірсона.

5,50	7,52	6,59	7,40	6,91	3,30	5,56	5,09	6,49
0,88	9,82	4,24	2,79	9,02	8,59	6,70	4,50	4,12
6,81	4,19	4,88	5,23	7,41	5,07	6,48	6,06	2,07
4,62	0,83	9,82	3,75	3,57	4,11	7,43	7,03	9,75
1,85	3,94	6,69	5,69	6,08	8,90	5,04	4,27	8,60
1,51	5,87	4,65	3,59	4,90	6,35	4,47	4,35	6,06
4,39	3,03	5,72	4,93	1,16	5,41			

Виконання

1 Складаємо варіаційний ряд, розташувавши спостережені значення у порядку зростання

0,83	0,88	1,16	1,51	1,85	2,07	2,79	3,03	3,30
3,57	3,59	3,75	3,94	4,11	4,12	4,19	4,24	4,27
4,35	4,39	4,47	4,50	4,62	4,65	4,88	4,90	4,93
5,04	5,07	5,09	5,23	5,41	5,50	5,56	5,69	5,72
5,87	6,06	6,06	6,08	6,35	6,48	6,49	6,59	6,69
6,70	6,81	6,91	7,03	7,40	7,41	7,43	7,52	8,59
8,60	8,90	9,02	9,75	9,82	9,82			

Об'єм даної вибірки (загальна кількість значень) дорівнює $n = 60$. Частоти варіант 6,06 та 9,82 дорівнюють 2, усі інші варіанти мають частоту 1. Найменша варіанта дорівнює $x_{\min} = 0{,}83$, найбільша − $x_{\max} = 9{,}82$.

2 Будуємо інтервальний ряд розподілу. По-перше, обчислюємо розмах варіації за формулою (1)

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 9{,}82 - 0{,}83 = 8{,}99.$$

За формулою Стерджеса (2) знаходимо кількість часткових інтервалів. Оскільки $1 + 3{,}322\lg n = 1 + 3{,}322\lg 60 \approx 6{,}91$, то, округляючи до більшого цілого числа, отримаємо $s = 7$.

За формулою (3) обчислюємо довжину часткового інтервалу

$$h = \frac{R}{s} = \frac{8{,}99}{7} = 1{,}2843.$$

Тепер формуємо інтервали (додаємо h до кінця попереднього інтервалу, починаючи з найменшої варіанти $x_{\min}$) і обчислюємо кількість спостережених значень, які потрапили до них, − інтервальні частоти n_j.

Для побудови емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ за формулою (4) знаходимо її значення в граничних точках інтервалів

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0{,}83, \\ \frac{6}{60} = 0{,}1 & \text{при} \quad x = 2{,}1143, \\ \frac{6+3}{60} = \frac{9}{60} = 0{,}15 & \text{при} \quad x = 3{,}3986, \\ \frac{9+15}{60} = \frac{24}{60} = 0{,}4 & \text{при} \quad x = 4{,}6829, \\ \frac{24+13}{60} = \frac{37}{60} = 0{,}62 & \text{при} \quad x = 5{,}9672, \\ \frac{37+12}{60} = \frac{49}{60} = 0{,}82 & \text{при} \quad x = 7{,}2515, \\ \frac{49+4}{60} = \frac{53}{60} = 0{,}88 & \text{при} \quad x = 8{,}5358. \end{cases}$$

Усі одержані за інтервальним рядом розрахунки заносимо до таблиці 3.

Таблиця 3

№ j	інтервал $(x'_j; x'_{j+1})$	інтервальна частота, n_j	$F^*(x'_j) = \frac{n_x}{n}$	$\left(x'_j; F^*(x'_j)\right)$
1	(0,8300; 2,1143)	6	0	(0,8300; 0)
2	(2,1143; 3,3986)	3	0,1	(2,1143; 0,1)
3	(3,3986; 4,6829)	15	0,15	(3,3986; 0,15)
4	(4,6829; 5,9672)	13	0,4	(4,6829; 0,4)
5	(5,9672; 7,2515)	12	0,62	(5,9672; 0,62)
6	(7,2515; 8,5358)	4	0,82	(7,2515; 0,82)
7	(8,5358; 9,8200)	7	0,88	(8,5358; 0,88)

Побудуємо емпіричну функцію розподілу. Для цього з’єднаємо точки площини з координатами $\left(x'_j; F^*(x'_j)\right)$ відрізками прямих (рисунок 1). Додатково вважаємо: $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0{,}83, \\ 1 & \text{при } x > 9{,}82. \end{cases}$

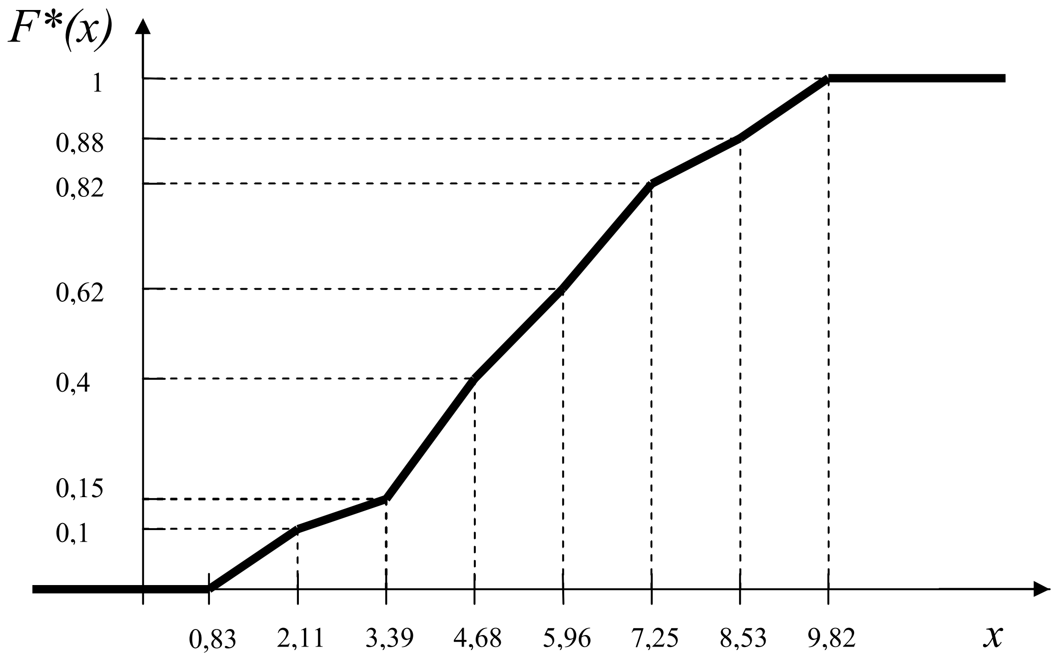


Рисунок 1 – Графік емпіричної функції розподілу

Бачимо, що графік наближеної емпіричної функції розподілу схожий на графік інтегральної функції нормального розподілу (див. таблицю 1).

3 Побудуємо гістограми частот та відносних частот.

Як інтервал, що містить всі варіанти, візьмемо інтервал $(A;B)=(0{,}81;9{,}84)$ $(0{,}81 < x_{\min};\ \ x_{\max} < 9{,}84)$. Розіб’ємо його на $s=7$ часткових інтервалів, довжина яких знаходиться за формулою (5):

$$h = \frac{B-A}{s} = 1{,}29 .$$

Формуємо часткові інтервали, обчислюємо інтервальні частоти та висоти прямокутників за формулами (6). Результати заносимо до таблиці 4.

Таблиця 4

№ j	інтервал	інтервальна частота, n_j	$H_j = \frac{n_j}{h}$	$W_j = \frac{n_j}{nh}$
1	(0,81; 2,10)	6	4,65	0,08
2	(2,10; 3,39)	3	2,33	0,04
3	(3,39; 4,68)	15	11,65	0,19
4	(4,68; 5,97)	13	10,08	0,17
5	(5,97; 7,26)	12	9,32	0,16
6	(7,26; 8,55)	4	3,11	0,05
7	(8,55; 9,84)	7	5,43	0,09

На рисунках 2 і 3 зображено гістограми частот і відносних частот, що побудовані за одержаними даними.

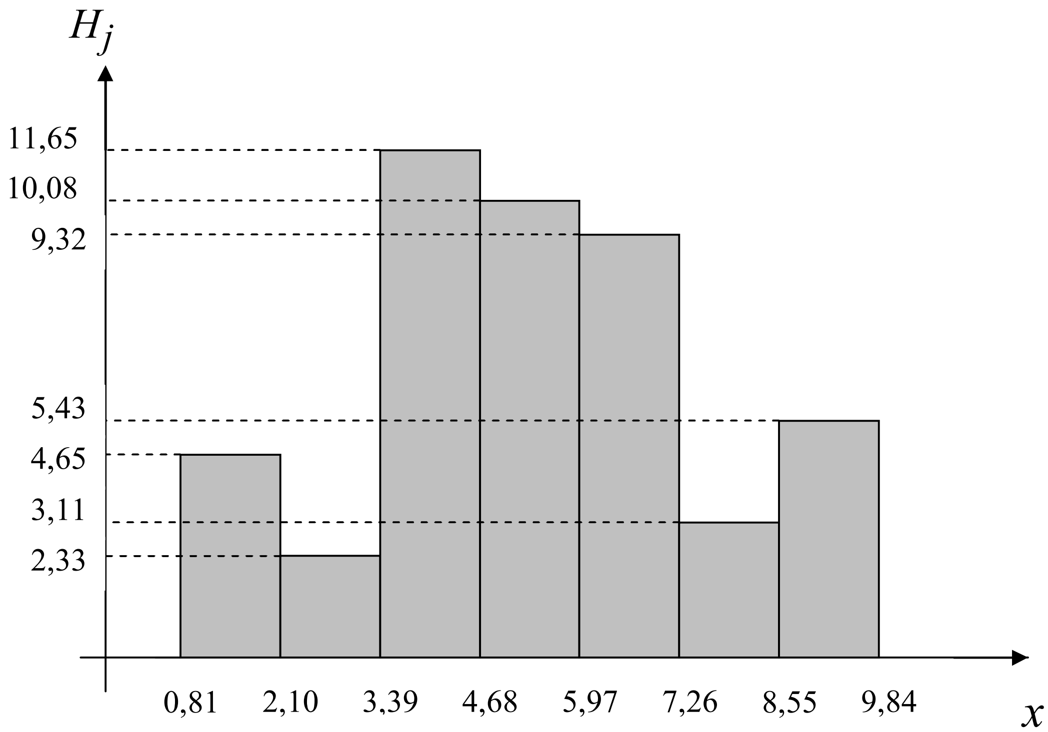


Рисунок 2 – Гістограма частот

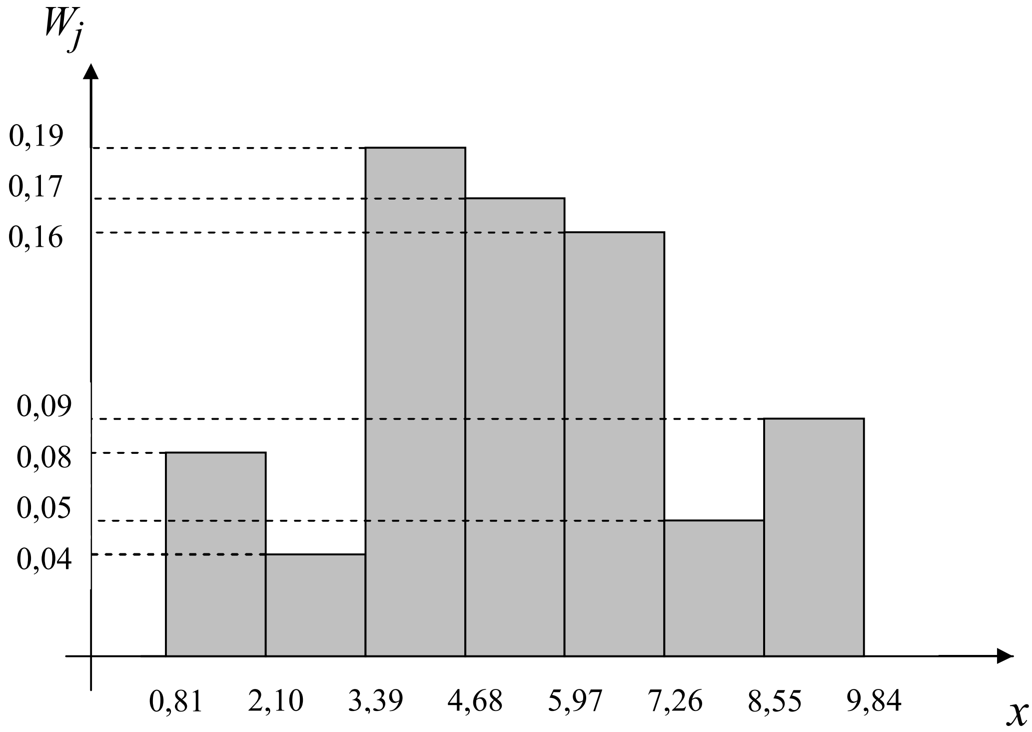


Рисунок 3 – Гістограма відносних частот

Бачимо, що форма гістограми нагадує графік щільності нормального розподілу (див. таблицю 2).

4 Знаходимо числові характеристики варіаційного ряду за формулами (7)−(11).

Вибіркова середня

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{60}\cdot(0{,}83+0{,}88+1{,}16+1{,}51+1{,}85+2{,}07+2{,}79+3{,}03+3{,}30+$$
$$+3{,}57+3{,}59+3{,}75+3{,}94+4{,}11+4{,}12+4{,}19+4{,}24+4{,}27+4{,}35+4{,}39+$$
$$+4{,}47+4{,}50+4{,}62+4{,}65+4{,}88+4{,}90+4{,}93+5{,}04+5{,}07+5{,}09+5{,}23+$$
$$+5{,}41+5{,}50+5{,}56+5{,}69+5{,}72+5{,}87+6{,}06+6{,}06+6{,}08+6{,}35+6{,}48+$$
$$+6{,}49+6{,}59+6{,}69+6{,}70+6{,}81+6{,}91+7{,}03+7{,}40+7{,}41+7{,}43+7{,}52+$$
$$+8{,}59+8{,}60+8{,}90+9{,}02+9{,}75+9{,}82+9{,}82) \approx 5{,}3597.$$

Вибіркова дисперсія

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \frac{1}{60}\cdot((0{,}83)^2+(0{,}88)^2+(1{,}16)^2+(1{,}51)^2+(1{,}85)^2+$$
$$+(2{,}07)^2+(2{,}79)^2+(3{,}03)^2+(3{,}30)^2+(3{,}57)^2+(3{,}59)^2+(3{,}75)^2+(3{,}94)^2+$$
$$+(4{,}11)^2+(4{,}12)^2+(4{,}19)^2+(4{,}24)^2+(4{,}27)^2+(4{,}35)^2+(4{,}39)^2+(4{,}47)^2+$$
$$+(4{,}50)^2+(4{,}62)^2+(4{,}65)^2+(4{,}88)^2+(4{,}90)^2+(4{,}93)^2+(5{,}04)^2+(5{,}07)^2+$$
$$+(5{,}09)^2+(5{,}23)^2+(5{,}41)^2+(5{,}50)^2+(5{,}56)^2+(5{,}69)^2+(5{,}72)^2+(5{,}87)^2+$$
$$+(6{,}06)^2+(6{,}06)^2+(6{,}08)^2+(6{,}35)^2+(6{,}48)^2+(6{,}49)^2+(6{,}59)^2+(6{,}69)^2+$$
$$+(6{,}70)^2+(6{,}81)^2+(6{,}91)^2+(7{,}03)^2+(7{,}40)^2+(7{,}41)^2+(7{,}43)^2+(7{,}52)^2+$$
$$+(8{,}59)^2+(8{,}60)^2+(8{,}90)^2+(9{,}02)^2+(9{,}75)^2+(9{,}82)^2+(9{,}82)^2)-$$
$$-(5{,}3597)^2 \approx 4{,}6134.$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx 2{,}1479.$$

Виправлена вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_в = \frac{60}{59}\cdot 4{,}6134 \approx 4{,}6916.$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{s^2} \approx 2{,}1666.$$

Оскільки вибіркова середня та виправлене середнє квадратичне відхилення є незміщеними оцінками математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення, згідно з (15), беремо їх як точкові оцінки невідомих параметрів розподілу генеральної сукупності

$$a \approx 5{,}3597, \quad \sigma \approx 2{,}1666.$$

5 Перевіримо гіпотезу про нормальний розподіл спостереженої ознаки за допомогою критерію Пірсона.

По-перше, необхідно, щоб інтервальні частоти задовольняли умову $n_j \geq 5$. Для цього в нашому випадку потрібно об’єднати перший і другий інтервали, а також шостий і сьомий (таблиця 5).

Таблиця 5

j	Частковий інтервал $(a_j;b_j)$	Емпіричні частоти n_j	Імовірності попадання p_j	Теоретичні частоти $n'_j = n \cdot p_j$	$\frac{(n_j - n'_j)^2}{n'_j}$
1	$(-\infty;3{,}39)$	9	0,1814	10,884	0,3261
2	(3,39; 4,68)	15	0,2629	15,774	0,038
3	(4,68; 5,97)	13	0,1660	9,96	0,9279
4	(5,97; 7,26)	12	0,2003	12,018	0,00003
5	$(7{,}26;+\infty)$	11	0,1894	11,364	0,0117
$\sum$		60	1	60	1,3037

Для кожного з п'яти інтервалів $(a_j;b_j)$, $j=1,...,5$ одержаного розбиття обчислюємо:

− емпіричну частоту n_j інтервалу;

− імовірність p_j попадання в інтервал за формулою (16);

− теоретичну частоту n'_j за формулою (12);

− величину $\frac{(n_j - n'_j)^2}{n'_j}$ розбіжності частот.

Результати розрахунків заносимо до таблиці.

За формулою (13) отримали спостережуване значення критерію $\chi^2_{спост}$=1,3037.

Так як кількість інтервалів $s=5$, а кількість невідомих параметрів розподілу $r=2$, то за формулою (17) кількість степенів вільності дорівнює $k=5-2-1=2$.

За даним рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ та кількістю степенів вільності $k=2$ з додатка Б отримаємо $\chi^2_{кр}$=6,0.

Оскільки $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$, то гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності приймається.

Завдання 2. Задано вибірку, що отримана в результаті спостереження ознаки X. Провести повний статистичний аналіз даних та при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про **показниковий** розподіл генеральної сукупності за критерієм згоди Пірсона.

0,39	0,01	0,39	0,66	0,40	0,02	0,32	0,80	0,30
0,05	0,01	0,23	0,07	0,53	0,48	0,11	0,05	0,29
0,17	1,17	0,23	0,18	0,39	0,26	0,06	0,79	0,23
0,03	0,95	0,53	0,27	0,39	0,11	0,48	0,05	0,07
0,06	0,14	0,02	0,14	0,32	0,10	0,61	0,18	0,25
0,18	0,18	0,07	0,46	0,79	0,02	0,76	0,43	0,06
0,73	0,23	0,80	0,39	0,34	0,60			

Виконання

1 Складаємо варіаційний ряд, розташувавши спостережені значення у порядку зростання:

0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,05	0,05	0,05
0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,10	0,11	0,11
0,14	0,14	0,17	0,18	0,18	0,18	0,18	0,23	0,23
0,23	0,23	0,25	0,26	0,27	0,29	0,30	0,32	0,32
0,34	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,43	0,46
0,48	0,48	0,53	0,53	0,60	0,61	0,66	0,73	0,76
0,79	0,79	0,80	0,80	0,95	1,17			

Об'єм даної вибірки дорівнює $n = 60$. Найменша варіанта дорівнює $x_{\min} = 0{,}01$, найбільша − $x_{\max} = 1{,}17$.

2 Будуємо інтервальний ряд розподілу. По-перше, обчислюємо розмах варіації за формулою (1)

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1{,}17 - 0{,}01 = 1{,}16.$$

За формулою Стерджеса (2) знаходимо кількість часткових інтервалів. Оскільки $1 + 3{,}322\lg n = 1 + 3{,}322\lg 60 \approx 6{,}91$, то, округляючи до більшого цілого числа, отримаємо $s = 7$.

За формулою (3) обчислюємо довжину часткового інтервалу

$$h = \frac{R}{s} = \frac{1{,}16}{7} = 0{,}166.$$

Тепер формуємо інтервали (додаємо h до кінця попереднього інтервалу, починаючи з найменшої варіанти $x_{\min}$) і обчислюємо кількість спостережених значень, які потрапили до них, − інтервальні частоти n_j.

Для побудови емпіричної функції $F^*(x)$ розподілу за формулою (4) знаходимо її значення в граничних точках інтервалів

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0{,}01, \\ \frac{21}{60} = 0{,}35 & \text{при} \quad x = 0{,}176, \\ \frac{21+16}{60} = \frac{37}{60} = 0{,}62 & \text{при} \quad x = 0{,}342, \\ \frac{37+10}{60} = \frac{47}{60} = 0{,}78 & \text{при} \quad x = 0{,}508, \\ \frac{47+5}{60} = \frac{52}{60} = 0{,}87 & \text{при} \quad x = 0{,}674, \\ \frac{52+6}{60} = \frac{58}{60} = 0{,}97 & \text{при} \quad x = 0{,}839, \\ \frac{58+1}{60} = \frac{59}{60} = 0{,}98 & \text{при} \quad x = 1{,}004. \end{cases}$$

Усі одержані за інтервальним рядом розрахунки заносимо до таблиці 6.

Таблиця 6

№ j	інтервал $(x'_j; x'_{j+1})$	інтервальна частота, n_j	$F^*(x'_j) = \frac{n_x}{n}$	$\left(x'_j; F^*(x'_j)\right)$
1	(0,01; 0,176)	21	0	(0,01; 0)
2	(0,176; 0,342)	16	0,35	(0,176; 0,35)
3	(0,342; 0,508)	10	0,62	(0,342; 0,62)
4	(0,508; 0,674)	5	0,78	(0,508; 0,78)
5	(0,674; 0,839)	6	0,87	(0,674; 0,87)
6	(0,839; 1,004)	1	0,97	(0,839; 0,97)
7	(1,004; 1,17)	1	0,98	(1,004; 0,98)

Побудуємо емпіричну функцію розподілу. Для цього з'єднаємо точки площини з координатами $\left(x'_j; F^*(x'_j)\right)$ відрізками прямих (рисунок 4). Додатково вважаємо: $F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0{,}01,\\ 1 & \text{при } x>1{,}17.\end{cases}$

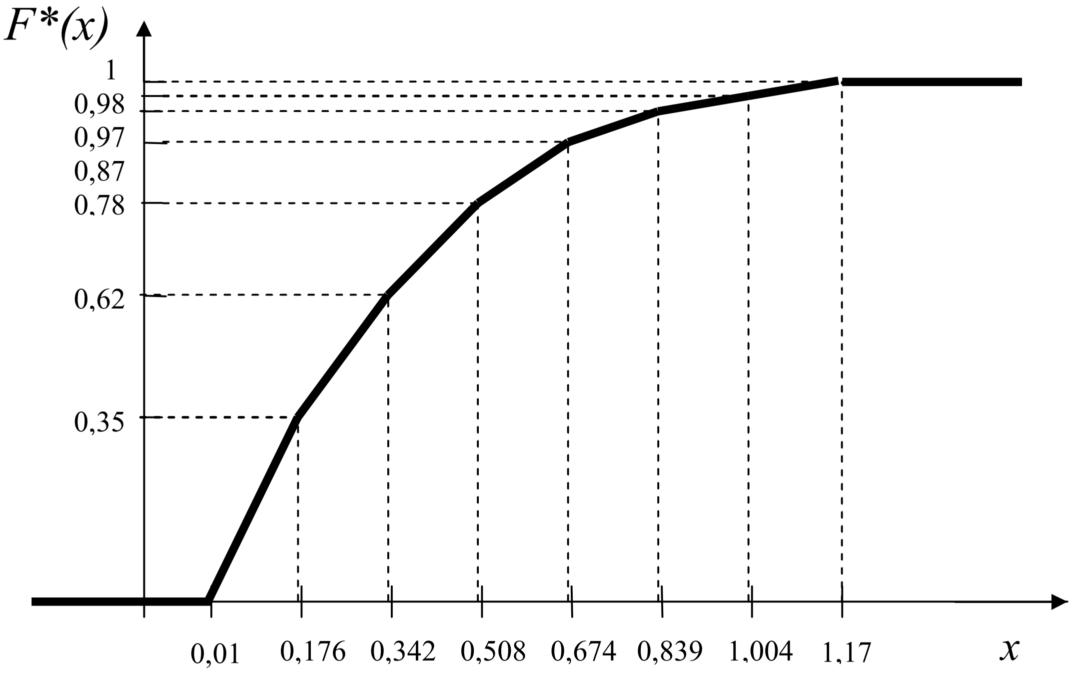


Рисунок 4 – Графік емпіричної функції розподілу

Бачимо, що графік наближеної емпіричної функції розподілу схожий на графік інтегральної функції показникового розподілу (див. таблицю 1).

3 Побудуємо гістограми частот та відносних частот.

Як інтервал, що містить всі варіанти, візьмемо інтервал $(A;B)=(0{,}006;1{,}175)$ $(0{,}006<x_{\min};\quad x_{\max}<1{,}175)$. Розіб’ємо його на $s=7$ часткових інтервалів, довжина яких знаходиться за формулою (5) $h=\dfrac{B-A}{s}=0{,}167$.

Формуємо часткові інтервали, обчислюємо інтервальні частоти та висоти прямокутників за формулами (6). Результати заносимо до таблиці 7.

Таблиця 7

№ j	інтервал	інтервальна частота, n_j	$H_j = \frac{n_j}{h}$	$W_j = \frac{n_j}{nh}$
1	(0,006; 0,173)	21	123,5	2,06
2	(0,173; 0,340)	16	94,1	1,57
3	(0,340; 0,507)	10	58,8	0,98
4	(0,507; 0,674)	5	29,4	0,49
5	(0,674; 0,841)	6	35,3	0,59
6	(0,841; 1,008)	1	5,9	0,1
7	(1,008; 1,175)	1	5,9	0,1

На рисунках 5 і 6 зображено гістограми частот і відносних частот, що побудовані за одержаними даними.

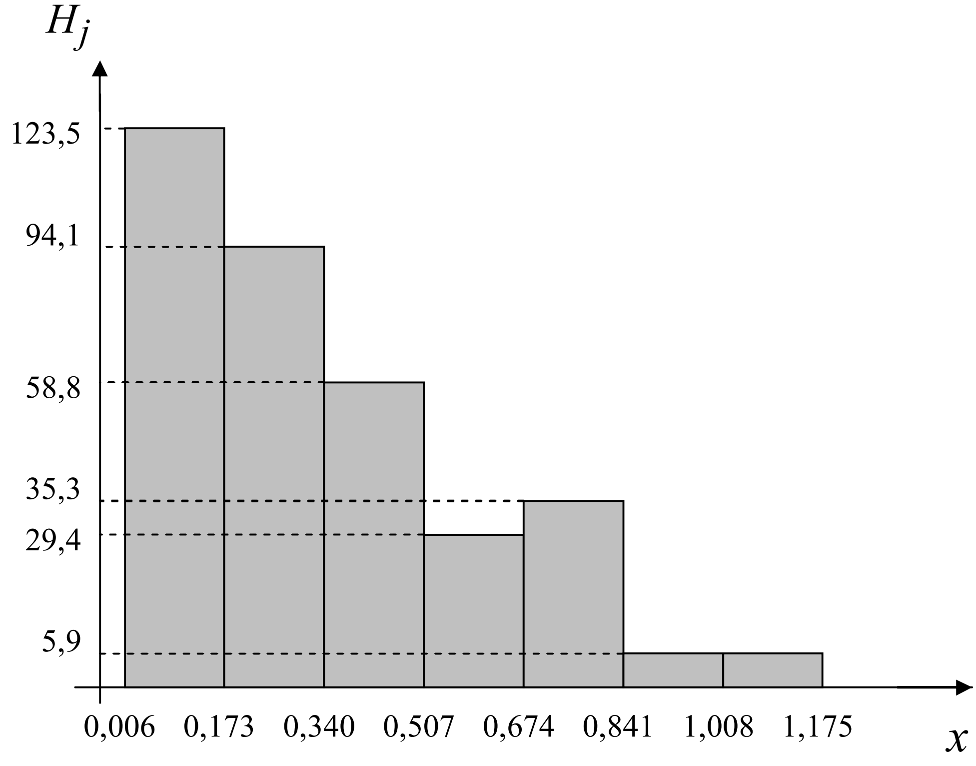


Рисунок 5 – Гістограма частот

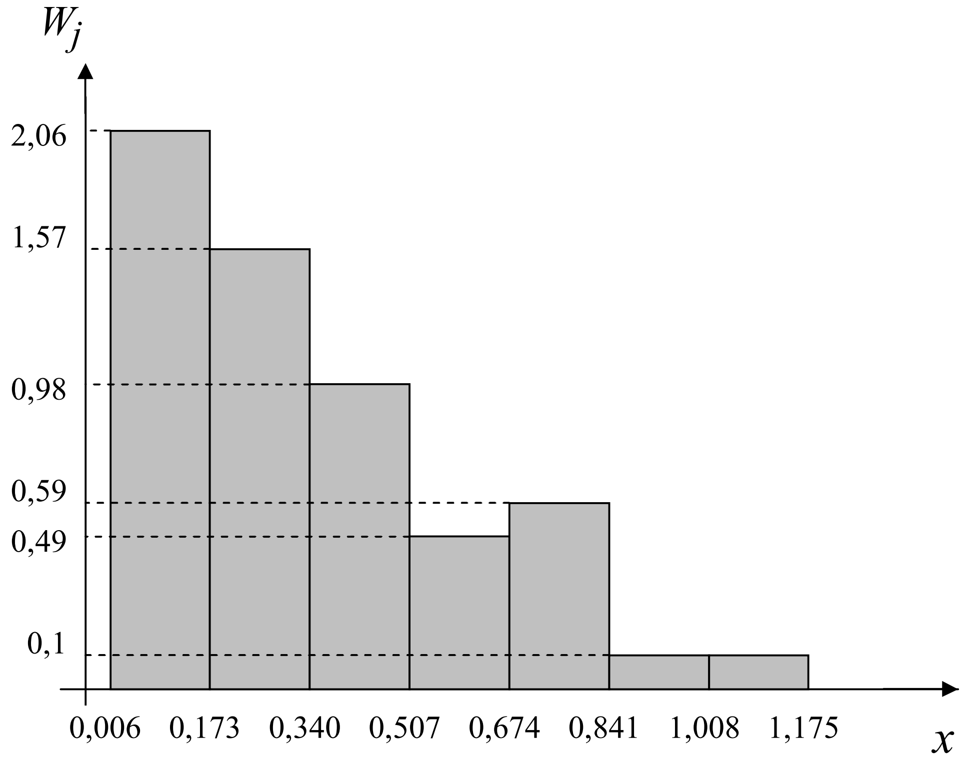


Рисунок 6 – Гістограма відносних частот

Бачимо, що форма гістограми нагадує графік щільності показникового розподілу (див. таблицю 2).

4 Знаходимо числові характеристики варіаційного ряду за формулами (7)−(11).

Вибіркова середня

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{60}\cdot(0{,}01+0{,}01+0{,}02+0{,}02+0{,}02+0{,}03+0{,}05+0{,}05+$$
$$+0{,}05+0{,}06+0{,}06+0{,}06+0{,}07+0{,}07+0{,}07+0{,}10+0{,}11+0{,}11+$$
$$+0{,}14+0{,}14+0{,}17+0{,}18+0{,}18+0{,}18+0{,}18+0{,}23+0{,}23+0{,}23+$$
$$+0{,}23+0{,}25+0{,}26+0{,}27+0{,}29+0{,}30+0{,}32+0{,}32+0{,}34+0{,}39+$$
$$+0{,}39+0{,}39+0{,}39+0{,}39+0{,}40+0{,}43+0{,}46+0{,}48+0{,}48+0{,}53+$$
$$+0{,}53+0{,}60+0{,}61+0{,}66+0{,}73+0{,}76+0{,}79+0{,}79+0{,}80+0{,}80+$$
$$+0{,}95+1{,}17)\approx 0{,}322.$$

Вибіркова дисперсія

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \frac{1}{60}\cdot((0{,}01)^2+(0{,}01)^2+(0{,}02)^2+(0{,}02)^2+$$
$$+(0{,}02)^2+(0{,}03)^2+(0{,}05)^2+(0{,}05)^2+(0{,}05)^2+(0{,}06)^2+(0{,}06)^2+$$

$+(0,06)^2+(0,07)^2+(0,07)^2+(0,07)^2+(0,10)^2+(0,11)^2+(0,11)^2+$
$+(0,14)^2+(0,14)^2+(0,17)^2+(0,18)^2+(0,18)^2+(0,18)^2+(0,18)^2+$
$+(0,23)^2+(0,23)^2+(0,23)^2+(0,23)^2+(0,25)^2+(0,26)^2+(0,27)^2+$
$+(0,29)^2+(0,30)^2+(0,32)^2+(0,32)^2+(0,34)^2+(0,39)^2+(0,39)^2+$
$+(0,39)^2+(0,39)^2+(0,39)^2+(0,40)^2+(0,43)^2+(0,46)^2+(0,48)^2+$
$+(0,48)^2+(0,53)^2+(0,53)^2+(0,60)^2+(0,61)^2+(0,66)^2+(0,73)^2+$
$+(0,76)^2+(0,79)^2+(0,79)^2+(0,80)^2+(0,80)^2+(0,95)^2+(1,17)^2)-$
$-(0,322)^2 \approx 0,102.$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx 0,319.$$

Виправлена вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в = \frac{60}{59} \cdot 0,102 \approx 0,104.$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{s^2} \approx 0,322.$$

Оскільки вибіркова середня є незміщеною оцінкою математичного сподівання, то за формулою (18) знаходимо оцінку невідомого параметра розподілу генеральної сукупності

$$\lambda \approx 3,104.$$

5 Перевіримо гіпотезу про показниковий розподіл спостереженої ознаки за допомогою критерію Пірсона.

Для того, щоб інтервальні частоти задовольняли умову $n_j \ge 5$, необхідно об'єднати п'ятий, шостий і сьомий інтервали. Для кожного з п'яти інтервалів $(a_j;b_j)$, $j=1,...,5$ обчислюємо: емпіричну частоту n_j інтервалу; імовірность p_j попадання в інтервал за формулою (19); теоретичну частоту n'_j за формулою (12). Результати розрахунків заносимо до таблиці 8.

Таблиця 8

j	Частковий інтервал $(a_j;b_j)$	Емпіричні частоти n_j	Імовірності попадання p_j	Теоретичні частоти $n'_j = n \cdot p_j$	$\frac{(n_j - n'_j)^2}{n'_j}$
1	$(-\infty; 0{,}173)$	21	0,4155	24,93	0,6195
2	(0,173;0,340)	16	0,2364	14,184	0,2325
3	(0,340; 0,507)	10	0,1408	8,448	0,2851
4	(0,507; 0,674)	5	0,0839	5,034	0,0002
5	$(0{,}674; +\infty)$	11	0,1234	7,404	1,7465
$\sum$		60	1	60	2,8838

За формулою (13) отримали спостережуване значення критерію $\chi^2_{спост}$=2,8838.

Так як кількість інтервалів $s = 5$, а кількість невідомих параметрів розподілу $r = 1$, то за формулою (20) кількість степенів вільності дорівнює $k = 5 - 1 - 1 = 3$.

За даним рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ та кількістю степенів вільності $k = 3$ з додатка Б отримаємо $\chi^2_{кр}$=7,8.

Оскільки $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$, то гіпотезу про показниковий розподіл генеральної сукупності приймаємо.

Завдання 3. Задано вибірку, що отримана в результаті спостереження ознаки X. Провести повний статистичний аналіз даних та при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про **рівномірний** розподіл генеральної сукупності за критерієм згоди Пірсона.

4,5	4,4	6,1	5,0	6,2	5,4	4,8	4,2	3,7
4,9	6,0	4,8	6,0	6,7	4,1	5,4	6,9	3,8
5,4	5,3	5,3	4,3	3,5	6,2	6,2	3,2	4,1
3,5	5,8	4,7	5,4	3,6	5,8	6,5	6,7	5,5
5,3	5,9	3,3	3,9	4,1	4,9	3,1	6,8	6,0
3,7	6,3	6,3	4,8	6,2	4,1	5,6	3,1	4,6
3,0	3,3	5,7	5,3	3,7	3,8			

Виконання

1 Складаємо варіаційний ряд, розташувавши спостережені значення у порядку зростання:

3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,5	3,5	3,6
3,7	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	4,1	4,1	4,1
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,8
4,8	4,9	4,9	5,0	5,3	5,3	5,3	5,3	5,4
5,4	5,4	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,8	5,9
6,0	6,0	6,0	6,1	6,2	6,2	6,2	6,2	6,3
6,3	6,5	6,7	6,7	6,8	6,9			

Об'єм даної вибірки дорівнює $n = 60$. Найменша варіанта дорівнює $x_{\min} = 3{,}0$, найбільша − $x_{\max} = 6{,}9$.

2 Будуємо інтервальний ряд розподілу. По-перше, обчислюємо розмах варіації за формулою (1)

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 6{,}9 - 3{,}0 = 3{,}9.$$

За формулою Стерджеса (2) знаходимо кількість часткових інтервалів. Оскільки $1 + 3{,}322\lg n = 1 + 3{,}322\lg 60 \approx 6{,}91$, то, округляючи до більшого цілого числа, отримаємо $s = 7$.

За формулою (3) обчислюємо довжину часткового інтервалу

$$h = \frac{R}{s} = \frac{3{,}9}{7} \approx 0{,}557.$$

Тепер формуємо інтервали (додаємо h до кінця попереднього інтервалу, починаючи з найменшої варіанти $x_{\min}$) і обчислюємо кількість спостережених значень, які потрапили до них, − інтервальні частоти n_j.

Для побудови емпіричної функції $F^*(x)$ розподілу за формулою (4) знаходимо її значення в граничних точках інтервалів

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x=3{,}0,\\ \frac{8}{60}=0{,}13 & \text{при} \quad x=3{,}557,\\ \frac{8+11}{60}=\frac{19}{60}=0{,}32 & \text{при} \quad x=4{,}114,\\ \frac{19+5}{60}=\frac{24}{60}=0{,}4 & \text{при} \quad x=4{,}671,\\ \frac{24+7}{60}=\frac{31}{60}=0{,}52 & \text{при} \quad x=5{,}228,\\ \frac{31+11}{60}=\frac{42}{60}=0{,}7 & \text{при} \quad x=5{,}785,\\ \frac{42+13}{60}=\frac{55}{60}=0{,}92 & \text{при} \quad x=6{,}342.\end{cases}$$

Усі одержані за інтервальним рядом розрахунки заносимо до таблиці 9 і будуємо емпіричну функцію розподілу. Для цього з'єднаємо точки площини з координатами $\left(x'_j; F^*(x'_j)\right)$ відрізками прямих (рисунок 7). Додатково вважаємо: $F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 3{,}0,\\ 1 & \text{при } x>6{,}9.\end{cases}$

Таблиця 9

№ j	інтервал $(x'_j; x'_{j+1})$	інтервальна частота, n_j	$F^*(x'_j)=\frac{n_x}{n}$	$\left(x'_j; F^*(x'_j)\right)$
1	(3,0; 3,557)	8	0	(3,0; 0)
2	(3,557; 4,114)	11	0,13	(3,557; 0,13)
3	(4,114; 4,671)	5	0,32	(4,114; 0,32)
4	(4,671; 5,228)	7	0,4	(4,671; 0,4)
5	(5,228; 5,785)	11	0,52	(5,228; 0,52)
6	(5,785; 6,342)	13	0,7	(5,785; 0,7)
7	(6,342; 6,9)	5	0,92	(6,342; 0,92)

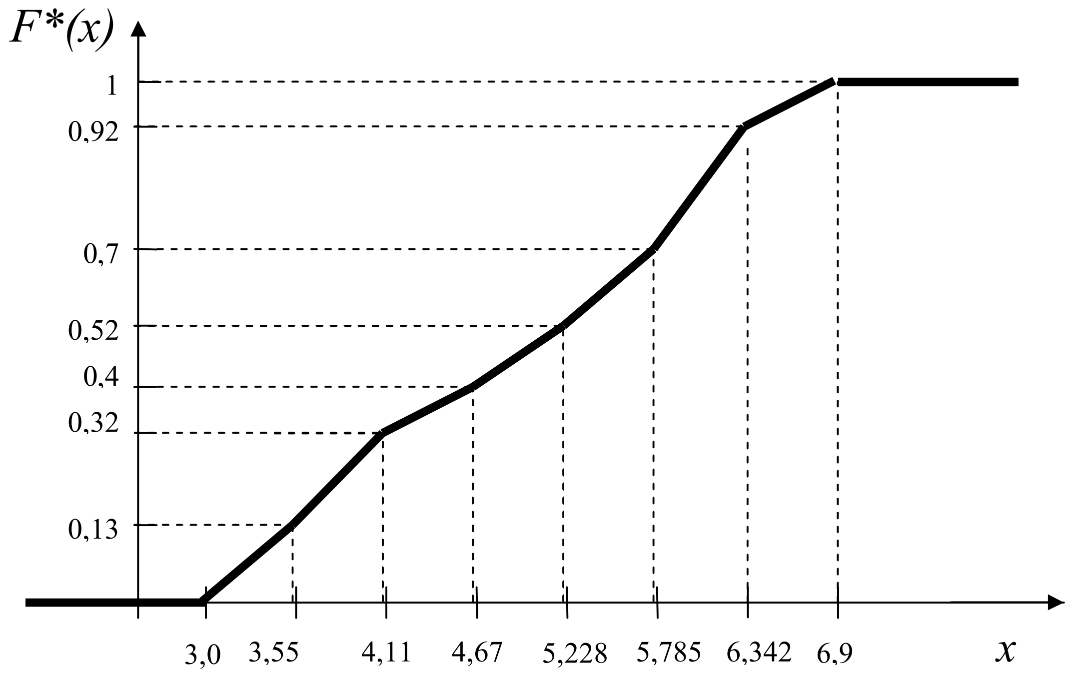


Рисунок 7 – Графік емпіричної функції розподілу

Бачимо, що графік наближеної емпіричної функції розподілу схожий на графік інтегральної функції рівномірного розподілу (див. таблицю 1).

3 Побудуємо гістограми частот та відносних частот.

Як інтервал, що містить всі варіанти, візьмемо інтервал $(A;B)=(2{,}99;\,6{,}91)$ $(2{,}99<x_{\min};\quad x_{\max}<6{,}91)$. Розіб'ємо його на $s=7$ часткових інтервалів, довжина яких знаходиться за формулою (5)

$$h=\frac{B-A}{s}=\frac{6{,}91-2{,}99}{7}=0{,}56.$$

Формуємо часткові інтервали, обчислюємо інтервальні частоти та висоти прямокутників за формулами (6). Результати заносимо до таблиці 10.

Таблиця 10

№ j	інтервал	інтервальна частота, n_j	$H_j = \frac{n_j}{h}$	$W_j = \frac{n_j}{nh}$
1	(2,99; 3,55)	8	14,3	0,24
2	(3,55; 4,11)	11	19,6	0,33
3	(4,11; 4,67)	5	8,9	0,15
4	(4,67; 5,23)	7	12,5	0,21
5	(5,23; 5,79)	11	19,6	0,33
6	(5,79; 6,35)	13	23,2	0,39
7	(6,35; 6,91)	5	8,9	0,15

На рисунках 8 і 9 зображено гістограми частот і відносних частот, що побудовані за одержаними даними. Бачимо, що форма гістограми нагадує графік щільності рівномірного розподілу (див. таблицю 2).

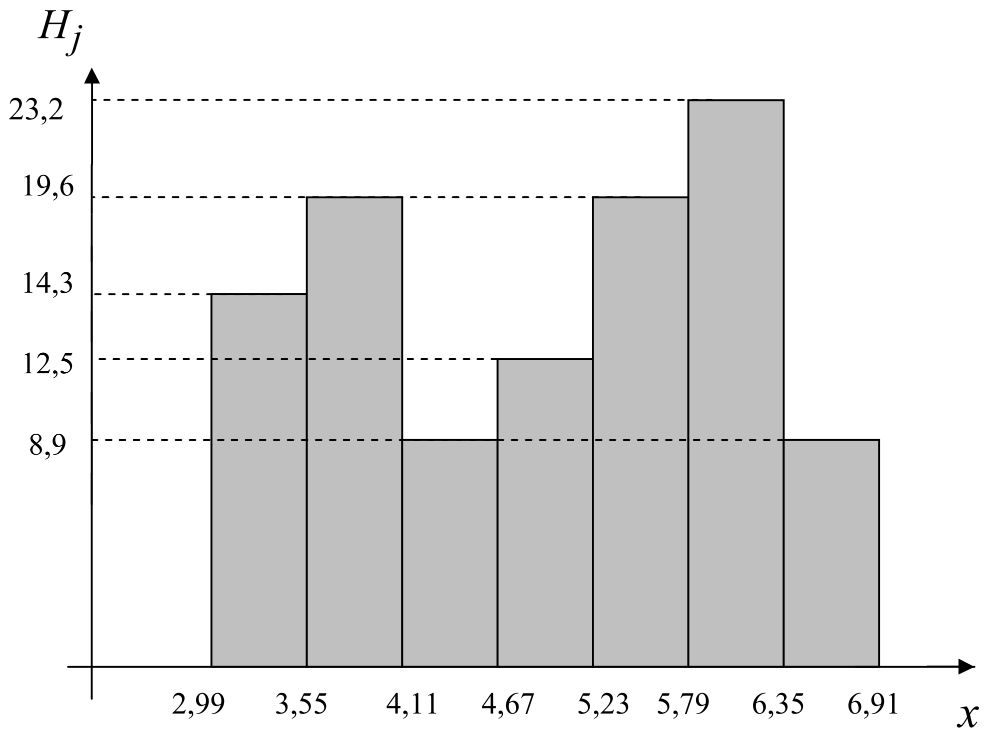


Рисунок 8 – Гістограма частот

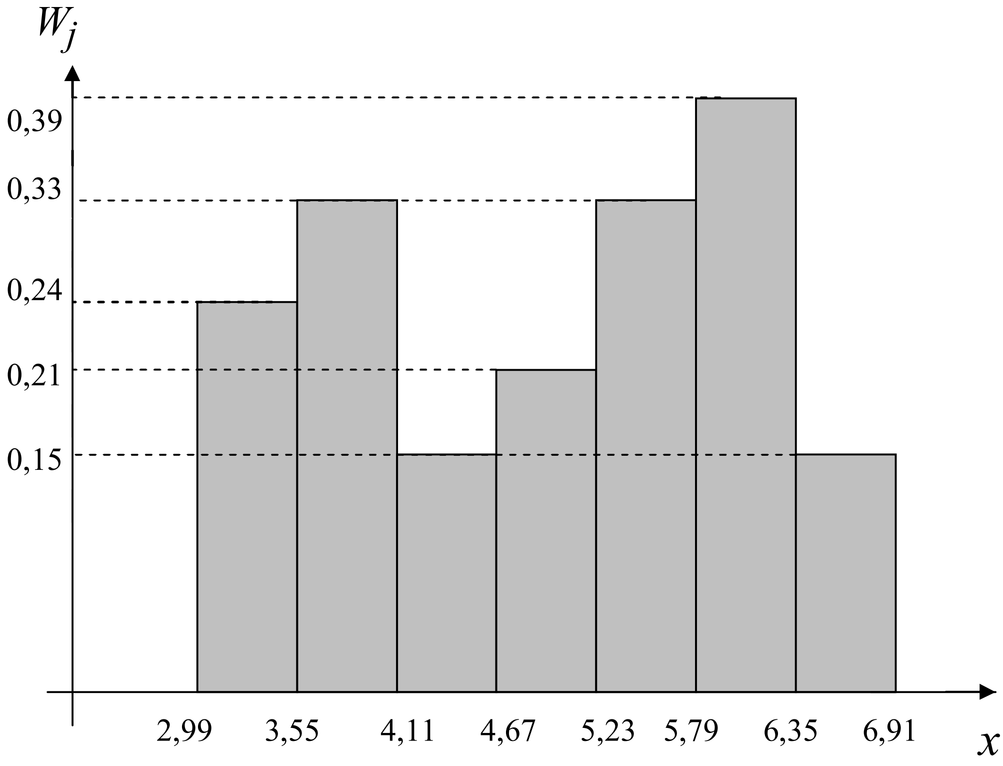


Рисунок 9 – Гістограма відносних частот

4 Знаходимо числові характеристики варіаційного ряду за формулами (7)−(11).

Вибіркова середня

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{60}\cdot(3{,}0+3{,}1\cdot 2+3{,}2+3{,}3\cdot 2+3{,}5\cdot 2+3{,}6+3{,}7\cdot 3+$$
$$+3{,}8\cdot 2+3{,}9+4{,}1\cdot 4+4{,}2+4{,}3+4{,}4+4{,}5+4{,}6+4{,}7+4{,}8\cdot 3+4{,}9\cdot 2+5{,}0+$$
$$+5{,}3\cdot 4+5{,}4\cdot 4+5{,}5+5{,}6+5{,}7+5{,}8\cdot 2+5{,}9+6{,}0\cdot 3+6{,}1+6{,}2\cdot 4+$$
$$+6{,}3\cdot 2+6{,}5+6{,}7\cdot 2+6{,}8+6{,}9) \approx 4{,}945.$$

Вибіркова дисперсія

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \frac{1}{60}\cdot((3{,}0)^2+(3{,}1)^2\cdot 2+(3{,}2)^2+(3{,}3)^2\cdot 2+$$
$$+(3{,}5)^2\cdot 2+(3{,}6)^2+(3{,}7)^2\cdot 3+(3{,}8)^2\cdot 2+(3{,}9)^2+(4{,}1)^2\cdot 4+(4{,}2)^2+$$
$$+(4{,}3)^2+(4{,}4)^2+(4{,}5)^2+(4{,}6)^2+(4{,}7)^2+(4{,}8)^2\cdot 3+(4{,}9)^2\cdot 2+(5{,}0)^2+$$
$$+(5{,}3)^2\cdot 4+(5{,}4)^2\cdot 4+(5{,}5)^2+(5{,}6)^2+(5{,}7)^2+(5{,}8)^2\cdot 2+(5{,}9)^2+(6{,}0)^2\cdot 3+$$
$$+(6{,}1)^2+(6{,}2)^2\cdot 4+(6{,}3)^2\cdot 2+(6{,}5)^2+(6{,}7)^2\cdot 2+(6{,}8)^2+(6{,}9)^2)-$$
$$-(4{,}945)^2 \approx 1{,}225.$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \approx 1{,}107 .$$

Виправлена вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в = \frac{60}{59} \cdot 1{,}225 \approx 1{,}246.$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення

$$s = \sqrt{s^2} \approx 1{,}116.$$

Вибіркова середня та виправлене середнє квадратичне відхилення є незміщеними оцінками математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення. Скориставшись формулою (21), знаходимо оцінки невідомих параметрів розподілу генеральної сукупності

$$a \approx 3{,}012, \quad b \approx 6{,}878 .$$

5 Перевіримо гіпотезу про рівномірний розподіл спостереженої випадкової величини за допомогою критерію Пірсона.

Всі інтервальні задовольняють умову $n_j \geq 5$, тому часткові інтервали залишаються без змін.

Для кожного з семи інтервалів $(a_j ; b_j)$, $j = 1,...,7$ обчислюємо імовірність p_j попадання в інтервал за формулою (22); теоретичну частоту n'_j за формулою (12); величину $\frac{\left(n_j - n'_j\right)^2}{n'_j}$ розбіжності частот. Результати розрахунків заносимо до таблиці 11.

Таблиця 11

j	Частковий інтервал $(a_j; b_j)$	Емпіричні частоти n_j	Імовірності попадання p_j	Теоретичні частоти $n'_j = n \cdot p_j$	$\frac{(n_j - n'_j)^2}{n'_j}$
1	$(-\infty; 3{,}55)$	8	0,1392	8,352	0,0148
2	(3,55; 4,11)	11	0,1449	8,694	0,6116
3	(4,11; 4,67)	5	0,1449	8,694	1,5695
4	(4,67; 5,23)	7	0,1449	8,694	0,3301
5	(5,23; 5,79)	11	0,1449	8,694	0,6116
6	(5,79; 6,35)	13	0,1449	8,694	2,1327
7	$(6{,}35; +\infty)$	5	0,1363	8,178	1,235
$\sum$		60	1	60	6,5053

За формулою (13) отримали спостережуване значення критерію $\chi^2_{спост}$=6,5053.

Так як кількість інтервалів $s = 7$, а кількість невідомих параметрів розподілу $r = 2$, то за формулою (22) кількість степенів вільності дорівнює $k = 7 - 2 - 1 = 4$.

За даним рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ та кількістю степенів вільності $k = 4$ з додатка Б отримаємо $\chi^2_{кр}$=9,5.

Оскільки $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}$, то гіпотезу про рівномірний розподіл генеральної сукупності приймаємо.

Завдання до розрахунково-графічної роботи

Завдання 1. Задано вибірку, що отримана в результаті спостереження ознаки X.

1) скласти варіаційний ряд розподілу;

2) знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік;

3) побудувати гістограму частот;

4) знайти числові характеристики варіаційного ряду;

5) при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ за критерієм згоди Пірсона перевірити гіпотезу про **нормальний** розподіл генеральної сукупності.

Варіант 1

11,74	4,27	13,82	13,99	5,20	13,99	3,15	19,29	8,92
21,43	13,36	10,80	3,96	6,58	3,74	13,29	18,48	7,81
15,21	-5,25	3,94	16,01	10,42	3,72	17,40	0,68	13,02
9,46	6,94	9,75	8,26	5,28	18,24	8,65	11,54	4,68
6,54	6,03	4,32	7,15	9,13	6,88	4,37	6,42	3,98
6,27	9,11	2,86	14,27	8,41	8,31	7,72	18,90	2,28
1,78	-0,21	13,34	4,04	12,55	1,28			

Варіант 2

6,96	12,78	10,56	6,50	4,11	8,27	7,66	5,45	3,91
1,21	-3,55	11,35	5,85	0,50	5,14	14,10	5,40	7,44
3,98	9,15	5,59	8,87	4,34	5,43	8,56	5,11	6,66
1,84	18,63	4,11	2,91	4,21	13,22	3,10	12,06	19,69
2,18	-3,82	1,47	0,83	5,77	-8,49	-10,06	12,16	5,40
-1,09	-1,33	5,27	20,85	6,96	9,01	19,36	4,31	-0,31
-6,70	3,73	1,61	8,51	4,49	9,76			

Варіант 3

2,87	0,10	4,45	5,11	2,87	1,28	6,31	4,41	4,50
2,01	4,79	3,88	0,84	1,05	4,18	1,46	4,27	3,46
2,16	1,36	0,82	4,33	5,26	5,78	5,26	0,26	7,43
1,76	2,56	2,28	0,95	2,51	3,20	2,15	5,86	2,60
6,88	5,42	4,64	0,16	0,05	3,09	7,35	-0,41	2,23
1,18	2,91	1,54	1,85	6,38	2,01	1,54	7,36	-0,35
4,85	3,63	0,79	0,53	5,03	2,36			

Варіант 4

-16,43	11,86	-6,20	-2,50	-5,19	-6,93	-10,69	4,42
- 1,86	-1,61	5,95	-1,90	-0,45	-11,05	-2,15	0,86
-1,08	-2,64	-11,23	-0,03	-1,35	3,00	-2,42	1,14
-7,60	-8,99	-5,54	8,44	-14,02	1,23	-4,12	2,05
-7,87	0,03	2,32	-5,67	-5,28	-7,28	-4,15	-4,41
-5,30	-4,04	-2,55	-4,09	-1,68	3,44	5,97	-4,17
-2,99	-1,90	1,20	-3,11	1,88	-7,76	-5,70	
1,70	-3,51	1,35	0,28	-6,30	11,86		

Варіант 5

-2,61	-2,95	-3,11	-2,27	-2,98	-2,57	-1,20	-2,28
-4,19	-4,47	-3,59	-1,92	-2,86	-3,27	-2,96	-2,06
-3,42	-3,31	-1,91	-2,72	-2,91	-3,01	-2,85	-4,19
-1,22	-3,00	-4,58	-2,14	-1,89	-3,17	-2,37	-2,53
-3,02	-2,84	-2,30	-5,11	-3,07	-1,15	-3,72	-3,34
-2,18	-2,76	-1,67	-4,39	-3,97	-4,06	-2,92	-1,36
-3,80	-3,95	-3,05	-0,59	-2,28	-2,72	-3,51	-3,01
-2,65	-4,71	-3,59	-2,69				

Варіант 6

-2,11	1,94	4,19	2,72	0,33	4,26	-5,31	2,51	3,85
-0,35	8,40	-0,27	-1,08	5,63	1,66	5,08	-0,90	0,78
7,85	0,16	-0,41	3,25	8,08	-4,04	2,36	6,21	-3,79
4,10	-1,43	3,14	7,26	3,30	7,80	6,46	9,63	5,10
11,93	3,32	-3,13	3,24	11,42	-2,00	3,30	3,27	5,00
7,13	6,22	2,85	2,39	7,90	-2,18	7,75	-1,49	14,84
1,87	2,67	6,32	8,61	-2,61	7,30			

Варіант 7

16,34	14,43	16,31	18,45	17,99	14,99	14,03	16,57
14,89	14,89	15,16	15,24	14,91	10,61	17,79	18,21
14,74	12,47	15,45	18,41	13,57	13,14	14,50	12,22
16,04	13,38	13,10	12,68	9,48	16,29	16,27	11,28
13,00	11,61	17,51	13,19	12,86	12,66	15,83	13,85
11,81	16,06	17,56	18,41	15,92	13,14	16,04	16,55
12,43	16,37	16,21	15,89	18,45	18,00	14,82	16,92
14,61	11,81	14,77	17,51				

Варіант 8

7,41	10,98	4,97	6,51	10,52	10,91	7,68	9,39	8,32
8,78	7,09	7,02	8,33	8,27	9,43	6,22	10,51	7,03
7,57	9,56	8,13	6,89	8,80	7,23	10,66	7,07	7,09
6,66	5,45	8,09	10,09	7,12	7,80	9,37	6,53	8,60
6,48	10,13	9,13	13,23	7,08	9,42	8,11	8,78	8,22
6,18	6,33	9,70	8,58	5,66	9,98	8,05	8,23	9,57
7,48	4,75	5,91	11,58	8,01	8,77			

Варіант 9

-1,76	0,52	-3,37	-0,25	-2,21	-1,27	-1,29	-0,11
-3,60	-1,06	-4,73	-0,88	-2,72	-0,09	-2,00	-2,87
1,72	0,21	-3,49	-2,87	-2,80	1,07	0,19	-2,21
-0,33	-1,50	-0,15	-0,95	-2,91	-0,44	2,32	1,25
-0,65	1,17	-1,30	-0,88	1,00	-0,36	-2,56	-1,43
1,13	-1,57	-0,67	1,40	-0,30	-0,06	-1,61	-0,43
0,25	-1,81	1,72	-2,70	-1,12	-1,86	0,01	-1,09
-1,26	-0,05	-1,29	-3,25				

Варіант 10

-9,83	1,51	-5,48	0,28	-6,93	-0,66	-2,34	-4,33
-5,73	-10,46	-5,78	-10,66	-8,83	-13,27	-3,82	1,09
-5,45	-8,61	-7,24	0,92	0,47	-7,88	-3,42	-1,81
-11,31	-2,68	-2,85	5,82	-5,86	-2,16	-1,82	-0,47
-5,47	4,49	1,67	-10,19	-13,13	-4,68	-11,43	-1,52
-3,27	-9,30	2,29	-8,94	-11,54	1,86	0,31	-4,34
-18,69	-4,82	-2,45	-0,21	-3,46	-13,76	-2,52	3,43
-10,48	3,39	-5,54	-6,75				

Варіант 11

8,64	8,40	9,35	9,08	9,21	8,01	8,89	9,51	8,61
8,60	11,19	6,96	10,82	9,04	8,35	9,86	10,52	8,05
9,24	9,06	9,80	10,94	7,22	10,04	8,94	9,67	9,14
8,48	9,56	9,30	7,44	8,25	8,98	9,52	7,44	8,59
10,23	9,81	7,84	9,35	8,56	9,32	8,34	9,47	7,45
10,32	7,92	7,95	9,43	9,30	9,10	9,32	7,71	8,61
9,28	8,70	9,79	8,99	8,20	8,95			

Варіант 12

-4,54	-1,50	-2,28	-3,78	-0,81	-5,00	-2,06	-3,00
-3,79	-2,53	-0,61	-2,71	-2,39	-5,94	-0,92	1,63
-9,39	0,33	-1,20	0,02	1,14	-0,64	-3,58	1,21
-4,33	-1,85	-6,00	-4,50	-5,90	-6,72	-0,64	4,50
0,77	-4,14	0,92	-4,63	-2,13	-3,79	-0,66	-2,70
-0,07	1,66	-2,44	-1,53	-2,00	0,14	-4,37	-2,00
2,94	-5,05	-0,04	-2,30	-2,33	-2,59	-5,95	-0,88
-7,40	0,56	-6,01	2,85				

Варіант 13

-5,98	-6,33	-6,91	-5,01	-8,13	-7,49	-4,67	-6,08
-2,30	-3,68	-5,42	-3,62	-3,07	-4,11	-7,76	-4,18
-5,12	-7,09	-2,28	-4,86	-2,89	-6,70	-4,56	-6,16
-0,60	-5,78	-7,81	-8,05	-7,70	-4,45	-5,25	-5,29
-2,27	-5,62	-5,48	-3,33	-7,51	-3,75	-4,20	-3,46
-4,03	-5,72	-3,00	-6,29	-3,96	-2,46	-7,34	-2,85
-4,68	-3,08	-3,43	-5,71	-3,92	-2,80	-3,29	-4,86
-7,35	-9,13	-11,05	-2,02				

Варіант 14

12,91	12,74	10,60	12,32	12,95	12,91	13,48	15,66
13,30	11,24	9,29	13,99	13,54	14,72	12,61	12,51
11,55	9,64	13,03	10,70	14,73	12,10	11,58	8,69
11,99	13,54	11,50	11,26	11,80	9,02	9,64	12,42
8,94	10,28	11,95	11,20	11,70	10,02	16,55	13,48
10,23	11,18	13,88	14,15	13,68	12,38	13,58	11,87
14,62	13,49	12,25	10,54	10,79	15,41	8,24	8,81
11,01	12,13	14,83	10,67				

Варіант 15

18,40	16,81	17,08	16,29	13,50	16,50	14,66	14,16
16,33	17,20	16,13	15,58	17,79	11,44	18,37	18,52
19,16	16,49	16,80	16,20	11,93	18,11	14,77	16,70
16,97	14,95	17,26	14,55	17,69	14,94	17,86	21,88
17,64	14,58	15,00	18,58	18,84	20,32	20,39	16,09
15,10	14,32	19,39	15,36	16,05	16,66	15,92	12,18
16,51	10,82	16,74	15,02	16,85	14,65	15,79	18,45
17,93	16,08	13,19	14,72				

Варіант 16

-3,02	-5,24	-6,59	-13,63	-4,68	-4,10	-3,43	-1,13
-10,49	-5,15	-11,38	-11,91	-4,66	3,65	-4,55	-5,63
-2,57	-3,36	-6,68	-0,83	-6,89	-9,23	-5,95	0,01
-5,75	-10,80	-1,94	-5,13	-5,78	-9,51	-9,20	-3,96
-11,86	-7,59	2,96	-7,25	-14,51	-9,95	-5,01	-5,56
-3,90	-9,45	-3,05	-3,70	-1,97	-2,45	-8,08	-6,63
-12,22	-10,61	-1,76	-8,56	-10,23	-5,87	-10,20	-7,09
-2,91	1,16	-6,80	-9,57				

Варіант 17

16,39	11,82	-2,83	-1,96	6,18	-1,44	18,95	10,70
4,07	13,21	14,15	3,07	10,98	-5,62	1,10	0,30
5,05	-9,39	-0,47	13,51	-2,47	6,24	-4,10	12,35
1,60	5,26	8,53	6,77	13,72	12,15	-0,81	0,82
-7,45	6,18	19,59	10,16	13,80	8,35	8,83	4,19
9,95	2,61	10,11	-3,06	2,98	2,25	4,21	4,92
11,64	-0,28	2,81	17,52	14,32	3,51	5,32	-10,35
-6,40	1,06	2,37	-7,74				

Варіант 18

18,21	17,69	18,51	17,17	19,32	17,67	17,98	16,77
18,63	18,38	16,73	18,94	18,16	18,78	15,65	18,72
19,62	17,77	17,13	18,69	18,70	17,02	16,61	17,74
19,08	16,69	17,10	19,70	17,32	18,25	16,98	16,42
18,77	19,30	18,95	18,40	17,96	18,56	18,80	18,23
18,62	17,15	18,20	18,90	18,16	18,75	18,88	18,69
20,57	17,99	18,25	18,11	17,43	17,97	17,90	17,59
17,43	19,27	18,24	18,55				

Варіант 19

15,58	17,14	12,84	10,13	7,91	13,40	14,75	9,79
17,99	9,76	15,28	15,73	9,81	10,70	8,63	14,76
10,57	17,88	9,85	4,07	8,02	7,81	15,89	6,37
7,69	12,92	14,13	13,30	13,22	10,44	16,06	8,91
8,03	19,81	11,06	7,41	9,32	8,41	17,54	10,77
12,78	15,02	7,03	10,09	12,70	8,84	12,45	4,13
13,00	15,00	21,55	7,71	19,77	13,66	3,64	10,51
14,44	11,48	8,18	17,62				

Варіант 20

8,38	8,76	8,16	5,81	6,80	8,25	6,92	7,18	5,85
6,73	7,73	7,40	9,03	10,32	7,98	9,31	8,99	8,01
8,13	6,69	6,75	7,02	8,63	8,74	8,03	9,23	7,37
6,84	8,51	7,69	5,42	7,70	7,24	8,30	5,27	7,22
7,62	7,87	8,61	9,51	6,25	8,38	8,04	6,87	8,83
9,26	8,14	9,32	6,70	7,16	8,97	8,85	7,63	8,81
9,05	8,51	5,08	9,06	7,21	7,48			

Варіант 21

9,25	6,64	4,11	8,06	2,51	7,74	10,31	6,11	4,21
5,57	4,07	7,71	5,26	9,03	7,27	5,55	0,61	3,80
-0,05	2,92	5,65	1,75	6,62	8,04	0,55	0,27	8,03
9,63	10,44	4,94	6,18	5,85	5,83	4,39	7,96	6,66
1,39	3,65	8,26	4,81	4,37	2,50	0,77	8,95	3,47
7,08	2,67	1,71	3,27	2,04	5,08	2,14	2,08	5,06
2,69	4,05	10,32	11,26	3,67	0,10			

Варіант 22

8,62	9,67	8,86	11,33	8,45	9,41	9,98	10,38
10,49	10,70	9,93	10,67	8,87	10,75	11,22	11,41
10,55	8,51	7,78	11,16	9,91	10,76	10,22	9,85
9,22	8,85	9,94	9,51	9,07	8,68	11,09	8,99
9,06	9,39	8,93	10,07	10,53	9,31	7,92	9,53
8,93	10,23	9,42	11,32	10,20	9,15	11,00	11,18
10,46	11,30	9,80	11,53	11,51	11,21	9,88	9,56
9,96	10,77	12,47	9,30				

Варіант 23

7,63	7,78	7,36	7,44	9,78	8,87	6,35	7,06	8,90
6,88	7,65	8,57	9,12	9,93	8,27	8,24	6,95	8,31
8,49	9,25	10,70	7,68	8,13	8,98	5,77	8,17	7,46
9,55	7,82	7,56	7,31	8,14	7,58	7,46	6,79	8,31
8,75	7,78	7,31	7,31	6,24	8,76	7,80	10,16	7,16
8,87	7,81	11,16	6,87	7,72	7,11	7,53	9,61	8,00
10,13	9,09	7,96	6,90	7,33	8,20			

Варіант 24

6,96	7,70	6,33	7,31	5,64	7,55	8,44	5,55	6,05
7,93	6,86	6,30	6,57	6,41	5,66	5,96	4,09	6,69
7,76	8,04	6,84	5,68	7,53	6,77	5,70	8,15	6,21
7,07	6,99	8,69	7,55	8,01	6,17	7,02	4,12	6,76
8,14	6,73	6,60	6,54	7,24	8,31	6,53	7,47	5,88
6,88	7,90	6,96	9,02	8,42	8,35	6,40	7,76	7,82
7,91	6,36	6,67	5,75	6,62	6,48			

Вариант 25

3,86	2,61	3,92	4,24	3,96	3,18	2,56	5,12	5,55
2,62	5,49	5,74	5,10	4,51	5,20	4,44	4,76	4,15
3,89	2,98	3,68	3,55	5,64	5,18	3,34	3,84	3,39
3,08	4,96	4,82	3,35	4,76	4,50	2,62	4,58	4,60
4,10	5,65	3,05	3,15	4,12	4,71	4,19	4,57	5,93
4,89	3,53	4,63	3,46	4,73	4,14	1,72	3,13	4,45
5,33	3,73	4,76	4,71	2,52	5,23			

Варіант 26

6,58	5,67	1,19	6,60	2,85	1,22	4,13	2,17	2,81
6,67	6,05	0,60	5,07	1,38	6,30	9,50	4,11	4,87
1,79	3,96	5,96	7,56	6,71	5,60	8,25	4,79	-0,14
0,83	6,27	5,05	7,71	-2,41	9,96	2,47	-0,53	2,89
1,90	3,30	0,52	6,65	7,79	2,51	6,99	5,52	0,82
3,57	-1,62	9,76	6,15	2,98	4,46	8,79	2,82	5,04
5,71	6,06	6,90	1,00	9,03	4,56			

Варіант 27

1,65	1,26	0,65	2,60	0,40	1,43	2,31	1,97	2,65
0,82	0,93	1,71	0,52	0,47	1,34	2,78	-0,71	-0,27
0,87	-0,80	2,10	3,07	1,89	1,78	1,30	-1,34	0,65
0,30	0,86	0,37	2,23	2,23	1,06	2,18	2,79	0,95
-0,56	0,71	0,98	2,67	0,36	0,53	1,09	0,97	0,32
-0,11	2,40	1,13	-0,10	-0,79	0,56	0,47	2,11	1,35
2,01	-0,55	1,72	1,34	2,22	1,76			

Варіант 28

-2,10	-3,18	-1,51	-3,87	-1,18	-1,08	-4,17	-1,64
-3,01	-2,15	-1,71	-1,46	-3,57	-1,17	-1,30	-2,80
-3,13	-1,54	-1,96	-2,93	-1,15	-2,72	-1,70	-2,34
-1,72	-1,07	-0,81	-2,08	-1,80	-2,19	-1,81	-2,85
-0,59	-4,04	-1,23	-3,18	-2,20	-0,98	-3,57	-3,62
-1,63	-5,02	-0,84	-1,79	-1,12	-1,42	-0,53	-2,71
-2,55	-2,51	-2,87	0,05	-1,71	-3,72	-1,59	-2,70
-0,74	-3,57	-0,91	-1,84				

Варіант 29

7,27	6,04	6,53	4,89	5,28	6,00	5,56	8,68	7,99
6,63	6,78	6,09	7,52	6,16	5,04	7,20	7,08	7,21
6,29	6,63	6,60	4,55	6,29	8,10	7,64	7,55	5,06
6,54	7,84	6,44	7,45	5,73	8,28	5,86	5,75	6,20
8,22	8,16	7,81	6,49	5,75	5,23	8,85	8,19	5,54
7,14	6,92	7,75	4,93	6,44	8,89	9,61	7,67	9,22
6,99	7,37	6,26	6,90	6,65	5,90			

Варіант 30

7,10	6,14	6,75	6,75	5,12	5,85	6,01	6,35	5,76
6,51	6,36	4,84	7,23	5,02	5,97	5,69	5,73	6,02
7,05	5,79	5,01	5,43	4,77	5,49	7,13	4,41	6,89
7,16	7,80	6,82	6,42	6,35	5,97	5,86	5,16	5,50
6,11	4,45	6,16	6,75	6,83	5,94	5,92	6,74	7,31
5,07	6,31	5,67	5,31	4,77	5,44	7,38	6,74	7,02
5,36	6,76	5,53	7,53	4,76	5,34			

Завдання 2. Задано вибірку, що отримана в результаті спостереження ознаки X.

1) скласти варіаційний ряд розподілу;

2) знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік;

3) побудувати гістограму частот;

4) знайти числові характеристики варіаційного ряду;

5) при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ за критерієм згоди Пірсона перевірити гіпотезу про **показниковий** розподіл генеральної сукупності.

Варіант 1

0,62	1,32	0,60	0,13	2,78	0,51	0,98	0,44	1,07
0,01	1,63	0,28	0,30	0,02	0,17	1,80	0,37	0,88
0,63	1,83	1,33	0,01	0,67	0,49	2,56	0,01	0,50
1,10	0,73	0,04	0,37	1,32	1,59	0,50	0,19	1,40
3,61	0,07	1,83	1,04	3,23	0,65	2,76	0,24	0,21
0,80	1,63	0,37	0,07	0,79	0,26	0,31	0,03	1,69
2,88	0,12	2,32	0,99	0,59	0,85			

Варіант 2

0,26	1,04	0,05	0,09	0,07	0,02	0,69	0,13	0,07
0,26	0,15	0,23	1,57	0,18	0,48	0,19	0,56	0,36
0,38	0,20	0,06	0,07	0,02	0,52	1,45	0,27	1,03
0,28	0,29	0,44	0,02	0,35	1,37	0,40	0,23	0,16
0,10	0,02	1,28	0,49	0,20	0,56	0,36	0,23	0,70
0,39	0,32	0,10	1,26	0,30	0,16	1,11	0,06	0,01
0,76	0,05	0,46	0,15	0,07	0,95			

Варіант 3

3,99	1,22	12,39	1,55	0,63	0,25	0,05	1,91	1,92
1,24	10,65	3,95	0,37	0,21	2,74	0,16	2,97	0,57
0,60	5,81	0,71	1,05	3,51	1,77	0,34	6,02	3,47
0,34	3,31	0,95	8,23	2,61	3,35	1,29	2,60	0,16
0,98	0,41	1,40	0,50	2,97	1,83	3,80	0,15	5,52
6,71	2,84	0,85	1,44	0,36	5,00	1,34	0,16	6,21
2,74	0,47	2,28	0,63	3,94	3,86			

Варіант 4

1,29	2,27	8,15	0,27	5,60	0,63	1,33	1,19	0,08
3,47	0,90	2,59	0,59	6,35	3,67	1,30	5,02	12,80
0,43	2,64	0,12	5,07	8,27	3,22	7,51	3,95	2,11
1,14	1,03	5,42	1,91	1,46	7,51	1,77	0,95	0,27
3,25	0,74	2,02	1,49	2,16	1,60	5,43	0,85	0,72
5,92	0,68	0,05	2,47	0,01	3,23	1,93	0,23	1,85
5,90	2,67	1,85	4,56	9,81	4,01			

Варіант 5

0,47	4,01	0,34	4,67	2,46	1,62	7,92	3,75	6,17
1,85	2,09	17,17	11,17	1,84	0,17	9,36	1,64	0,46
1,17	1,86	0,85	6,15	1,54	3,83	1,81	4,06	2,39
1,75	4,19	3,64	6,54	4,46	19,44	3,29	5,07	0,53
0,86	0,76	10,14	6,87	6,52	2,61	6,41	0,98	0,57
2,18	1,32	3,34	9,10	4,79	3,21	8,01	1,03	6,81
3,87	6,57	3,74	1,15	0,03	2,37			

Варіант 6

9,64	23,69	1,30	6,04	10,29	10,36	3,22	15,91	0,41
6,24	1,29	3,97	8,85	7,20	4,95	1,40	4,93	0,25
1,58	9,90	2,19	1,87	12,24	2,57	16,71	19,13	0,38
8,36	6,52	1,49	4,14	0,97	8,45	11,35	7,47	1,67
0,71	7,92	10,46	1,36	1,73	1,09	21,39	23,37	4,86
2,17	36,17	7,02	10,55	7,42	16,72	14,37	7,41	4,54
15,32	4,90	10,00	0,46	2,77	0,67			

Варіант 7

3,33	10,66	2,89	5,68	0,54	2,28	1,64	6,86	3,08
5,19	4,53	1,40	7,98	9,57	5,39	4,45	8,73	1,77
4,22	2,18	0,26	1,80	21,07	11,83	1,99	0,97	14,03
7,34	13,43	2,35	0,84	3,25	1,28	10,46	13,23	3,59
3,77	1,21	0,83	2,19	2,18	20,34	7,38	9,62	15,51
5,08	3,65	3,97	1,09	3,16	0,01	9,60	3,65	2,96
10,32	4,18	12,27	4,40	13,81	16,31			

Варіант 8

0,17	1,81	4,24	5,11	26,61	8,35	0,76	7,76	3,40
7,00	2,94	2,09	11,97	4,21	12,66	0,13	2,45	0,45
18,67	4,99	0,51	3,26	6,80	17,90	2,21	4,25	6,56
12,30	0,66	5,56	23,75	2,83	14,08	1,57	6,41	0,56
18,65	3,21	3,58	15,94	5,27	18,22	1,08	9,86	31,80
10,78	5,82	0,35	3,92	7,43	10,63	11,99	3,66	0,08
18,79	16,56	17,13	11,59	21,05	37,52			

Варіант 9

28,06	37,19	37,15	5,16	3,98	7,71	28,27	21,77	8,08
15,84	10,47	24,67	11,92	1,25	6,20	8,72	3,50	1,99
11,62	7,60	0,16	20,62	15,88	0,44	16,11	3,77	7,53
3,21	4,81	5,95	30,01	48,42	7,13	22,57	2,41	3,75
3,92	3,74	0,52	10,25	5,48	7,40	0,70	10,99	2,43
12,35	3,18	14,53	8,29	0,54	8,56	5,44	4,61	1,45
2,89	2,12	12,18	25,07	11,10	41,58			

Варіант 10

26,37	6,40	17,26	7,19	9,20	9,27	2,03	2,41	5,61
2,42	1,90	21,56	0,77	2,20	17,44	19,59	15,06	8,87
5,59	7,43	8,65	1,12	18,84	3,28	2,58	2,70	2,89
15,80	1,72	15,33	5,62	4,70	2,21	8,88	7,49	11,42
1,71	4,51	13,01	5,63	4,56	3,50	0,01	41,55	1,24
12,68	4,55	10,35	4,64	10,26	15,18	2,24	18,76	6,28
18,08	31,42	6,72	23,44	1,07	32,52			

Варіант 11

6,43	4,99	11,76	9,52	16,08	6,27	5,61	44,38	0,81
1,52	3,93	10,71	4,47	4,34	4,10	25,11	2,28	10,41
41,55	34,40	17,85	11,17	4,26	11,55	3,66	31,08	3,91
17,36	1,99	4,53	28,32	14,19	5,23	0,68	19,23	1,81
7,56	0,88	3,16	26,81	6,59	35,53	27,33	2,27	6,00
7,61	15,13	16,91	1,52	2,14	0,81	23,30	20,72	1,75
3,80	20,17	13,90	20,37	51,48	22,28			

Варіант 12

3,74	14,01	55,77	4,25	5,08	22,82	1,04	2,43	9,89
10,92	2,09	3,78	25,63	2,46	30,54	4,44	40,85	6,94
19,09	1,63	75,05	25,04	23,05	8,65	23,44	10,44	6,29
13,55	9,51	27,43	3,30	66,26	17,66	2,06	16,60	9,22
1,39	4,68	9,66	12,74	34,37	18,20	1,85	16,44	4,01
5,07	8,12	11,28	34,36	1,38	1,01	9,72	9,88	25,95
0,89	0,03	14,10	18,46	19,08				

Варіант 13

3,16	1,04	5,30	8,27	0,05	3,35	2,80	6,17	0,60
1,90	15,45	0,69	0,86	3,91	0,57	4,23	9,13	1,43
13,83	4,06	5,30	1,76	0,61	0,09	3,50	3,98	7,22
6,27	1,97	5,12	0,54	2,27	10,21	0,77	6,79	5,08
0,66	11,55	5,25	1,95	5,29	0,55	1,15	1,59	9,79
1,84	0,72	2,79	1,25	0,09	1,44	2,74	0,23	0,44
4,40	0,01	1,69	2,09	1,51	13,29			

Варіант 14

2,26	0,54	1,23	2,96	6,94	1,29	3,68	5,97	0,07
0,81	0,04	0,58	5,16	5,89	1,38	1,70	0,13	14,75
0,15	0,68	3,90	0,46	6,01	1,87	2,43	6,39	4,57
1,58	3,10	0,15	7,34	0,35	2,80	4,86	2,39	1,85
1,21	1,04	0,00	6,45	3,86	4,49	4,64	2,24	0,12
1,74	5,00	1,47	0,49	2,70	2,32	9,26	1,05	0,08
0,08	0,64	0,13	2,44	1,57	4,30			

Варіант 15

2,81	0,14	2,60	0,66	0,29	0,02	0,89	2,91	2,03
1,77	0,66	1,17	1,61	0,65	3,75	2,12	1,16	2,32
0,56	0,04	3,19	0,54	1,73	0,66	3,60	0,68	0,55
6,40	3,62	2,14	2,15	0,09	0,11	0,58	4,14	0,81
0,40	2,63	0,12	0,33	0,54	2,08	0,25	0,16	3,97
0,93	3,42	1,20	0,01	1,35	3,94	1,25	1,43	0,87
0,45	0,75	3,06	0,09	0,15	0,32			

Варіант 16

0,66	0,15	0,26	0,48	0,89	1,99	1,00	0,06	0,31
0,21	2,27	0,24	1,55	1,32	0,56	1,40	2,71	1,83
0,71	1,78	0,86	3,83	0,09	0,90	0,07	0,41	0,63
0,37	1,83	2,72	7,33	2,70	0,90	1,90	2,14	0,29
0,03	0,42	0,42	1,13	1,35	1,68	1,71	0,93	0,28
1,15	2,08	0,03	1,48	0,03	0,17	0,05	0,07	1,85
0,61	0,39	0,02	1,53	1,26	0,00			

Варіант 17

0,41	6,68	2,28	0,25	0,16	0,76	0,28	0,11	2,01
0,95	0,94	0,16	0,82	2,33	0,58	0,83	0,02	3,05
3,83	0,40	0,32	0,28	0,45	0,68	0,66	0,12	0,55
0,87	0,61	0,05	2,09	2,62	1,14	0,94	0,04	1,72
0,52	0,67	0,41	3,29	1,27	0,13	0,39	0,60	3,89
1,01	1,20	0,12	1,14	0,81	1,57	0,70	2,72	3,12
1,31	1,61	0,89	4,60	0,61	2,19			

Варіант 18

51,99	6,31	5,28	3,05	0,13	4,96	15,18	0,67	5,84
2,75	0,28	2,52	13,49	3,05	0,02	15,03	6,62	1,19
13,06	1,04	2,13	4,03	1,35	2,91	1,73	2,35	0,89
5,62	3,26	5,45	3,66	27,66	7,10	2,20	65,27	10,42
12,65	6,96	2,68	2,19	0,76	2,95	16,77	2,01	3,08
6,71	18,32	0,89	6,83	19,13	0,56	11,53	9,18	10,39
0,52	10,77	1,37	32,30	31,45	0,32			

Варіант 19

17,66	1,14	3,20	1,06	4,98	1,38	2,15	2,14	2,44
0,62	1,02	1,20	5,18	5,86	3,21	1,02	0,67	2,42
0,69	3,83	2,06	3,78	13,60	1,18	0,40	17,23	0,96
0,09	1,26	0,49	4,66	5,66	0,71	1,04	4,79	3,27
9,21	1,07	6,47	7,73	4,29	7,45	3,57	0,09	2,11
1,78	0,72	1,28	6,44	1,78	6,12	4,73	5,60	9,89
2,93	2,59	8,32	1,26	1,25	2,00			

Варіант 20

2,48	1,76	1,32	2,14	0,92	7,52	0,65	2,48	4,73
0,52	1,78	4,63	0,07	7,81	4,32	3,54	2,32	0,10
1,83	9,70	4,27	0,16	0,63	3,41	4,80	6,96	0,24
0,66	3,72	0,24	9,20	2,58	0,29	8,48	2,75	3,23
2,92	0,19	3,09	0,48	11,17	0,83	0,20	4,47	2,56
4,54	0,25	0,12	3,31	0,95	1,89	5,15	2,06	0,42
2,81	0,32	2,69	1,57	6,79	1,50			

Варіант 21

1,39	0,52	3,36	0,06	0,07	0,60	0,16	1,13	0,31
0,13	0,66	0,27	8,69	2,06	0,13	1,17	1,04	0,43
0,82	1,40	2,37	0,33	0,73	1,24	0,22	0,14	0,92
1,75	1,60	5,36	0,11	1,29	0,29	0,32	1,94	0,09
0,32	1,10	0,20	0,33	0,56	0,19	0,09	0,56	0,16
3,10	0,78	1,97	0,41	0,43	0,03	3,30	1,52	0,66
0,96	2,77	5,48	1,18	2,79	0,83			

Варіант 22

1,00	0,10	0,04	0,18	0,64	0,84	0,25	3,68	2,39
0,33	0,23	2,71	0,46	0,10	0,38	1,23	0,12	0,16
0,25	0,00	0,65	0,15	1,50	1,81	1,02	0,26	0,06
0,69	1,69	0,11	0,14	0,01	0,29	0,30	0,55	1,73
0,25	1,57	0,13	0,21	0,41	0,82	0,60	0,11	0,69
0,18	1,12	1,52	1,09	0,90	0,31	0,66	0,97	0,08
0,74	0,12	0,54	0,03	0,41	0,61			

Варіант 23

0,31	0,36	0,04	0,18	0,95	0,04	0,15	0,77	0,65
0,48	0,05	0,12	0,68	0,77	0,36	0,30	0,27	0,37
0,31	0,99	0,08	0,93	0,24	0,53	0,01	0,52	0,01
0,29	0,19	0,35	0,35	0,16	0,31	0,81	0,08	1,20
0,74	0,08	0,26	0,06	0,01	0,44	0,62	0,06	0,53
0,00	0,87	0,09	0,22	0,05	1,96	0,24	0,03	0,21
0,38	1,20	0,02	0,67	0,70	0,64			

Варіант 24

0,08	0,45	0,36	0,31	0,14	0,17	0,05	0,80	0,77
0,18	0,40	0,04	1,21	0,08	0,57	0,03	0,61	0,14
0,07	0,19	0,89	0,43	0,20	0,01	0,53	1,62	2,24
0,17	0,35	0,41	0,04	0,09	0,85	2,05	1,63	0,37
0,59	0,14	0,73	0,26	0,71	0,38	0,09	0,67	0,10
0,88	0,31	0,00	0,10	0,86	0,05	0,06	0,62	1,53
0,09	0,99	0,29	0,27	0,69	0,38			

Варіант 25

1,91	0,00	0,12	0,02	0,71	0,05	0,00	0,43	0,17
0,20	0,28	0,17	0,05	0,19	0,08	0,15	0,54	1,31
0,31	0,21	0,46	1,03	0,53	0,14	0,35	0,75	0,01
0,14	0,05	0,02	0,15	0,92	0,05	0,45	0,33	0,64
0,81	0,05	0,12	0,09	0,65	0,03	0,24	0,08	0,22
1,21	0,10	0,29	0,48	0,10	0,03	0,05	0,17	0,18
1,21	1,83	0,04	0,18	0,12	0,12			

Варіант 26

0,22	0,04	0,05	0,00	0,28	0,07	0,01	0,61	0,25
0,04	0,67	0,20	0,07	0,32	0,29	0,18	0,41	0,16
0,07	0,41	0,08	0,52	0,06	0,02	0,94	0,06	0,09
0,03	0,16	0,39	0,08	0,00	0,40	0,42	0,29	1,34
0,06	0,01	0,04	0,32	0,20	0,28	0,49	0,05	0,01
0,38	0,33	0,20	0,05	0,72	0,23	0,05	0,22	0,36
0,02	0,58	0,35	0,03	0,03	0,12			

Варіант 27

0,18	0,07	0,12	0,39	0,00	0,19	0,19	0,00	0,06
0,14	0,13	0,13	0,60	0,46	0,27	0,19	0,16	0,15
0,25	1,12	0,56	0,17	0,07	0,01	0,02	0,16	0,29
0,15	0,26	0,54	0,05	0,17	0,26	0,08	0,35	0,08
0,14	0,03	0,14	1,80	0,58	0,37	0,01	0,11	0,15
0,02	0,20	0,23	0,46	0,51	0,10	0,54	0,15	0,00
0,52	0,13	0,27	0,06	0,03	0,47			

Варіант 28

1,50	1,66	0,96	1,03	0,20	0,44	0,22	0,18	0,65
0,82	1,15	0,17	0,05	4,03	1,47	1,14	0,41	0,14
0,96	0,48	1,68	0,52	0,39	1,26	0,33	0,36	0,98
0,97	0,69	0,52	0,68	0,42	0,00	1,09	1,03	0,83
0,49	0,43	0,11	0,29	1,64	0,69	0,14	1,04	0,04
1,71	0,13	1,30	0,30	2,11	0,30	0,37	0,41	5,56
0,85	0,42	0,70	0,39	1,01	0,56			

Варіант 29

0,30	0,38	0,68	0,66	0,00	0,60	0,11	0,16	0,31
0,50	0,57	1,04	2,52	0,35	0,19	0,11	0,13	0,05
0,01	0,28	0,18	1,39	0,04	0,88	0,26	0,44	0,29
4,14	0,35	0,32	0,73	0,03	0,16	0,02	0,19	0,21
0,17	0,94	0,50	0,31	0,56	0,18	0,04	0,51	0,14
0,09	1,23	1,93	0,23	0,96	0,17	0,01	0,23	0,38
0,21	0,31	0,01	1,10	0,40	0,02			

Варіант 30

1,32	1,07	0,99	0,12	1,04	0,02	1,79	0,11	0,14
0,41	0,87	1,14	1,77	0,48	2,36	0,04	0,27	0,11
1,17	0,49	0,03	0,31	0,87	0,03	0,20	0,08	0,32
0,47	0,59	0,25	0,87	0,25	0,36	0,81	0,19	0,73
1,19	1,58	0,39	0,15	0,18	0,10	0,41	0,47	0,18
1,06	0,10	2,02	0,59	0,98	0,19	0,04	0,79	0,40
0,22	1,29	0,24	0,52	0,87	1,03			

Завдання 3. Задано вибірку, що отримана в результаті спостереження ознаки X.

1) скласти варіаційний ряд розподілу;

2) знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

3) побудувати гістограму частот;

4) знайти числові характеристики варіаційного ряду;

5) при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ за критерієм згоди Пірсона перевірити гіпотезу про **рівномірний** розподіл генеральної сукупності.

Варіант 1

0,69	1,94	0,68	1,94	0,53	1,25	1,98	2,49	1,26
1,51	1,05	0,98	1,25	1,76	0,51	1,74	0,65	0,86
1,82	2,06	2,05	1,08	2,45	0,69	1,44	1,09	2,39
0,89	2,50	0,93	2,10	1,98	0,56	1,63	0,56	0,67
0,72	0,91	1,82	0,97	2,19	1,56	0,90	0,84	0,77
1,14	2,42	1,90	2,43	0,83	1,51	0,75	1,58	1,86
1,18	1,35	0,76	1,45	0,71	1,74			

Варіант 2

1,57	1,91	1,76	1,58	1,68	1,65	1,55	1,82	2,10
1,58	2,25	1,88	2,02	2,27	1,85	1,79	2,45	1,84
2,05	1,94	1,80	2,50	1,64	2,30	1,72	2,04	2,41
1,97	2,46	2,42	2,39	2,14	1,88	2,43	2,05	2,29
1,93	2,07	1,59	1,71	1,67	2,21	2,37	2,10	2,26
2,10	1,82	2,34	2,46	1,64	1,72	2,49	1,79	2,24
1,67	1,54	1,82	2,45	1,66	1,73			

Варіант 3

0,13	3,94	5,67	0,16	1,80	1,24	0,48	2,96	0,80
1,87	4,12	3,69	2,68	4,87	0,40	0,49	2,50	5,98
1,40	3,74	5,15	4,35	3,48	3,23	0,08	5,24	1,96
4,80	0,35	2,09	5,01	3,49	2,85	4,43	5,40	4,50
1,81	0,80	5,84	1,43	1,38	5,88	5,77	5,51	0,92
3,41	3,48	0,27	3,72	4,07	4,46	2,88	3,13	4,04
3,18	3,12	1,11	2,89	2,58	5,07			

Варіант 4

4,05	3,37	4,46	4,82	3,72	3,77	3,18	4,16	3,08
4,83	4,61	4,90	3,41	4,67	3,03	3,15	3,97	4,61
4,14	4,80	3,87	4,49	4,68	3,47	4,73	4,52	3,81
4,32	4,75	3,01	4,83	3,25	4,06	3,13	4,13	3,45
4,04	4,23	4,19	3,37	4,25	3,56	4,77	3,04	4,65
4,34	3,64	3,08	4,36	4,73	3,47	3,17	4,65	4,45
4,70	3,38	3,40	4,95	4,24	4,94			

Варіант 5

5,54	2,55	2,92	2,59	5,42	8,12	8,86	2,04	6,67
1,29	7,31	1,50	7,43	1,80	1,47	1,01	2,17	8,43
6,73	8,31	3,81	7,66	2,57	3,73	1,91	7,71	5,34
2,70	6,69	3,86	1,10	6,00	8,56	4,14	6,62	5,21
6,08	7,13	2,34	6,84	6,91	1,67	2,79	7,68	2,66
1,51	5,24	5,39	5,65	3,59	2,44	7,11	1,87	1,31
3,22	5,15	6,20	6,29	5,44	5,75			

Варіант 6

7,61	4,72	3,63	7,06	6,79	4,35	5,91	7,15	6,76
7,01	4,60	5,78	5,89	4,89	3,63	4,60	8,13	7,74
5,04	5,01	7,83	6,10	6,33	4,00	6,67	6,59	7,57
6,76	4,48	3,68	5,15	6,73	6,17	7,61	6,39	4,96
6,86	3,55	5,60	5,79	3,56	6,99	3,74	6,06	7,25
4,21	7,67	4,58	4,85	5,21	4,84			

Варіант 7

4,60	8,61	7,61	6,02	10,00	6,11	9,58	9,63	8,15
4,31	8,82	7,74	6,63	8,86	8,37	9,20	8,52	8,93
4,93	9,59	5,76	9,65	5,67	7,95	7,42	6,69	7,38
8,42	7,84	5,65	8,70	4,30	7,51	5,05	7,43	7,25
7,12	4,85	8,00	4,22	9,68	7,75	5,42	7,83	6,42
5,65	7,03	7,78	7,88	6,18	8,38	8,89	8,37	8,37
4,92	7,69	5,65	9,95	8,20	4,87			

Варіант 8

6,16	6,10	5,90	8,37	5,71	6,02	10,00	5,06	9,42
5,40	5,25	9,15	8,84	7,86	9,76	7,79	10,08	9,26
8,08	9,28	6,46	10,01	8,45	10,28	5,03	5,81	6,73
5,23	10,66	5,02	7,82	6,70	6,11	8,23	6,72	7,51
6,19	9,00	9,48	7,01	7,58	7,87	6,92	5,66	5,24
8,81	8,45	8,18	10,39	9,43	9,46	8,62	9,24	10,91
5,85	9,34	9,74	9,34	5,51	8,94			

Варіант 9

9,93	9,27	9,60	8,28	8,60	8,50	8,29	9,32	8,39
8,86	8,88	9,53	8,40	9,50	9,69	8,33	9,39	9,35
9,26	9,57	8,95	9,13	9,80	8,33	9,11	9,24	8,63
9,37	9,48	8,33	9,07	8,56	8,70	9,85	8,51	8,44
8,16	8,70	9,77	9,87	8,91	8,66	8,64	8,07	8,36
8,52	8,08	8,26	8,63	8,14	9,88	9,28	8,14	9,05
8,87	8,14	9,74	8,14	9,46	8,50			

Варіант 10

6,03	10,49	13,69	8,88	13,93	12,63	10,98	11,46	6,78
11,65	8,71	12,11	12,52	8,14	7,86	11,92	7,24	11,04
11,36	10,56	11,77	6,41	11,17	11,00	6,06	12,99	12,35
11,01	8,48	13,45	8,58	6,35	7,49	6,70	8,33	12,47
13,23	13,56	12,53	7,75	13,89	10,44	11,74	8,73	8,46
12,86	9,70	6,81	13,43	8,56	12,88	12,04	7,94	11,82
6,37	10,76	10,24	9,33	6,80	9,51			

Варіант 11

10,38	13,69	10,60	13,12	7,56	12,41	11,00	6,86	5,45
9,28	6,07	15,14	13,81	13,79	5,44	15,60	10,11	16,85
6,25	15,45	16,91	5,63	7,93	11,62	9,97	12,25	14,08
10,90	15,99	8,80	10,24	7,63	15,61	15,33	12,82	15,13
14,73	6,53	6,59	14,16	10,48	6,56	12,30	13,94	9,66
7,42	5,10	16,50	8,43	5,04	12,48	9,64	7,33	14,85
11,40	16,36	8,80	9,49	10,47	9,81			

Варіант 12

16,05	8,31	18,58	17,18	13,17	12,86	20,54	5,25	9,51
12,33	5,58	19,12	3,30	13,95	18,32	20,80	3,82	15,48
18,07	3,41	15,21	3,02	3,65	3,99	13,30	12,95	20,36
18,10	3,89	3,46	4,29	18,66	3,14	6,85	18,69	5,77
3,16	10,56	11,04	11,97	6,22	3,95	17,75	8,22	19,70
7,38	16,58	17,15	11,37	20,85	19,94	15,87	15,60	8,30
13,45	6,35	17,37	9,93	9,84	12,37			

Варіант 13

11,96	9,94	15,98	2,49	8,48	2,28	11,61	22,92	4,68
17,86	0,58	8,24	6,89	9,22	2,28	25,87	22,72	6,65
15,99	5,25	11,20	15,19	24,11	15,23	20,41	3,12	6,56
23,93	9,90	23,54	21,40	3,20	1,96	2,73	5,06	25,12
15,01	8,99	21,31	21,79	16,98	22,27	7,03	17,34	8,34
25,66	18,66	1,00	9,62	11,78	12,16	25,56	0,31	11,82
11,03	17,63	6,20	7,43	9,99	7,59			

Варіант 14

14,20	13,40	14,56	14,51	14,77	12,40	15,86	12,56	15,03
15,34	14,03	14,30	12,89	15,90	14,35	15,79	12,86	12,04
14,15	15,30	15,68	12,26	12,99	14,91	13,63	12,70	12,17
14,28	14,78	15,09	14,86	12,99	15,59	12,61	13,20	13,82
13,01	14,22	14,77	14,28	15,82	13,95	14,87	15,47	13,14
15,72	13,17	13,70	15,97	15,10	15,50	14,06	12,20	12,78
13,50	13,76	12,54	12,25	14,71	15,16			

Варіант 15

18,42	22,30	18,98	15,43	4,83	6,65	4,59	21,65	16,35
18,83	11,97	21,42	5,52	20,44	24,81	21,46	27,55	24,76
6,47	24,75	8,47	14,20	22,04	20,28	26,63	25,35	8,58
16,14	9,23	11,14	18,31	23,65	5,80	14,88	8,35	22,01
14,32	24,69	26,82	17,22	10,21	16,61	11,14	22,39	5,34
4,19	4,93	22,84	12,03	6,00	15,17	12,21	10,99	24,32
15,76	16,61	7,36	13,92	6,59	5,94			

Варіант 16

15,38	16,51	15,05	16,75	15,16	15,57	16,60	16,72	16,59
16,04	15,36	15,22	15,71	16,18	16,06	16,06	16,79	16,40
15,28	16,39	15,52	16,19	15,11	16,13	15,83	15,87	15,16
16,82	16,79	16,27	16,20	15,92	15,93	15,72	15,29	15,22
16,67	15,28	16,71	15,48	15,57	16,88	15,74	16,61	16,12
16,94	16,22	15,38	15,53	15,31	16,60	16,27	16,95	15,06
16,91	16,10	15,61	15,55	16,35	15,27			

Варіант 17

18,77	15,45	17,98	17,14	15,70	17,96	16,67	17,62	16,93
18,74	17,15	18,35	18,00	18,61	16,19	15,27	16,83	15,90
15,64	18,51	17,08	17,72	15,18	15,81	17,92	16,16	18,07
17,86	15,49	15,48	15,45	16,62	15,26	17,17	16,70	18,10
18,21	17,52	16,32	18,70	18,20	18,70	16,09	17,24	16,05
18,75	15,25	16,27	15,78	15,79	16,41	16,01	17,52	16,33
16,50	17,99	17,88	17,02	16,61	16,59			

Варіант 18

18,57	14,64	14,88	17,53	21,18	16,80	19,38	18,29	21,94
21,68	17,65	19,58	19,30	20,95	17,21	20,19	16,28	20,25
18,34	15,69	16,43	20,90	21,15	21,75	16,04	18,80	17,36
17,16	18,13	17,61	21,26	18,09	19,22	20,65	18,98	20,18
15,15	17,59	21,10	15,49	16,11	14,23	21,65	21,11	20,38
19,18	16,84	15,13	21,86	16,80	18,09	15,19	14,04	19,15
17,83	21,61	20,97	18,62	15,66	14,75			

Варіант 19

19,29	20,45	19,87	19,33	18,23	21,97	21,06	20,93	21,86
18,26	17,08	16,92	21,43	16,29	17,83	19,11	21,03	20,16
20,27	20,03	19,41	19,80	20,28	17,51	21,26	16,21	18,48
20,88	21,32	18,47	20,03	19,82	18,55	19,38	21,13	21,78
19,36	20,61	21,73	17,32	20,82	19,85	16,97	18,02	17,25
20,17	18,99	16,02	20,81	17,37	17,74	19,96	17,87	18,23
21,09	16,45	21,06	18,03	19,68	20,32			

Варіант 20

22,37	19,83	20,94	21,37	18,85	18,72	20,12	17,83	21,61
21,54	17,97	19,16	19,09	20,61	19,91	18,16	20,40	18,75
19,34	17,51	21,31	17,50	21,60	21,63	17,57	21,85	17,67
21,25	18,86	20,38	21,29	20,07	18,93	21,38	22,23	18,46
19,23	19,76	20,35	22,12	18,03	19,08	22,17	18,05	20,25
19,56	20,62	19,90	21,22	18,38	20,19	17,91	18,93	19,87
22,24	18,73	18,73	20,70	18,18	21,33			

Варіант 21

16,84	16,97	17,53	17,49	21,18	23,87	22,57	23,04	21,46
25,79	18,62	26,39	16,15	23,13	25,77	20,20	21,43	19,28
16,07	20,72	17,30	24,99	25,19	20,08	19,46	17,63	16,48
24,43	25,73	23,88	18,81	23,53	22,52	24,55	18,49	16,43
17,29	16,72	16,52	19,43	24,17	21,77	18,66	22,21	16,36
16,19	16,92	16,67	18,98	22,22	21,66	24,23	16,96	24,38
25,45	19,27	21,68	23,74	17,10	21,82			

Варіант 22

23,15	20,36	20,89	23,70	23,39	19,43	21,51	20,15	19,01
21,79	23,92	21,49	20,60	18,98	25,40	21,40	20,17	23,54
21,74	19,20	25,01	19,50	22,67	18,81	20,56	23,56	25,19
19,49	22,05	21,61	23,32	23,16	23,00	21,32	22,46	18,59
22,89	19,78	18,97	19,06	25,40	20,25	24,43	19,22	22,70
23,60	21,09	20,40	19,65	19,23	25,43	22,85	23,22	19,45
19,53	24,68	25,33	22,81	22,18	24,96			

Варіант 23

22,81	26,38	19,37	21,99	22,41	24,18	20,89	25,59	21,67
20,64	22,00	26,84	21,86	23,78	21,48	24,41	25,48	20,05
21,82	25,80	24,99	21,54	23,11	22,76	22,30	26,95	25,70
23,44	23,75	25,09	24,67	20,04	25,78	25,26	26,59	21,97
19,44	19,55	21,64	20,61	20,53	22,81	19,87	26,63	20,92
26,83	25,64	22,55	19,86	19,05	20,57	26,80	20,53	24,39
22,48	21,76	20,88	20,20	23,48	22,74			

Варіант 24

20,20	23,76	24,27	28,22	27,58	20,82	28,37	27,02	23,96
24,56	27,10	24,89	24,03	24,72	23,94	28,67	26,34	23,39
26,99	27,07	21,91	23,03	19,97	23,82	19,81	28,79	21,66
27,96	26,95	19,31	25,19	26,31	21,92	22,79	23,46	23,38
21,03	25,52	27,68	19,36	21,74	20,91	19,29	21,56	27,22
27,81	22,64	20,70	23,52	26,22	24,59	23,20	25,89	26,84
23,86	27,35	20,29	23,77	24,29	28,84			

Варіант 25

33,30	22,64	32,57	17,86	28,01	32,87	26,56	24,71	31,77
32,23	29,27	27,69	18,04	33,26	17,42	22,63	31,45	26,00
26,76	18,78	32,36	29,33	28,30	27,30	16,20	33,74	18,89
19,68	24,92	21,08	24,13	25,43	20,08	24,78	29,67	32,05
22,44	23,59	23,23	24,60	23,45	25,62	15,95	20,86	20,80
29,71	16,59	22,44	28,97	29,03	24,49	23,64	28,42	32,87
30,47	15,52	15,76	20,57	34,32	29,27			

Варіант 26

25,75	26,37	24,96	25,65	25,82	26,29	24,41	27,60	26,12
27,88	26,13	24,76	25,60	24,24	26,61	27,29	24,94	25,43
25,31	27,33	26,69	25,34	24,16	24,21	24,45	24,72	27,66
24,98	24,29	27,61	25,49	26,82	25,61	27,01	26,90	27,94
27,91	26,73	27,64	26,62	26,61	26,50	27,13	25,43	25,19
27,30	27,13	26,20	27,87	26,85	25,39	24,22	27,55	24,25
25,18	25,72	27,18	27,49	27,00	26,04			

Варіант 27

28,09	25,57	28,13	25,38	28,77	27,12	26,83	28,63	27,51
27,53	27,48	25,92	27,61	27,28	26,90	26,65	25,90	28,05
27,30	25,56	26,90	27,02	25,15	28,01	25,69	25,38	26,52
26,53	27,98	28,45	25,29	26,85	25,43	27,88	26,98	28,32
28,37	25,56	27,78	26,83	25,94	27,11	26,70	25,50	28,01
26,53	25,07	27,19	27,97	28,59	28,64	27,39	28,29	26,03
27,88	25,56	26,80	28,56	27,43	26,22			

Варіант 28

30,44	27,37	28,19	28,36	27,50	28,74	27,91	27,46	29,38
28,18	27,06	26,36	30,49	30,40	29,35	27,11	27,00	27,65
25,92	26,05	26,83	26,04	27,41	27,70	26,83	28,63	26,03
29,21	27,27	26,39	29,01	28,67	27,92	28,67	30,30	29,58
29,33	27,26	28,91	26,77	25,80	26,99	28,48	29,59	28,60
27,52	30,15	26,46	26,68	25,56	29,28	28,77	25,96	28,28
29,20	30,02	26,61	25,98	27,29	29,42			

Варіант 29

30,82	30,78	25,89	30,99	27,37	32,77	31,67	31,78	30,22
29,38	28,90	27,63	29,83	27,04	31,63	28,48	27,68	30,55
25,50	32,07	25,25	26,76	26,44	25,91	29,62	26,62	32,53
30,28	31,94	31,73	26,76	31,10	28,01	32,38	28,78	27,39
27,65	27,56	32,15	25,48	27,19	32,62	30,18	26,69	26,57
31,11	26,61	27,70	27,00	28,17	31,71	29,04	31,62	31,40
31,35	26,30	29,29	30,64	29,23	25,28			

Варіант 30

33,21	32,01	27,91	28,01	27,77	28,02	26,16	28,64	29,92
32,65	33,11	32,65	33,92	32,29	30,15	28,93	29,96	26,64
30,55	33,47	27,81	26,76	29,14	27,03	32,26	33,62	29,62
32,33	32,26	29,46	31,56	33,03	32,33	32,95	32,24	33,74
26,34	26,32	31,39	26,84	33,77	28,63	30,99	27,62	32,01
26,24	26,92	33,70	32,45	31,19	28,01	28,24	29,43	29,37
28,04	33,38	29,49	26,85	31,86	26,45			

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. − М.: Высшая школа, 2003. − 479 с.

2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. − М.: Высшая школа, 2006. − 405 с.

3 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. − М.: Наука,1969 − 576 с.

4 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. − М.: Высш. шк., 2002. − Ч.2 − 416 с.

5 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. – М.: ЮНИТИ, 2009. – 551 с

Додаток А

Таблиця А.1 – Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	Ф(х)	x	Ф(х)	(x)	Ф(х)	(x)	Ф(х)
0,00	0,0000	0,64	0,2389	1,28	0,3997	1,93	0,4732
0,01	0,0040	0,65	0,2422	1,29	0,4015	1,94	0,4738
0,02	0,0080	0,66	0,2454	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,03	0,0,20	0,67	0,2486	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,04	0,0160	0,68	0,2517	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,05	0,0199	0,69	0,2549	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,06	0,0239	0,70	0,2580	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,07	0,0279	0,71	0,2611	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,08	0,0319	0,72	0,2642	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,09	0,0359	0,73	0,2673	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,10	0,0398	0,74	0,2703	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,11	0,0438	0,75	0,2734	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,12	0,0478	0,76	0,2764	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,13	0,0517	0,77	0,2794	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,14	0,0557	0,78	0,2823	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,15	0,0596	0,79	0,2852	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,16	0,0636	0,80	0,2881	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,17	0,0675	0,81	0,2910	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,18	0,0714	0,82	0,2939	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,19	0,0753	0,83	0,2967	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,20	0,0793	0,84	0,2995	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,21	0,0832	0,85	0,3023	1,49	0,,4319	2,28	0,48о7
0,22	0,0871	0,86	0,3051	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,23	0,0910	0,87	0,3078	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,24	0,0948	0,88	0,3106	1,52	0,4357	2,34	0,4909
0,25	0,0987	0,89	0,3133	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,26	0,1026	0,90	0,3159	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,27	0,1064	0,91	0,3186	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,28	0,1103	0,92	0,3212	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,29	0,1141	0,93	0,3238	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,30	0,1179	0,94	0,3264	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,31	0,1217	0,95	0,3289	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,32	0,1255	0,96	0,3315	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,33	0,1293	0,97	0,3340	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,34	0,1331	0,98	0,3365	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,35	0,1368	0,99	0,3389	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,36	0,1406	1,00	0,3413	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,37	0,1443	1,01	0,3438	1,65	0,4505	2,60	0,4953

Продовження таблиці А.1

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,38	0,1480	1,02	0,3461	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,39	0,1517	1,03	0,3485	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,40	0,1554	1,04	0,3508	1,68	0,4535	2,66	0,,4961
0,41	0,1591	1,05	0,3531	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,42	0,1628	1,06	0,3554	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,43	0,1664	1,07	0,3577	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,44	0,1700	1,08	0,3599	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,45	0,1736	1,09	0,3621	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,46	0,1772	1,10	0,3643	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,47	0,1808	1,11	0,3665	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,48	0,1844	1,12	0,3686	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,49	0,1879	1,13	0,3708	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,50	0,1915	1,14	0,3729	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,51	0,1950	1,15	0,3749	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,52	0,1985	1,16	0,3770	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,53	0,2019	1,17	0,3790	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,54	0,2054	1,18	0,3810	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,55	0,2088	1,19	0,3830	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,56	0,2123	1,20	0,3849	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,57	0,2157	1,21	0,3869	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,58	0,2190	1,22	0,3883	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,59	0,2224	1,23	0,3907	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,60	0,2257	1,24	0,3925	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,61	0,2291	1,25	0,3944	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,62	0,2324	1,26	0,3962	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,63	0,2357	1,27	0,3980	1,91	0,4719	4,50	0,499997
				1,92	0,4726	5,00	0,499997

Додаток Б

Таблиця Б.1 – Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до розрахунково-графічної роботи з дисципліни

«*ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА*»

Відповідальний за випуск Панченко Н.Г.

Редактор Решетилова В.В.

Підписано до друку 08.06.11 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,25. Тираж 100. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.