ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧИХ
СИСТЕМ ТА ТЕХНОЛОГІЙ

**Кафедра обчислювальної техніки та систем управління**

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ЕОМ

***Конспект лекцій***

**Частина 1**

**Харків – 2017**

Меркулов В. С., Бізюк І. Г. Математичні моделі на ЕОМ: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2017. – Ч. 1. – 60 с.

Конспект лекцій розроблено відповідно до робочих програм спеціальності «Залізничний транспорт» з дисципліни «Математичні моделі на ЕОМ».

Метою лекцій є набування необхідних знань з математичного моделювання технічних систем та використанні отриманих теоретичних засад при проектуванні та дослідженні рухомого складу.

Рекомендується для студентів спеціальності “Залізничний транспорт“ всіх форм навчання.

Іл. 32, бібліогр.: 8 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри обчислювальної техніки та систем управління 27 березня 2017 р., протокол № 8.

Рецензент

проф. І. Е. Мартинов

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НА ЕОМ

*Конспект лекцій*

Частина 1

Відповідальний за випуск Бізюк І. Г.

Редактор Решетилова В. В.

Підписано до друку 28.03.17 р.

Формат паперу 60х84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 2,00. Тираж 50. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

## ЗМІСТ

## Вступ

Управління перевізним процесом на залізничному транспорті має здійснюватись на основі точної інформації про розміщення і стан вагонів, локомотивів і бригад, про час вантаження і вивантаження для своєчасного здійснення регулювальних заходів. Разом з тим необхідна оптимізація планів перевезень, технічних норм експлуатаційної роботи, плану формування, графіка руху поїздів, оперативних планів та інших планових і нормативних документів, щоб максимально поліпшити використання технічних засобів доріг, підвищити продуктивність, поліпшити умови роботи, в тому числі і при проектуванні, плануванні, організації, управлінні транспортним господарством.

Транспорт є галуззю, яка знаходиться на стику виробничої сфери і сфери послуг. Він не створює ніяких матеріальних цінностей, а забезпечує перевезення вантажів і людей, розвиваючи зв'язки між підприємствами, галузями, регіонами. Для забезпечення роботи господарства країни всі види транспорту повинні бути взаємопов'язані, працювати злагоджено. Сукупність усіх видів транспорту, об'єднаних між собою транспортними мережами (дорогами) і вузлами, в яких відбувається обмін вантажами і пасажирами, називається ***транспортною системою***.

Математичні методи і ЕОМ застосовуються для вирішення наукових, технічних, економічних завдань, проектування складних об'єктів і керування їх роботою, для збору та обробки інформації в наукових експериментах, для пошуку і реалізації оптимальних режимів виробничо-технологічних процесів і т. д. [2].

Потреби практики викликали до життя спеціальні наукові методи, які об'єднані назвою "***дослідження операцій***". Під цим терміном розуміють застосування математичних, кількісних методів для обґрунтування рішень у всіх галузях цілеспрямованої людської діяльності.

Процес математизації та комп'ютеризації науки привів до формування сучасної ***прикладної математики***. Розділи обчислювальної математики, що використовуються в процесах прийняття рішень, відіграють все більш важливу роль в дослідженні операцій.

# 1 ЗАГАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МОДЕЛІ

## 1.1 Основні поняття і принципи системного підходу

***Система*** — це відокремлений в навколишньому зовнішньому середовищі та такий, що взаємодіє з ним, об'єкт з наступними взаємопов'язаними властивостями:

• має мету (призначення), для досягнення якої функціонує;

• складається із взаємозалежних частин-компонентів, які утворюють багаторівневу ієрархічну структуру і виконують певні функції, спрямовані на досягнення мети об'єкта;

• має управління, завдяки якому всі компоненти функціонують узгоджено і цілеспрямовано;

• має у своєму складі або у зовнішньому середовищі джерела енергії і матеріалів для функціонування;

• володіє інтегративними властивостями, які не зводяться до простої суми властивостей її компонентів.

***Системний підхід*** — це методологія науки на рівні загальнонаукових принципів і форм дослідження, які застосовуються у різноманітних галузях науки. У його основі — прагнення вивчити об'єкт (систему, проблему, явище, процес) як щось цілісне і організоване, у всій його повноті і усій безлічі зв'язків.

### 1.1.1 Ключові поняття

Під ***альтернативами*** розуміють можливі шляхи або засоби досягнення мети досліджуваної системи.

Під ***показником ефективності*** системи розуміють таку її характеристику, яка кількісно оцінює ступінь досягнення мети.

Для вибору більш прийнятної альтернативи використовують критерії — правила, на основі яких за значеннями показників приймаються рекомендації щодо вибору альтернатив.

***Методи наукового дослідження*** поділяються на аналіз і синтез.

Під ***аналізом*** розуміється спосіб дослідження шляхом логічного (уявного) розкладання цілого (системи, процесу) на складові та вивчення окремих сторін і властивостей цілого і його складових частин і т. п.

Основним принципом, який приймається в процесі аналізу, є поділ складної проблеми на окремі завдання, які легше піддаються вирішенню, а також розчленування системи або процесу її функціонування на компоненти.

***Синтез*** — засіб дослідження системи або процесу шляхом возз'єднання цілого з частин, узагальнення і зведення в єдине ціле даних, які були здобуті аналізом.

Завдання аналізу полягає у визначенні властивостей системи з її структурою і значенням параметрів.

Задача синтезу полягає у визначенні структури та значень параметрів системи за заданими властивостями.

Визначення якості функціонування системи, вибір оптимальної структури та алгоритму поведінки, побудова системи відповідно до поставленої перед нею мети — ***головна проблема при проектуванні сучасних великих систем.***

### 1.1.2 Основні етапи дослідження систем:

• постановка завдання;
• вибір критеріїв;
• розробка моделі;
• дослідження моделі;
• вироблення рекомендацій.

***Постановка задачі*** включає: формулювання суті завдання дослідження; визначення мети системи; вибір альтернативних шляхів її досягнення.

***Вибір критеріїв*** прийняття рекомендацій є відповідальним етапом дослідження системи і полягає у виборі таких показників ефективності і якості системи і такого правила прийняття рекомендацій, щоб за числовими значеннями показників можна було судити про успішність розв'язання задачі.

***Розроблення математичної моделі*** — центральний етап дослідження будь-якої системи, його складові: побудова моделі; вибір відповідного чисельного методу розв'язання задачі; розроблення алгоритму її розв’язання; програмування моделі обчислювального процесу для ЕОМ; підготовка вхідних даних, необхідних для побудови моделі і для проведення подальших обчислень.

***Дослідження моделі*** виконується на ЕОМ (найчастіше в діалоговому режимі) через обчислювальний експеримент — процедуру організації і спостереження яких-небудь явищ, які здійснюються в умовах, близьких до реальних, або імітують їх [3].

Розрізняють ***два типи експериментів***:

• ***пасивний***, коли дослідник спостерігає за процесом, не втручаючись в нього;

• ***активний***, коли спостерігач втручається і організовує проходження процесу.

***Вироблення рекомендацій*** **—** останній етап дослідження, на якому аналізуються результати чисельного дослідження моделі і приймаються рекомендації щодо вибору варіанта вирішення поставленого завдання.

Практика свідчить: найкращий засіб для визначення властивостей об'єкта — ***натурний експеримент***, тобто дослідження властивостей і поведінки самого об'єкта в потрібних умовах. Справа в тому, що при проектуванні неможливо врахувати багато факторів, розрахунок ведеться за усередненими довідковими даними, використовуються нові, недостатньо перевірені елементи, змінюються умови зовнішнього середовища і багато іншого. Тому натурний експеримент — необхідна ланка дослідження. Неточність розрахунків компенсується збільшенням обсягу натурних експериментів, створенням ряду дослідних зразків та "доведенням" виробу до потрібного стану. Однак у багатьох випадках натурний експеримент недоцільний або взагалі неможливий. Наприклад, найбільш повну оцінку нового виду озброєння та способів його застосування може дати війна. Але чи не буде це занадто пізно?

• Натурний експеримент з новою конструкцією літака може викликати загибель екіпажу.

• Натурне дослідження нових ліків небезпечно для життя людини.

• Натурний експеримент з елементами космічних станцій також може викликати загибель людей.

• Час підготовки натурного експерименту та проведення заходів для забезпечення безпеки часто значно перевершують час самого експерименту.

• Багато випробувань, близьких до граничних умов, можуть протікати настільки бурхливо, що можливі аварії та руйнування частини або всього об'єкта.

Вихід з цієї суперечності називається "***моделювання***".

*Моделювання* — це, по-перше, процес створення або відшукання в природі об'єкта, який у певному сенсі може замінити досліджуваний об'єкт. Цей проміжний об'єкт називається моделлю.

Модель може бути матеріальним об'єктом тієї ж або іншої природи по відношенню до досліджуваного об'єкту (оригіналу). Модель може бути уявним об'єктом, відтворюють оригінал логічними побудовами або математичними формулами і комп'ютерними програмами.

*Моделювання*, по-друге, це випробування, дослідження моделі.

Тобто моделювання пов'язане з експериментом, що відрізняється від натурного тим, що процес пізнання включає "проміжну ланку" — модель.

Отже, модель є одночасно засобом і об'єктом експерименту, що замінює досліджуваний об'єкт.

*Моделювання*, по-третє, це перенесення отриманих на моделі даних на оригінал або, інакше, приписування властивостей моделі оригіналу. Щоб такий перенос був виправданий, між моделлю та оригіналом має бути схожість, подібність. Подібність може бути фізична, геометрична, структурна, функціональна і т. д.

***Ступінь подібності*** може бути різним — від тотожності у всіх аспектах до подібності тільки в головному. Очевидно, моделі не повинні відтворювати повністю всі сторони досліджуваних об'єктів. Досягнення абсолютної подібності зводить до моделювання натурного експерименту, про можливість або доцільність якого було вже сказано.

### 1.1.3 Цілі моделювання

Модель необхідна для того, щоб:

- зрозуміти, як влаштований конкретний об'єкт: яка його структура, основні властивості, закони розвитку і взаємодії з навколишнім світом;

• навчитися управляти об'єктом (або процесом) і визначити найкращі способи управління при заданих цілях і критеріях;

• прогнозувати прямі та побічні наслідки реалізації заданих способів і форм впливу на об'єкт.

***Прогноз*** — оцінка поведінки системи при певному поєднанні її керованих і некерованих параметрів. Прогноз — головна мета моделювання.

Для пояснення і кращого розуміння об'єктів найчастіше доводиться вирішувати завдання оптимізації і аналізу чутливості.

***Оптимізація*** — це точне визначення такого поєднання факторів і їх величин, при якому забезпечуються найкращий показник якості системи, найкраще за яким-небудь критерієм досягнення мети моделюється системою.

***Аналіз чутливості*** — виявлення з великого числа чинників тих, які найбільшою мірою впливають на функціонування модельованої системи. Вихідними даними при цьому є результати експериментів з моделлю.

### 1.1.4 Приклади моделей

Найпростіші моделі:

- рівняння стану ідеального газу;

$pV=\frac{mRT}{\mu}$

закон всесвітнього тяжіння;

$F=G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

закон збереження енергії;

$\frac{mv^2}{2}=mgh$

закон Кулона;

закон збереження енергії для фотона, де $F=k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ $mc^2=h\nu$ — частота випромінювання.

Складні моделі описують об'єкт точніше.

### 1.1.4.1 Задача про рух снаряда

Снаряд пущений з Землі з початковою швидкістю $v_0 = 30$ ***м/с*** під кутом $\alpha = 45°$ до її поверхні; потрібно знайти траєкторію його руху і відстань ***S*** між початковою і кінцевою точкою цієї траєкторії.

Нехтуючи розмірами снаряда, будемо вважати його матеріальною точкою. Введемо систему координат ***xOy***, поєднавши її початок ***0*** з вихідною точкою, з якої пущений снаряд, вісь ***x*** направимо горизонтально, а вісь ***y*** — вертикально (рисунок 1).

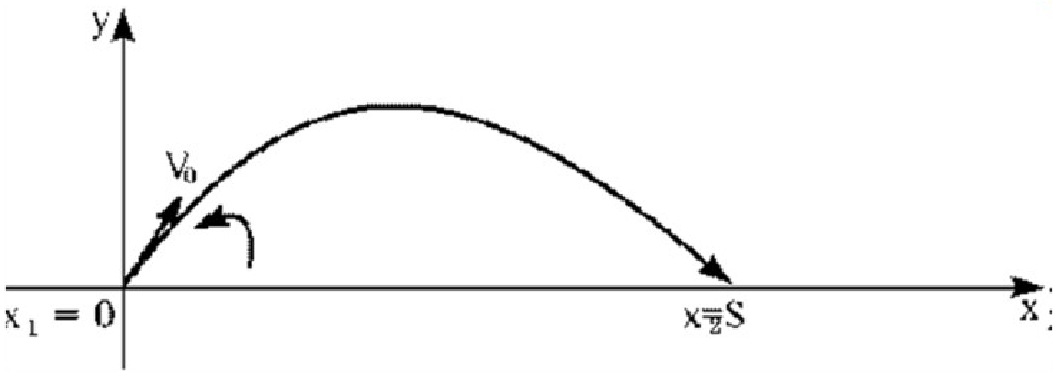


Рисунок 1 — Траєкторія руху снаряда

Тоді, як це відомо з шкільного курсу фізики, рух снаряда описується формулами

$$x = tv_0 \cos\alpha, \quad y = tv_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

де ***t*** — час, $g = 10$ ***м/с²*** — прискорення вільного падіння. Ці формули дають математичну модель поставленої задачі. Висловлюючи ***t*** через ***x*** з першого рівняння і підставляючи в друге, отримаємо рівняння траєкторії руху снаряда

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{x^2 g}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Ця крива (парабола) перетинає вісь $x$ у двох точках: $x_1 = 0$ (початок траєкторії) і $x_2 = S = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (місце падіння снаряда).

Підставляючи в отримані формули задані значення $v_0$ а, отримаємо відповідь: $y = x - 90x^2$, $S = 90$ *м.*

Зазначимо, що при побудові цієї моделі використано ряд припущень: наприклад, вважається, що Земля плоска, а повітря і обертання Землі не впливають на рух снаряда.

### 1.1.4.2 Задача про бак з найменшою площею поверхні

Потрібно знайти висоту $h_0$ і радіус $r_0$ жерстяного бака об'ємом $V = 30$ *м*$^3$, що має форму закритого кругового циліндра, при яких площа його поверхні $S$ мінімальна (в цьому випадку на його виготовлення піде найменша кількість жерсті).

Запишемо формулу для об'єму та площі поверхні циліндра висоти $h$ і радіуса $r$:

$$V = pr^2h, \; S = 2pr(r + h).$$

Виражаючи $h$ через $r$ і $V$ з першої формули і підставляючи отриманий вираз у другу, одержимо

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Таким чином, з математичної точки зору, задача зводиться до визначення такого значення $r$, при якому досягає свого мінімуму функція $S(r)$. Знайдемо ті значення $r_0$, при яких похідна $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$ обертається в нуль: $r_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Можна перевірити, що друга похідна функції $S(r)$ змінює знак з мінуса на плюс при переході аргументу $r$ через точку $r_0$. Отже, в точці $r_0$ функція $S(r)$ має мінімум. Відповідне значення $h_0 = 2r_0$.

Підставляючи у вираз для $r_0$ і $h_0$ задане значення $V$, отримаємо шуканий радіус і висоту

$$r_0 = (4{,}78)^{\frac{1}{3}} \quad h_0 = 2 \cdot (4{,}78)^{\frac{1}{3}} .$$

#### 1.1.4.3 Транспортна задача

У місті є два склади борошна і два хлібозаводи. Щодня з першого складу вивозять ***50* т** борошна, а з другого — ***70* т** на заводи, причому на перший — ***40* т**, а на другий — ***80* т**.

Позначимо через $a_{ij}$ вартість перевезення 1 т борошна з $i$-го складу на $j$-й завод ($i, j$ = 1,2). Нехай $a_{11} = 1{,}2$ гр., $a_{12} = 1{,}6$ гр., $a_{21} = 0{,}8$ гр., $a_{22} = 1$ гр.

Як потрібно спланувати перевезення, щоб їх вартість була мінімальною?

Додамо задачі математичне формулювання. Позначимо через $x_1$ і $x_2$ кількість борошна, яке треба перевезти з першого складу на перший і другий заводи, а через $x_3$ і $x_4$ — з другого складу на перший і другий заводи відповідно.

Тоді

$$x_1 + x_2 = 50,\ x_3 + x_4 = 70,\ x_1 + x_3 = 40,\ x_2 + x_4 = 80 \qquad (1)$$

Загальна вартість всіх перевезень визначається формулою

$$f = 1{,}2x_1 + 1{,}6x_2 + 0{,}8x_3 + x_4 .$$

З математичної точки зору, завдання полягає в тому, щоб знайти чотири числа ***x1, x2, x3*** і ***x4***, що задовольняють всі умови і дають мінімум функції $f$.

Розв’яжемо систему рівнянь (1) відносно $x_i$ ($i$ = 1,2, 3, 4) методом виключення невідомих. Отримаємо

$$x_1 = x_4 - 30,\ x_2 = 80 - x_4,\ x_3 = 70 - x_4, \qquad (2)$$

а $x_4$ не може бути визначено однозначно. Так як $x_i > 0$ ($i$ = 1,2, 3, 4), з рівнянь (2) випливає, що $30 <= x_4 <= 70$. Підставляючи вираз для $x_1, x_2, x_3$ у формулу для $f$, отримаємо $f = 148 – 0,2x_4$.

Легко бачити, що мінімум цієї функції досягається при максимально можливому значенні $x_4$, тобто при $x_4 = 70$. Відповідні значення інших невідомих визначаються за формулами (2): $x_1 = 40, x_2 = 10, x_3 = 0$.

### 1.1.4.4 Задача про радіоактивний розпад

Нехай $N(0)$ — початкова кількість атомів радіоактивної речовини, а $N(t)$ — кількість атомів, що розпалися, у момент часу $t$. Експериментально встановлено, що швидкість зміни кількості цих атомів $N'(t)$ пропорційна $N(t)$, тобто $N'(t)= –\lambda N(t)$, $\lambda>0$ — константа радіоактивного розпаду (визначає, наскільки швидко розпадається ядро). Рішення цього диференціального рівняння має вигляд $N = N0e–\lambda t$.

Час $T$, за який число вихідних атомів зменшилося вдвічі, називається періодом напіврозпаду, і є важливою характеристикою радіоактивності речовини. Для визначення $T$ треба покласти у формулі $\frac{N(t)}{N(0)} = 0,5.$

Тоді, наприклад, для радону $\lambda = 2,084 \cdot 10^{-6,}$ і отже, $T = 3,15$ доб.

### 1.1.5 Принципи і підходи до побудови математичних моделей

Принципи визначають ті загальні вимоги, яким повинна відповідати правильно побудована модель.

Математичне моделювання вважають швидше мистецтвом, ніж стрункою й завершеною теорією. Тут велику роль відіграє досвід, інтуїція та інші інтелектуальні якості людини. Тому неможливо написати досить формалізовану інструкцію, що визначає, як повинна будуватися модель тієї чи іншої системи. Тим не менш відсутність точних правил не заважає досвідченим фахівцям будувати вдалі моделі. До теперішнього часу вже накопичено значний досвід, що дає підставу сформулювати деякі принципи і підходи до побудови моделей. При розгляді порізно кожен з них може здатися досить очевидним, але сукупність взятих разом принципів і підходів далеко не тривіальна. Численні помилки і невдачі в практиці моделювання є прямим наслідком порушення цієї методології.

Математична модель, будучи абстрактним образом модельованого об'єкта або процесу, не може бути його повним аналогом. Досить подібності в тих елементах, які визначають мету дослідження. Формальних прийомів, що дозволяють автоматично, "бездумно", створювати адекватні математичні моделі, немає. Остаточне судження про адекватність моделі дає практика, тобто зіставлення моделі з чинним об'єктом.

### 1.1.6 Вимоги до математичних моделей

*Показність* – облік всіх можливих параметрів.

*Адекватність* – відповідність моделі цілям дослідження за рівнем складності та організації, а також відповідність реальній системі щодо обраної безлічі властивостей.

*Відповідність моделі розв'язуваній задачі*. Модель повинна будуватися для вирішення певного класу завдань або конкретного завдання дослідження системи.

Спроби створення універсальної моделі, націленої на вирішення великої кількості різноманітних завдань, призводять до такого ускладнення, що вона виявляється практично непридатною. Досвід показує, що при вирішенні кожного конкретного завдання потрібно мати свою модель, що відображає ті аспекти системи, які є найбільш важливими в даній задачі. Цей принцип пов'язаний з принципом адекватності.

*Максимально можлива простота*. Спрощення при збереженні істотних властивостей системи. Повнота моделі реалізується вибором границі "система-середовище», а спрощення моделі — виділенням основних і відкиданням другорядних властивостей (залежить від мети моделювання).

Модель повинна бути в деяких відношеннях простіше прототипу — у цьому сенс моделювання. Чим складніше розглянута система, тим якомога простішим повинний бути її опис, що навмисне перебільшує типові і нехтує менш істотними властивостями. Цей принцип може бути названий принципом абстрагування від другорядних деталей. При побудові будь-якої моделі перед дослідником стоїть складне завдання:

- з одного боку, спростити дійсність, відкинувши все другорядне, щоб зосередитися на істотних особливостях об'єкта,
- з іншого боку, не спрощувати до такого рівня, щоб послабити зв'язок моделі з реальною дійсністю.

*Критичність* – відповідність між необхідною точністю результатів моделювання і складністю моделі. При зміні параметрів повинна відбуватися така зміна показників, яку можна виявити в умовах похибки обчислень.

Моделі за своєю природою завжди мають наближений характер. Виникає питання: яким повинно бути це наближення. З одного боку, щоб відобразити всі скільки-небудь суттєві властивості, модель необхідно деталізувати. З іншого боку, будувати модель, яка наближається за складністю до реальної системи, очевидно, не має сенсу. Вона не повинна бути настільки складною, щоб знаходження рішення виявилося занадто важким. Компроміс між цими двома вимогами нерідко досягається шляхом проб і помилок.

*Правильний облік випадковостей та невизначеностей.* Незалежно від типу досліджуваної системи можна виділити ***схему розробки моделі системи*** :

- виявлення визначальних параметрів системи;
- виявлення визначальних параметрів зовнішнього середовища;
- облік невизначеності та оцінка достовірності вхідних параметрів;
- виявлення та опис взаємозв'язку між визначальними параметрами;

- коригування моделі в процесі розроблення алгоритму і на підставі аналізу результатів моделювання, і по вертикалі, розширюючи число підсистем.

### 1.1.7 Практичні рекомендації щодо зменшення складності моделей:

- зміна числа змінних, що досягається або виключенням неістотних змінних, або їх об'єднанням;
- зміна функціональної залежності між змінними. Нелінійна залежність зазвичай замінюється лінійною, дискретна функція розподілу ймовірностей — неперервною;
- зміна обмежень (додавання, вилучення або модифікація); При знятті обмежень виходить оптимістичне рішення, при введенні — песимістичне. Варіюючи обмеженнями, можна знайти можливі граничні значення ефективності. Такий прийом часто використовується для знаходження попередніх оцінок ефективності рішень на етапі постановки завдань;
- обмеження точності моделі. Точність результатів моделі не може бути вище точності вихідних даних;
- баланс похибок різних видів. Відповідно до принципу балансу необхідно домагатися, наприклад, балансу систематичної похибки моделювання шляхом відхилення моделі від оригіналу і похибки вихідних даних, точності окремих елементів моделі, систематичної похибки моделювання і випадкової похибки при інтерпретації і усередненні результатів;
- багатоваріантність реалізацій елементів моделі. Різноманітність реалізацій одного й того самого елемента, що відрізняються за точністю (а отже, і за складністю), забезпечує регулювання співвідношення «точність/складність»;

- блокова будова. При дотриманні принципу блочної будови полегшується розроблення складних моделей і з'являється можливість використання накопиченого досвіду і готових блоків з мінімальними зв'язками між ними. Виділення блоків здійснюється з урахуванням поділу моделі за етапами і режимами функціонування системи.

### 1.1.8 Усунення невизначеностей у процесі дослідження систем

Одна з основних складностей при підготовці даних для дослідження технічної системи полягає в невизначеності багатьох її характеристик і зовнішнього середовища. Слід розрізняти невизначеності в теперішньому та в майбутньому часі. Коли досліджується система в майбутньому, що має місце при проектуванні технічної системи, кількість невизначених факторів істотно зростає. Подолання невизначеностей є основною проблемою при підготовці вхідних даних.

### 1.1.9 Способи зняття невизначеностей вхідних даних:

1) найбільш природний, очевидний і тривіальний засіб: пошук і підбір додаткової інформації;
2) проведення спеціальних досліджень, теоретичних або експериментальних, для вивчення невизначених факторів і явищ;
3) синтез правдоподібних значень невідомих характеристик зовнішнього середовища за деяким малим обсягом інформації, що є у розпорядженні дослідника;
4) для розкриття невизначеностей в майбутньому існують і розробляються засоби прогнозування;
5) для підготовки вхідних даних в ситуації невизначеності застосовуються також засоби експертних оцінок.

Однак можуть бути такі технічні системи, для яких неможливо проведення експериментів. Тому потрібні також теоретичні засоби зняття невизначеностей і, особливо, для невизначеностей у майбутньому. Експертні оцінки використовуються не тільки для отримання оцінки невизначених вхідних даних, але і для отримання даних, яких не вистачає.

### 1.1.10 Основні види похибок:

- *Неусувні похибки* – похибки вихідних даних. Вони не можуть бути зменшені ані до початку, ані в процесі обчислень. Слід прагнути, щоб усі вихідні дані були приблизно однакової точності, інакше уточнення одних при великих похибках в інших не призведе до підвищення точності.

• *Похибки чисельного методу* – пов'язані із застосуванням квадратурних та інших дискретних апроксимацій, наприклад, заміною визначеного інтеграла сумою значень підінтегральної функції, усіканням рядів при обчисленні значень функцій відповідно до вимог точності, інтерполювання табличних даних і т. п.

Ця похибка може бути усунена, вона може бути зменшена до будь-якого розумного значення шляхом зміни деякого параметра.

Її зазвичай намагаються довести до величини, кілька разів меншої похибки вихідних даних. Подальше зниження похибки не призведе до підвищення точності результату, а лише збільшить вартість розрахунків через необгрунтоване збільшення обсягу обчислень.

• При обчисленнях за допомогою ЕОМ неминучі похибки округлення, пов'язані з обмеженістю розрядної сітки машини.

### 1.1.11 Математичні схеми моделі системи загального вигляду

Модель можна подати безліччю величин, що описують процес функціонування реальної системи ***S***.

Ці величини створюють у загальному випадку чотири підмножини:

- сукупність вхідних впливів на систему $h_i \in H, i=1, n_h$ ;
- сукупність впливів зовнішнього середовища $x_i \in X, i=1, n_x$ ;
- сукупність внутрішніх параметрів системи $v_i \in V, i=1, n_v$ ;
- сукупність вихідних характеристик системи $y_i \in Y, i=1, n_y$

У цих підмножинах виділяються керовані і некеровані змінні.

При моделюванні ***S*** вхідні впливи, вплив зовнішнього середовища ***E*** і внутрішні параметри системи є незалежними (екзогенними) змінними у векторній формі:

$$\vec{x}(t)=\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n_x}(t)\right); \quad \vec{v}(t)=\left(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n_v}(t)\right);$$

$$\vec{h}(t)=\left(h_1(t), h_2(t), \ldots, h_{n_h}(t)\right) \quad \vec{y}(t)=\left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n_y}(t)\right)$$

; .

Вихідні характеристики системи — залежні (ендогенні) змінні.

Сукупність залежних вихідних характеристик системи від часу називається вихідною траєкторією $\vec{y}(t)$.

Процес функціонування описується оператором , який перетворює екзогенні змінні у ендогенні: $\vec{y}(t)=F_S(\vec{x},\vec{v},\vec{h},t)$

Ця залежність називається законом функціонування системи ***S***.

У загальному випадку закон функціонування системи може бути заданий у вигляді функції, функціоналу, логічних умов, алгоритму, таблиці, словесного правила відповідності.

Таким чином, математична модель об'єкта (реальної системи) — це кінцева підмножина змінних

$$\left\{\vec{x}(t),\vec{v}(t),\vec{h}(t)\right\}$$

разом з математичними зв'язками між ними і характеристиками

$\vec{y}(t)$.

### 1.1.12 Прикладні математичні методи моделювання

Для проведення дослідження складних систем використовується широкий спектр математичних методів. Основу математичного апарату складають диференціальне та інтегральне числення, теорія автоматів, лінійне і нелінійне програмування, теорія прийняття рішень, теорія ігор, імітаційне моделювання, теорія масового обслуговування, теорія статистичних висновків і т. п.

Наприклад:

якщо є два учасники та їх цілі ясні, то ми маємо справу із задачами теорії ігор.

Якщо є один учасник і його кінцеві цілі точно визначені, завдання зводиться до максимізації цільових функцій, підпорядкованих природним обмеженням, що накладаються моделлю. Вирішується таке завдання методами лінійного і динамічного програмування.

Коли в наявності один учасник і мають місце невизначеності, рішення може бути отримано шляхом комбінації методів статистики з варіаційними методами.

Детерміновані моделі, коли при дослідженні випадкові фактори не враховуються і системи функціонують в безперервному часі, засновані на використанні диференційних, інтегральних, інтегро-диференційних та інших рівнянь.

Детерміновані моделі, які функціонують в дискретному часі – кінцеві автомати і скінченнорізницеві схеми.

Стохастичні моделі (при обліку випадкових факторів) в дискретному часі - імовірнісні автомати.

Стохастичні моделі в безперервному часі – СМО.

Для великих інформаційно-керуючих систем типові схеми недостатні. Тому використовують агрегативні моделі (системи), які описують широке коло об'єктів дослідження з відображенням системного характеру цих об'єктів.

При агрегативному описі складна система поділяється на кінцеве число частин (підсистем), зберігаючи при цьому зв'язки між взаємодіючими частинами.

**Контрольні питання**

1 Дайте загальне визначення моделі.

2 Назвіть відомі Вам прикладні математичні методи моделювання.

3 В чому полягає завдання моделювання ?

4 Які методи наукового системного дослідження Ви знаєте?

5 Поясніть поняття “альтернатива” та “показник ефективності системи”?

6 Назвіть основні види похибок при моделюванні.

7 Які основні вимоги повинна задовольняти модель?

8 Перелічте способи зняття невизначеностей вхідних даних при побудові моделі.

9 Що таке моделювання?

10 Які бувають експерименти?

# 2 ВИДИ І КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ

## 2.1 Поняття класифікації за ознаками

З чого починається класифікація? Будь-яка систематизація — це поділ об'єктів на «родинні» групи, що мають одну або декілька спільних ознак, розкладення всього різноманіття «по поличках». Тут важливо насамперед правильно виділити якусь єдину ознаку (параметр), а потім об'єднати ті об'єкти, у яких вона збігається. Наприклад, ви розглядаєте вагон — одиницю рухомого складу. Щоб згрупувати об'єкти-вагони, спочатку слід визначити основну ознаку, що об'єднує їх, припустимо, "*належність вагона вагонному депо*". Потім треба виділити ті об'єкти, які відповідають такій ознаці. У групу за цією ознакою увійдуть: пасажирські і вантажні вагони. Якщо сформулювати ознаку по-іншому — "*належність вагонному депо вантажного вагона*", то в групу увійдуть: вантажні вагони, піввагони, цистерни, рефрижератори, зерновози і т. д. з породовою приналежністю.

Розглянемо найбільш поширені ознаки, за якими класифікуються моделі [4, 8]. Кількість об'єктів і процесів, а також число моделей, що їх відображають для різноманіття можливих вирішуваних завдань — нескінченно. Тому класифікація моделей еквівалентна класифікації оточуючих нас об'єктів на величезній безлічі можливих завдань, і спроба такої класифікації, як правило, відображає лише окремі аспекти досліджень. На рисунку 2 наведений один з численних варіантів класифікації моделей, який авторам здається досить переконливим.


Рисунок 2 – Класифікація основних видів моделей

## 2.2 Класифікація за ознакою повноти

При ***повному*** моделюванні моделі ідентичні об'єкту в часі і просторі (рисунок 3).


Рисунок 3 – Класифікація за ознакою повноти

Для ***неповного*** моделювання ця ідентичність не зберігається.

В основі ***наближеного*** моделювання лежить подібність, при якій деякі сторони реального об'єкта не моделюються зовсім.

Теорія подібності стверджує, що абсолютна подібність можлива лише при заміні одного об'єкта іншим точно таким же. Тому при моделюванні абсолютна подібність не має місця. Дослідники прагнуть до того, щоб модель добре відображала тільки досліджуваний аспект системи.

## 2.3 Класифікація за характером процесів, що протікають в об'єкті

***Статичні*** моделі – одноразовий зріз інформації по даному об'єкту. Наприклад, карта місцевості, результат одного обстеження в поліклініці, фотографія (рисунок 4).

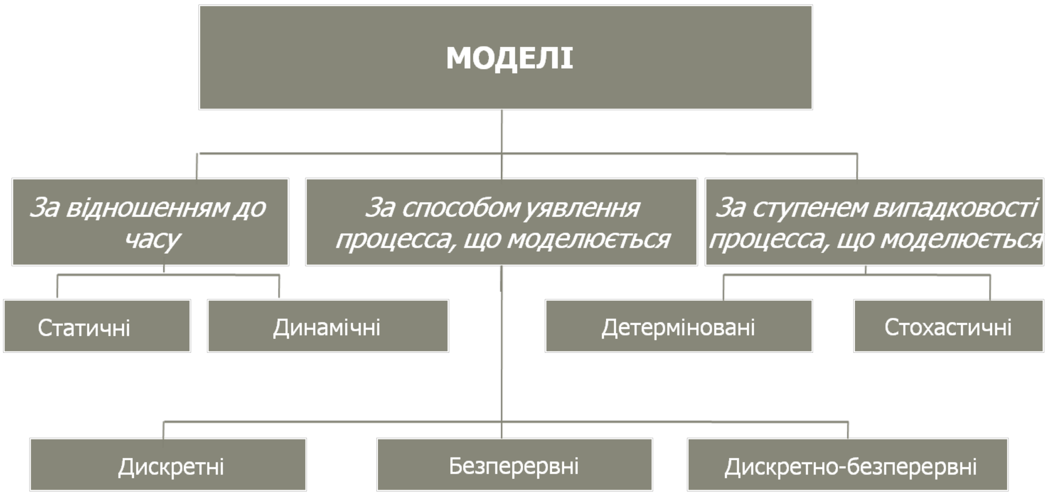


Рисунок 4 - Класифікація за характером процесів, що протікають в об'єкті

***Динамічні*** моделі – дають картину зміни об'єкта в часі (картка в поліклініці, фотоальбом, графік зміни середньої температури повітря протягом тижня).

При будівництві будинку розраховують міцність і стійкість до постійного навантаження його фундаменту, стін, балок — це статична модель будівлі. Але ще треба забезпечити протидію вітрам, руху ґрунтових вод, сейсмічним коливанням та іншим факторам, що змінюються у часі. Це можна вирішити за допомогою динамічних моделей.

Один і той же об'єкт можливо вивчати, застосовуючи і статичну, і динамічну моделі.

***Детерміновані*** моделі відображають процеси, в яких відсутні випадкові впливи. Вони характеризуються однозначною відповідністю між вхідними і вихідними процесами.

У детермінованих моделях вхідні параметри піддаються вимірюванню однозначно і з будь-яким ступенем точності, тобто є детермінованими величинами. Відповідно, процес еволюції такої системи детермінований.

***Стохастичні*** моделі відображають імовірнісні процеси та події.

У цьому випадку аналізується ряд реалізацій випадкового процесу і оцінюються середні характеристики.

Стохастичні моделі застосовуються для дослідження системи, стан якої залежить не тільки від контрольованих, але і від неконтрольованих впливів або в ній самій є джерело випадковості. Так як значення вхідних параметрів відомі лише з певним ступенем імовірності (є стохастичними), буде випадковим і процес еволюції системи.

Наприклад, модель, що описує зміну температури повітря протягом року. Точно спрогнозувати температуру повітря на наступний період неможливо, задається тільки діапазон зміни температури і ймовірність того, що істинна температура повітря потрапить у цей діапазон.

До стохастичних систем відносяться всі системи, які включають людину, наприклад, заводи, аеропорти, обчислювальні системи і мережі, магазини, підприємства побутового обслуговування і т. п.

У детермінованих системах параметри моделі оцінюються одним показником для конкретних значень вихідних даних.

В стохастичних системах наявність імовірнісних характеристик вихідних даних дозволяє оцінювати параметри системи декількома показниками.

Також розрізняють ***моделі з зосередженими параметрами*** — процеси без просторової зміни параметрів та ***моделі з розподіленими параметрами*** — процеси, в ході яких їх параметри змінюються у просторі.

***Дискретні*** моделі відображають поведінку систем з дискретними станами.

***Безперервні*** моделі являють системи з безперервними процесами.

***Дискретно-безперервні*** моделі будуються тоді, коли дослідника цікавлять обидва ці типи процесів. Очевидно, конкретна модель може бути стохастичною, статичною, дискретною або якою-небудь іншою.

### 2.4 Класифікація за способом подання

Матеріальні та абстрактні моделі можуть мати один і той же прототип і взаємно доповнювати одна одну (рисунок 5).

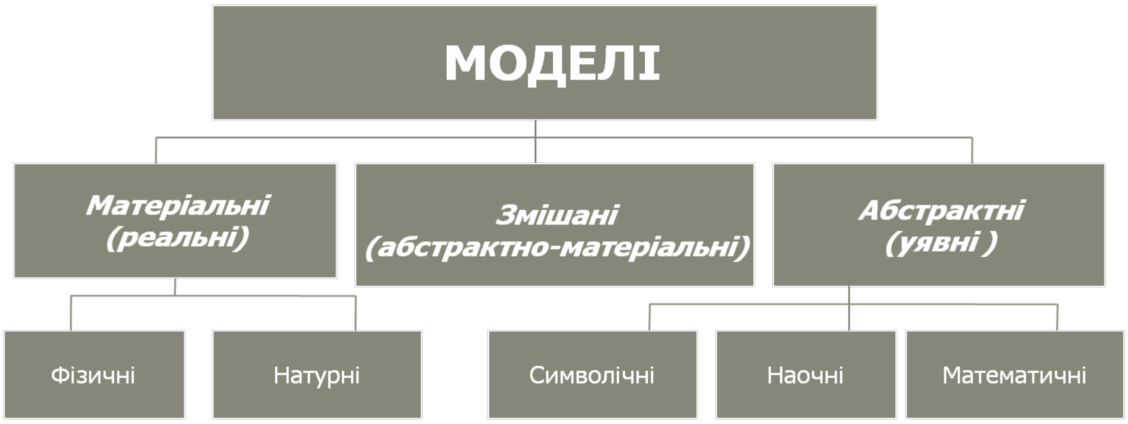


Рисунок 5 – Класифікація за способом подання

Нерідко в практиці моделювання зустрічаються змішані, абстрактно-матеріальні моделі. Такі, наприклад, командно-штабні навчання, коли робота штабів являє собою натурний експеримент, а дії військ відображаються в документах.

Матеріальне моделювання засноване на застосуванні моделей, що являють собою реальні технічні конструкції, які можуть відображати:

- зовнішні властивості вихідних об'єктів, внутрішнє влаштування вихідних об'єктів;
- суть процесів і явищ, що відбуваються з об'єктами-оригіналами.

#### 2.4.1 Різновиди матеріальних моделей

Це може бути проведення дослідження на самому об'єкті чи його елементах з наступною обробкою результатів експерименту на основі теорії подібності ***(натурне моделювання).***

Це може бути спеціальний пристрій — модель, що має або фізичну, або геометричну подібність оригіналу ***(фізичні моделі)***.

### 2.4.2 Різновиди натурних моделей

***Науковий експеримент*** характеризується широким використанням засобів автоматизації проведення, застосуванням досить різноманітних засобів обробки інформації, можливістю втручання людини в процес проведення експерименту (рисунок 6). Відповідно до цього з'явився новий науковий напрямок — автоматизація наукового експерименту.


Рисунок 6 – Різновиди натурних моделей

При ***комплексних випробуваннях*** внаслідок повторення випробувань об'єктів у цілому (або великих частин системи) виявляються загальні закономірності характеристик якості, надійності цих об'єктів. У цьому випадку моделювання здійснюється шляхом обробки і узагальнення інформації про групи однорідних явищ.

Поряд зі спеціально організованими випробуваннями можлива реалізація натурного моделювання шляхом узагальнення досвіду, накопиченого в ході виробничого процесу, тобто можна говорити про ***виробничий експеримент***. Тут на базі теорії подібності обробляють статистичний матеріал по виробничому процесу і отримують його узагальнені характеристики.

Необхідно пам'ятати про відмінність експерименту від реального протікання процесу. Вона полягає в тому, що в експерименті можуть з'явитися окремі критичні ситуації і визначити межі стійкості процесу.

В ході експерименту вводяться нові чинники і впливи на процес функціонування об'єкта.

### 2.4.3 Різновиди фізичних моделей

Фізичне моделювання відрізняється від натурного тим, що дослідження проводиться на установках, які зберігають природу явищ і володіють фізичною подібністю (рисунок 7). У процесі фізичного моделювання задаються деякі характеристики зовнішнього середовища і досліджується поведінка реального об'єкта або його моделі при заданих або створених штучно впливах зовнішнього середовища. Фізичне моделювання може протікати в реальному і нереальному (псевдореальному) масштабах часу, а також може розглядатися без урахування часу.


Рисунок 7 – Різновиди фізичних моделей

Геометрично подібні масштабні, які відтворюють просторово — геометричні характеристики оригіналу безвідносно його субстрату: макети будівель і споруд, навчальні муляжі та ін. (рисунок 8).

Рисунок 8 – Макет залізничного пакгаузу з пристанційним селищем

Засновані на теорії подібності такі, що відтворюють з масштабуванням в просторі і часі властивості і характеристики оригіналу тієї ж природи, що і модель (гідродинамічні моделі суден, продувні моделі літальних апаратів).

Наприклад, аеродинамічна дозволяла продувати натурні бомбардувальники, навіть з працюючими двигунами. Людина в проточній частині дає уявлення про розміри (рисунок 9).

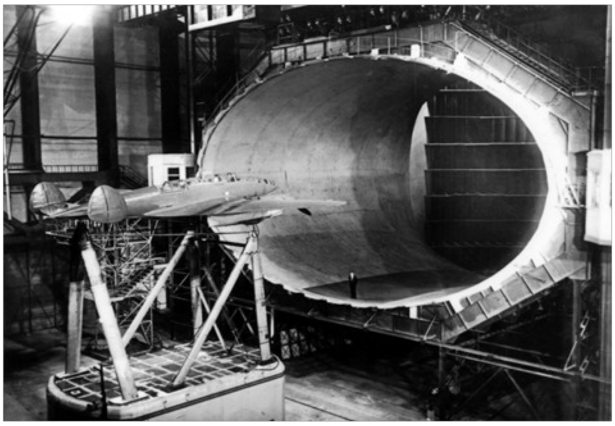

Рисунок 9 – Аеродинамічна труба

### 2.4.4 Різновиди абстрактних моделей

Абстрактні або уявні моделі являють собою певні конструкції з загальноприйнятих знаків на папері або іншому матеріальному носії або у вигляді комп'ютерної програми.

Ці моделі не можна тактильно відчути, вони не мають речового втілення.

Основу таких моделей становить інформація. Такий тип моделювання реалізує теоретичний метод пізнання навколишньої дійсності.

### 2.4.5 Різновиди наочних моделей

При ***наочному моделюванні*** на базі уявлень людини про реальні об'єкти створюються наочні моделі, що відображають явища і процеси, які протікають в об'єкті (рисунок 10).

Прикладами таких моделей є навчальні плакати, рисунки, схеми, діаграми.

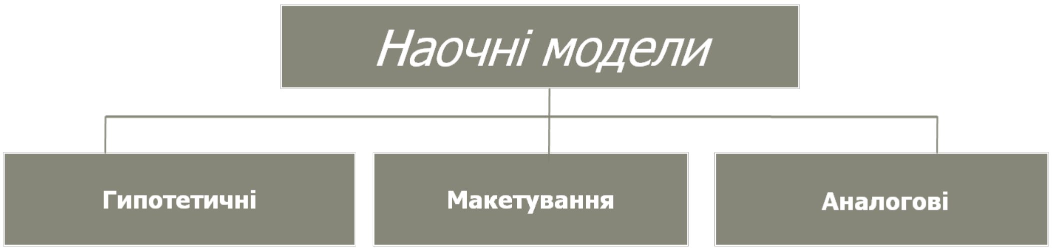


Рисунок 10 – Різновиди  наочних моделей

В основу ***гіпотетичного моделювання*** дослідником закладається певна гіпотеза про закономірності протікання процесу в реальному об'єкті, яка відбиває рівень знань про об'єкт. Гіпотетичне моделювання використовується, коли знань про об'єкт недостатньо для побудови формальних моделей.

***Макетування*** ґрунтується на створенні уявних макетів і використовується в тих випадках, коли процеси, що  протікають в реальному об'єкті,  не піддаються фізичному моделюванню.  Воно часто передує іншим видам моделювання.

Приклад макетування – геометричні моделі, що дають зовнішнє уявлення про необхідний об'єкт і здебільше використовуються для демонстраційних цілей.

***Аналогове моделювання*** ґрунтується на застосуванні аналогій різних рівнів. Найвищим рівнем є повна аналогія, має місце тільки для досить простих об'єктів. З ускладненням об'єкту використовують аналогією наступних рівнів, коли аналогова модель відображає кілька або тільки одну сторону функціонування об'єкта. Така аналогія спостерігається, наприклад, між коливаннями антени супутникового зв'язку під вітровим навантаженням і коливанням електричного струму в спеціально підібраному електричному колі.

***Символічна модель*** — це логічний об'єкт, який замінює реальний процес і виражає основні його властивості за допомогою певної системи знаків або символів (рисунок 11). Це або слова природної мови, або слова відповідного тезаурусу, графіки, діаграми і т. п.

Така модель може мати самостійне значення, але, як правило, її побудова є початковим етапом будь-якого іншого моделювання.

### 2.4.6 Різновиди символічних моделей

В основі ***мовного моделювання*** лежить певний тезаурус — утворений з набору виходних понять, причому, цей набір повинен бути фіксованим.

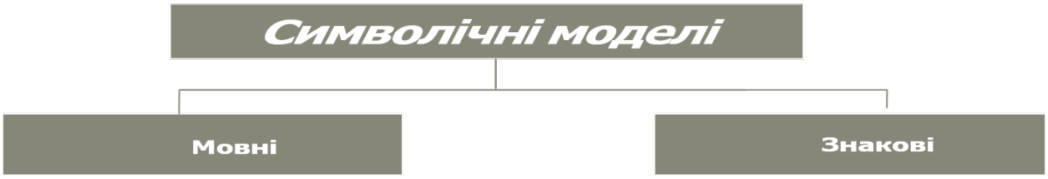


Рисунок 11 – Різновиди  символічних моделей

Між тезаурусом і звичайним словником є принципові відмінності. Тезаурус — це словник, який очищений від неоднозначності, тобто в ньому кожному слову може відповідати лише єдине поняття. У звичайному словнику одному слову може відповідати кілька понять.

***Знакова модель*** виражена спеціальними знаками (рисунок 12). Вона абстрагована від конкретного змісту і, як правило, не має нічого спільного з даним об'єктом (порівняйте радіотехнічну плату і диференційні рівняння, які описують її роботу). Використовуючи операції об'єднання, перетину і доповнення теорії множин, можна в окремих символах дати опис якого-небудь реального об'єкта.

### 2.4.7 Різновиди знакових моделей

Опис називається ***формалізованим***, якщо існує сувора, однозначно зрозуміла послідовність дій щодо його виконання.

***Неформалізовані моделі*** – системи уявлень про об'єкт в оригіналі, що склалися в людському мозку (рисунок 13). Опис зовнішності літературного героя — неформалізована модель спілкування письменника і читача.

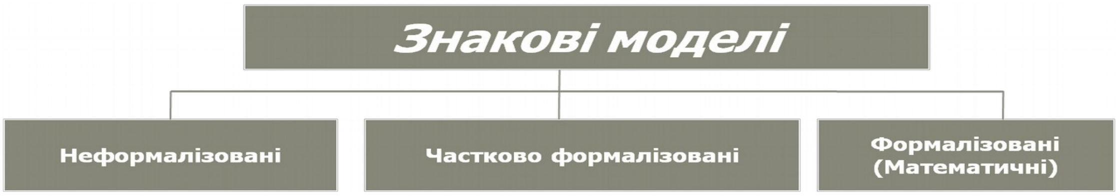


Рисунок 12 – Різновиди знакових моделей

### 2.4.8 Різновиди неформалізованих моделей

***Концептуальна модель*** описує виявлені причинно-наслідкові зв'язки і закономірності, властиві досліджуваному об'єкту і суттєві в рамках певного дослідження.


Рисунок 13 – Різновиди неформалізованих моделей

Ще недавно до неформалізованих інтуїтивних моделей відносився єдиний тип моделей — концептуальні моделі, тобто системи уявлень про об'єкт-оригінал, що склалися в людському мозку.

Вихідним матеріалом при формуванні такої моделі є не тільки безпосередні результати відображення у свідомості властивостей і характеристик об'єкта-оригіналу, але і теоретичний багаж суб'єкта, досвід, аналогія, логічні висновки, інтуїція. Синтез усіх цих компонентів у єдиний ідеальний образ здійснюється тільки в розумових процесах.

***Уявний експеримент*** — особлива теоретична процедура, яка полягає в отриманні нового або перевірці наявного знання шляхом конструювання ідеалізованих об'єктів і маніпулювання ними в штучних умовно заданих ситуаціях.

Останнім часом для неформалізованих завдань важливого значення набувають методи інтуїтивного (евристичного) моделювання.

***Операційні ігри*** імітують ситуації, в яких потрібно багаторазове прийняття рішень в умовах безперервного виникнення різних складних проблем. Якщо задана деяка конкретна схема організації та відповідні їй параметри, можна розрахувати кількісні характеристики результатів роботи і, таким чином, знайти відмінність між різними варіантами організації.

***Метод сценаріїв*** дає можливість оцінити найбільш імовірний хід розвитку подій і можливі наслідки прийнятих управлінських рішень.

***Частково формалізовані моделі.*** Природні мови — частково формалізовані системи. Кулінарний рецепт — частково формалізована модель (рисунок 14).

### 2.4.9 Різновиди частково формалізованих моделей

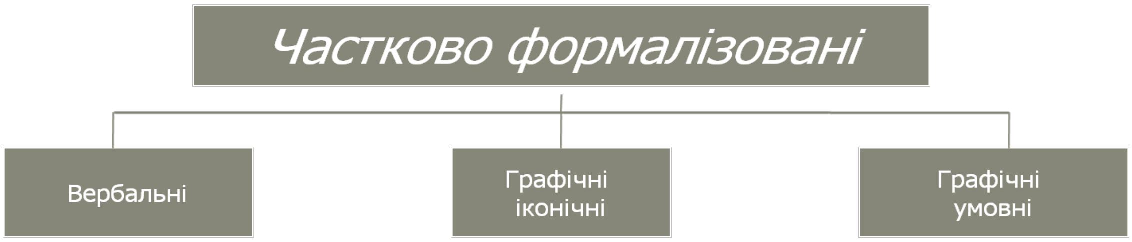


Рисунок 14 – Різновиди частково формалізованих моделей

***Вербальні*** (від лат «verbalis» – усний) – опис властивостей і характеристик оригіналу в уявній або розмовній формі. Це моделі, отримані в результаті роздумів, міркувань. Вони можуть так і залишитися уявними або бути виражені словесно.

***Графічні іконічні*** – риси, властивості і характеристики оригіналу, реально або хоча б теоретично доступні безпосередньо зоровому сприйняттю (художня графіка, технологічні карти).

***Графічні умовні*** дані спостережень і експериментальних досліджень у вигляді графіків, діаграм, схем.

### 2.4.10 Формалізовані (математичні) моделі

***Математичне моделювання*** — це процес встановлення відповідності модельованому об'єкту деякої математичної конструкції, що називається математичною моделлю, а також дослідження цієї моделі, яке дозволяє отримати характеристики об'єкта.

Основна відмінність цього типу моделей від інших полягає у варіативності — в кодуванні одним знаковим описом величезної кількості конкретних варіантів поведінки системи. Так, лінійні диференційні рівняння з постійними коефіцієнтами описують і рух маси на пружині, і зміну струму в коливальному контурі, і вимірювальну схему системи автоматичного регулювання, і ряд інших процесів [1, 5, 7].

Однак ще більш важливо те, що в кожному з цих описів одні й ті самі рівняння в літерному (а взагалі кажучи, і в числовому) вигляді відповідають нескінченному числу комбінацій конкретних значень параметрів. Скажімо, для процесу механічних коливань — це будь-які значення маси та жорсткості пружини.

### 2.4.11 Різновиди математичних моделей в залежності від походження

Математична модель може виникнути трьома шляхами (рисунок 15):

а) в результаті прямого вивчення реального процесу. Такі моделі називаються ***феноменологічними***;

б) в результаті процесу дедукції. Нова модель є окремим випадком деякої загальної моделі. Такі моделі називаються ***асимптотичними***;

в) в результаті процесу індукції. Нова модель є узагальненням елементарних моделей. Такі моделі називають ***моделями ансамблів***.


Рисунок 15 – Різновиди математичних моделей в залежності від походження

### 2.4.12 Різновиди математичних моделей за формою уявлення

Група аналітичних математичних моделей надзвичайно широка і різноманітна (рисунок 16).


Рисунок 16 – Різновиди математичних моделей за формою уявлення

Вона включає в себе безліч абстрактних математичних об'єктів разом з операціями, визначеними над цими об'єктами: всі види функціональних залежностей, алгебраїчних і диференційних рівнянь, вектори і векторні простори, матричні форми, тензори і т. д.

Перетворення таких моделей з відомими законами і правилами можна розглядати як експерименти.

Рішення на основі аналітичних моделей може бути отримано в результаті однократного прорахунку безвідносно до конкретних значень характеристик ("в загальному вигляді"). Це наочно і зручно для виявлення закономірностей.

*Рівняння Максвелла — аналітична модель електромагнітного поля. Закон Ома — модель електричного кола.*

Однак для складних систем побудувати аналітичну модель, яка досить повно відображає реальний процес, вдається не завжди. Тим не менш, є процеси, наприклад марковські, актуальність моделювання яких аналітичними моделями доведена практикою.

Зазвичай моделі в аналітичній формі являють собою явні вирази вихідних параметрів як функцій входів і змінних стану. Разом з тим належність моделі до цієї групи припускає, що не тільки опис об'єкта моделювання, але весь процес його дослідження здійснюється аналітичними методами, тобто в загальному вигляді, а не чисельно.

Неможливість або просто зайва складність аналітичного розв'язання модельної задачі означає необхідність перейти до чисельних методів математичного дослідження з використанням ЕОМ і відповідно перетворити аналітичну математичну модель у ***алгоритмічну (числову)***.

Група алгоритмічних моделей, що отримуються в результаті перетворення з аналітичних форм або синтезуються безпосередньо, являє собою найбільш універсальний засіб математичного моделювання.

Єдиним практично важливим обмеженням тут є розмірність модельної задачі, яка повинна відповідати можливостям використовуваної ЕОМ.

Алгоритмічні моделі практично допускають розв’язання будь-яких модельних завдань, але тільки в числовій формі. При цьому кожен прогін дає інформацію про один конкретний стан об'єкта. Для того, щоб досліджувати об'єкт при різних значеннях параметрів, початкових і граничних умов, зовнішніх впливів і т. п., необхідно стільки повторень обчислювального процесу, скільки точок, що характеризують можливі стани об'єкта, необхідно отримати.

Тому реалізація числової алгоритмічної моделі вимагає значно більшого обсягу обчислювальної роботи, ніж будь-яка аналітична модель, що дозволяє досліджувати властивості і характеристики об'єкта в загальному вигляді, тобто відразу у всіх можливих станах.

Створення обчислювальних машин зумовило розвиток нового підкласу математичних моделей — ***імітаційних***.

### 2.4.13 Різновиди імітаційного моделювання

Імітаційне моделювання передбачає подання моделі у вигляді деякого алгоритму — комп'ютерної програми, виконання якої імітує послідовність зміни станів у системі і, таким чином, являє собою поведінку модельованої системи [6].

Процес створення і випробування таких моделей називається ***імітаційним моделюванням***, а сам алгоритм — ***імітаційною моделлю***.

У чому полягає відмінність імітаційних і аналітичних моделей?

У разі аналітичного моделювання ЕОМ є потужним калькулятором, арифмометром. Аналітична модель вирішується на ЕОМ. У разі ж імітаційного моделювання імітаційна модель — програма — реалізується на ЕОМ.

У чому полягає відмінність імітаційних і аналітичних моделей?

Імітаційні моделі досить просто враховують вплив випадкових факторів. Для аналітичних моделей це серйозна проблема. При наявності випадкових факторів необхідні характеристики модельованих процесів отримуються багаторазовими прогонами (реалізацією) імітаційної моделі і подальшою статистичною обробкою накопиченої інформації.

Тому часто імітаційне моделювання процесів з випадковими факторами називають ***статистичним моделюванням***.

Якщо дослідження об'єкта ускладнене використанням тільки аналітичного або імітаційного моделювання, то застосовують змішане (комбіноване), аналітико-імітаційне моделювання. При побудові таких моделей процеси функціонування об'єкта декомпонуються на складові підпроцеси, для яких, можливо, використовують аналітичні моделі, а для решти підпроцесів будують імітаційні моделі.

Імітаційне моделювання класифікують за характером самої моделі і програмних засобів моделювання (рисунок 17).


Рисунок 17 — Різновиди імітаційного моделювання

## 2.5 Класифікація за сферою використання об'єкта

***Універсальні*** моделі призначені для використання багатьма системами.

***Спеціалізовані*** створені для дослідження конкретної системи (рисунок 18):

- *ігрові:* військові, економічні, ділові, спортивні;
- *навчальні:* наочні посібники, навчальні програми;
- *дослідні;*
- *науково-технічні.*

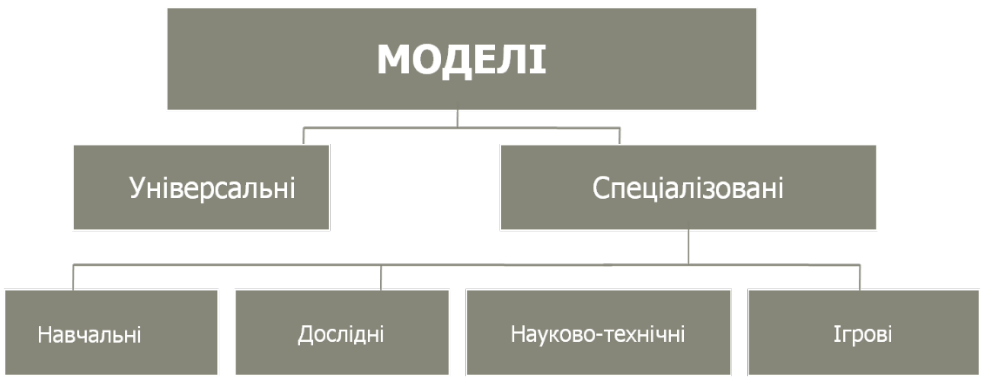


Рисунок 18 – Класифікація за сферою використання об'єкта

## 2.6 Класифікація за галуззю знань

Класифікація моделей за галуззю знань — це класифікація за діяльністю людини (рисунок 19).


Рисунок 19 — Класифікація за галуззю знань

## 2.7 Класифікація за характером модельованого об'єкта

За характером тієї сторони об'єкта, яка піддається моделюванню, доречно розрізняти *моделювання* ***структури об'єкта*** і *моделювання* ***його поведінки*** (рисунок 20).


Рисунок 20 – Класифікація за характером модельованого об'єкта

***Функціональні моделі*** відображають лише поведінку, функцію модельованого об'єкта. У цьому випадку модельований об'єкт розглядається як "чорний ящик", що має входи і виходи. Фізична сутність об'єкта, природа процесів, що протікають у ньому, структура об'єкта залишаються поза увагою дослідника хоча б тому, що невідомі.

При функціональному моделюванні експеримент полягає в спостереженні за виходом модельованого об'єкта при штучній чи природній зміні вхідних впливів. За цими даними будується модель поведінки у вигляді деякої математичної функції. *Комп'ютерна шахова програма — функціональна модель роботи людського мозку при грі в шахи.*

Зараз комп'ютерне моделювання в наукових та практичних дослідженнях є одним з основних інструментів пізнання. Воно починається зазвичай з об'єкта вивчення, в ролі якого можуть виступати явища, процес, предметна галузь, життєві ситуації, завдання. Після визначення об'єкта вивчення будується модель.

*Програми, що дозволяють створювати різні види комп'ютерних знакових моделей* — текстові редактори, середовища програмування, електронні таблиці, бази даних.

Слід зазначити тут ***комп'ютерне моделювання виробів*** за допомогою спеціалізованих програмних продуктів, у тому числі, *створення 3D-об'єктів, комп'ютерне моделювання технологічних процесів, моделювання аналогових електронних пристроїв.*

***Структурне моделювання*** — це створення і дослідження моделі, структура якої (елементи та зв'язки) подібна структурі модельованого об'єкта. Оскільки подвбність встановлюється не взагалі, а стосовно мети дослідження, то структура може бути описана на різних рівнях розгляду. Найбільш загальний опис структури — це топологічний опис за допомогою теорії графів. *Вчення військ — структурна модель виду бойових дій.*

***Інформаційна модель*** — цілеспрямовано відібрана інформація про об'єкт, яка відображає найбільш істотні для дослідника властивості цього об'єкта. Одному і тому ж об'єкту можна поставити у відповідність різні інформаційні моделі (вербальні, математичні, табличні, графічні); все залежить від мети моделювання (рисунок 21).

### 2.7.1 Різновиди інформаційних моделей

***Табличні*** — об'єкти та їх властивості подані у вигляді списку, а їх значення розміщуються в клітинках прямокутної форми. Перелік однотипних об'єктів подано в першому стовпці (або рядку), а значення їх властивостей розміщуються в наступних стовпцях (або рядках).

***Ієрархічні*** – об'єкти розподілені за рівнями. Кожен елемент високого рівня складається з елементів нижнього рівня, а елемент нижнього рівня може входити до складу лише одного елемента більш високого рівня.

***Мережні*** — застосовують для відображення систем, в яких зв'язки між елементами мають складну структуру.


Рисунок 21 – Різновиди інформаційних моделей

## 2.8 Класифікація за цільовим призначенням моделі

За цільовим призначенням існує класифікація, яка подана на рисунку 22.


Рисунок 22 – Класифікація за цільовим призначенням моделі

***Моделі структури*** відображають зв'язки між компонентами об'єкта і зовнішнім середовищем і поділяються так:

- ***канонічна модель***, що характеризує взаємодію об'єкта з оточенням через входи і виходи;
- ***модель внутрішньої структури***, що характеризує склад компонентів об'єкта і зв'язки між ними;
- ***модель ієрархічної структури*** (дерево системи), в якій об'єкт (ціле) розчленовується на елементи нижчого рівня, дії яких підпорядковані інтересам цілого.

Модель структури зазвичай подається у вигляді блок-схеми, рідше графів і матриць зв'язків.

***Моделі функціонування*** включають широкий спектр символічних моделей, наприклад:

- ***модель життєвого циклу системи***, що описує процеси існування системи від зародження задуму її створення до припинення функціонування;
- ***моделі операцій***, виконуваних об'єктом, являють опис взаємопов'язаної сукупності процесів функціонування окремих елементів об'єкта при реалізації тих чи інших функцій об'єкта. Так, до складу моделей операцій можуть входити моделі надійності, що характеризують вихід елементів системи з ладу

під впливом експлуатаційних факторів, і моделі живучості факторів, що характеризують вихід елементів системи з ладу під цілеспрямованим впливом зовнішнього середовища;

• ***інформаційні моделі***, що відображають у взаємозв'язку джерела і споживачів інформації, види інформації, характер її перетворення, а також часові та кількісні характеристики даних;

• ***процедурні моделі***, що описують порядок взаємодії елементів досліджуваного об'єкта при виконанні різних операцій, наприклад, обробки матеріалів, діяльності персоналу, використання інформації, в тому числі і реалізації процедур прийняття управлінських рішень;

• ***часові моделі***, що описують процедуру функціонування об'єкта в часі і розподіл ресурсу «час» по окремих компонентах об'єкта.

***Вартісні моделі***, як правило, супроводжують моделі функціонування об'єкта і по відношенню до них вторинні, «живляться» від них інформацією і спільно з ними дозволяють проводити комплексну техніко-економічну оцінку об'єкта або його оптимізацію за економічними критеріями.

## 2.9 Інші види моделей

***За типом підходу до досліджуваних систем*** виділяють моделі:

• ***дескриптивні*** (від англ. descriptive – описова) — це словесний опис об'єкта, виражений засобами тієї чи іншої мови, призначені для пояснення спостережуваних фактів або прогнозу поведінки об'єкта.

• ***нормативні***, при побудові яких переслідується мета визначення такого стану об'єкта, який є найкращим з точки зору визначеного критерію

Існує поділення моделей на ***теоретичні*** та ***прикладні***.

Перші створюють описові моделі, другі використовують теоретичні викладки в різноманітних практиках.

***Теоретичні моделі*** дозволяють вивчати загальні властивості об'єкта, виходячи з формальних передумов з використанням методу дедукції.

***Прикладні моделі*** дозволяють оцінювати параметри функціонування об'єкта. Вони оперують числовими значеннями змінних. Найчастіше в цих моделях використовують статистичні або фактичні спостережувані дані.

***Рівноважні моделі*** описують такий стан системи, при якому сума всіх діючих на неї сил дорівнює нулю.

***Оптимізаційні мод***елі оперують з поняттям максимізації корисності.

***Гносеологічні моделі*** спрямовані на вивчення об'єктивних законів природи (моделі сонячної системи, розвитку біосфери, кульової блискавки).

**Контрольні питання**

1 Що значить поняття класифікації за ознаками? Наведіть приклади.

2 Класифікація моделей за ознакою повноти.

3 Класифікація моделей за способом подання.

4 Класифікація моделей за сферою використання об'єкта.

5 Класифікація за характером модельованого об'єкта.

6 Що таке стохастичне моделювання?

7 Які риси притаманні детермінованим моделям?

8 Які моделі називаються статичними?

9 Які моделі називаються динамічними?

10 Що називають натурним моделюванням ?

## 3 Методи чисельного розв'язання нелінійних рівнянь

При дослідженні детермінованих моделей у багатьох випадках виникає необхідність вирішення нелінійних рівнянь з одним невідомим вигляду

$$f(x)=0.$$

Нелінійні рівняння з одним невідомим поділяються на алгебраїчні і трансцендентні.

Рівняння такого вигляду називається ***алгебраїчним n-го*** порядку, якщо $f(x)$ є алгебраїчною функцією, тобто можна подати у вигляді

$$f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0.$$

Таке рівняння в загальному випадку має n дійсних коренів.

*Приклад:* $\boldsymbol{3x^2 + 4x - 5.2 = 0}$. $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4*3*(-5.2)}}{2*3}$.

Квадратне рівняння має два дійсних корені.

Якщо функція ***f(x)*** не є алгебраїчною і містить ***log(x)***, $\boldsymbol{e^x}$, ***sin(x)*** і т. п., тобто

$$\boldsymbol{f(x) = f(\log(x), e^x, \sin(x), ....)},$$

то рівняння називається ***трансцендентним.***

Таке рівняння в загальному випадку має безліч коренів.

*Приклад* $\boldsymbol{\sin(x) = 0 \quad x = \pi n}$.

Методи розв'язання рівнянь ***f(x)=0*** поділяють на ***аналітичні*** (прямі), коли їх корені визначаються за коефіцієнтами рівнянь за певними формулами, і ***наближені*** (ітераційні), побудовані на базі спеціальних чисельних методів.

Так як більшість нелінійних рівнянь не розв'язуються шляхом аналітичних перетворень (тобто прямими, точними методами), на практиці використовують чисельні методи.

Нехай в процесі дослідження моделі необхідно визначити корінь рівняння ***f(x)=0***, тобто знайти таке значення $\boldsymbol{x=x^*}$, підстановка якого в рівняння робить його тотожністю.

Як легко бачити, для дійсних коренів завдання відшукання розв'язку рівняння легко інтерпретується графічно: корінь є таке значення незалежної змінної, при якому відбувається перетин графіка функції, що стоїть в лівій частині рівняння, з віссю абсцис.

*Приклад*. Рівняння $\boldsymbol{x^2 - \sin(x) = 1}$.

Перетворимо його в $\boldsymbol{x^2 - \sin(x) - 1 = 0}$ і визначимо, що $\boldsymbol{f(x) = x^2 - \sin(x) - 1}$.

Графік функції має вигляд, як на рисунку 23.

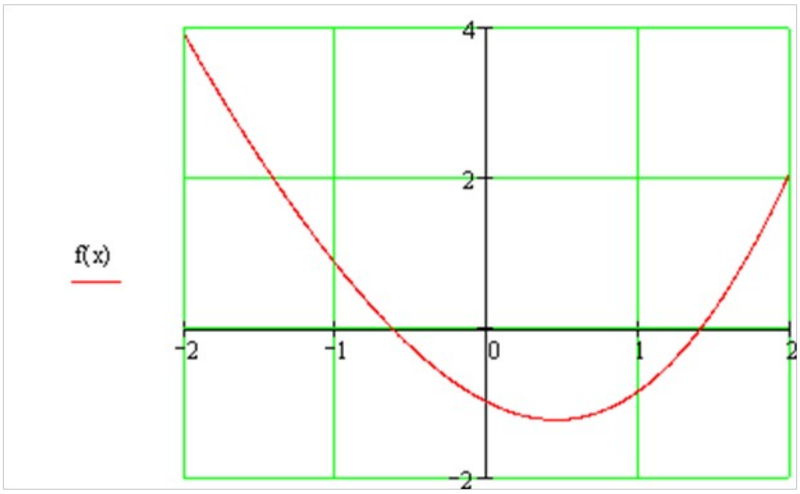


Рисунок 23 – Графік функції $x^2 - sin(x) - 1$

Можна приблизно знайти область локалізації коренів рівняння. Видно, що дане рівняння має два дійсних корені – один на відрізку **[*-1, 0*]** , а другий – **[*1, 2*]**.

Розв'язком з сімома значущими цифрами є

$$x_1 = -0.6367327 \quad x_2 = 1.409624.$$

Всі чисельні методи розв’язування рівнянь являють собою ітераційні алгоритми послідовного наближення до кореня рівняння.

Тобто вибирається початкове наближення до кореня і потім з допомогою ітераційної формули генерується послідовність $x_1, x_2, \ldots x_k$, що сходиться до кореня рівняння $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$.

***Критерії збіжності*** при розв'язанні рівнянь:

а) абсолютна зміна наближення на сусідніх кроках ітерації

$$|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon\ ;$$

б) відносна зміна наближення на сусідніх кроках ітерації

$$\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \le \varepsilon;$$

в) близькість до нуля обчисленого значення лівої частини рівняння (іноді це значення називають нев'язкою рівняння, так як для кореня вона дорівнює нулю)

$$|f(x_k)| \le \varepsilon .$$

***Процедура визначення кореня*** складається з двох етапів:

а) відділення кореня (ізоляція) — визначення найменших інтервалів (одного або декількох), на яких міститься єдиний корінь;

б) уточнення кореня — доведення значення кореня до заданої точності.

## 3.1 Відділення коренів

Якщо неперервна функція на кінцях інтервалу [***a, b***] має значення різних знаків, то на цьому інтервалі є корені; якщо функція монотонна, то цей корінь єдиний.

Розіб'ємо інтервал існування функції [$\boldsymbol{x_n}$, $\boldsymbol{x_к}$] на рівні відрізки довжиною $\boldsymbol{\Delta x}$ і будемо обчислювати значення функції на кінцях цих відрізків (***f(a)*** і ***f(b)*** відповідно). Умовою наявності кореня буде ***f(a)*f(b)<=0*** (рисунок 24).

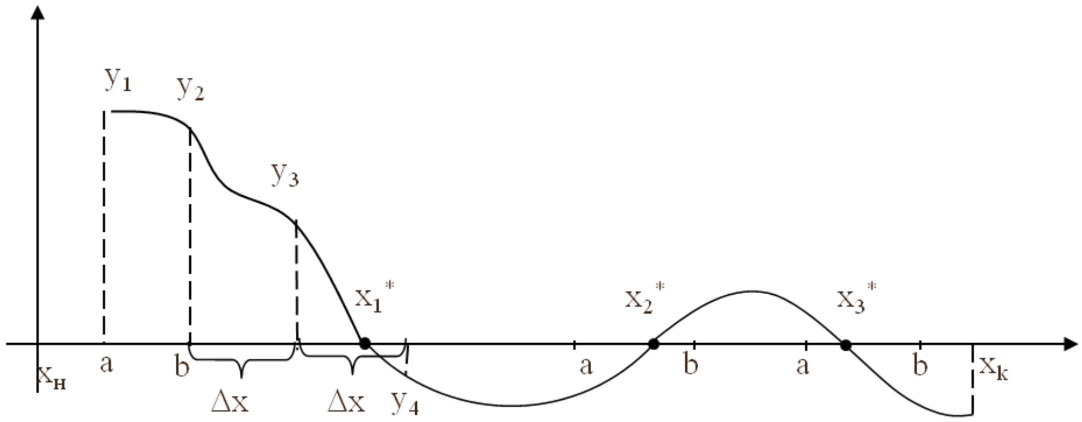


Рисунок 24 – Графічна ілюстрація процедури відділення коренів

На рисунку 25 наведена схема алгоритму відділення кореня.

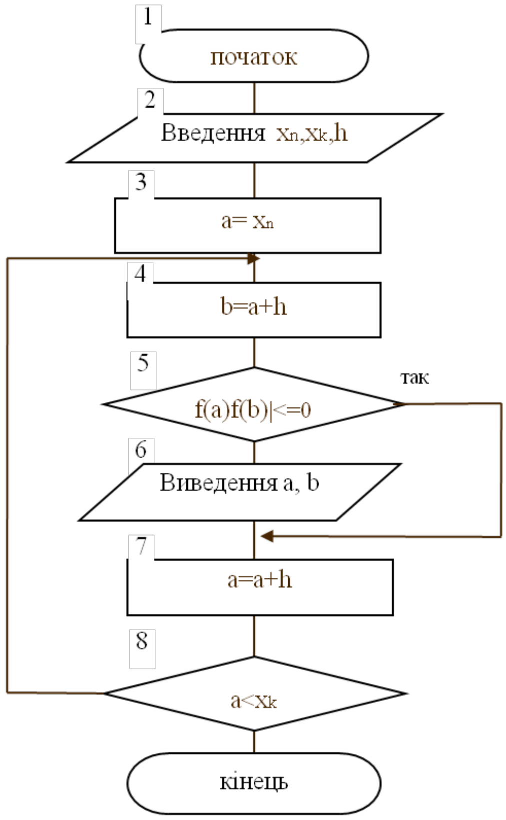


Рисунок 25 – Схема алгоритму процедури відділення кореня

### 3.2 Метод поділу навпіл

Метод поділу відрізка навпіл (дихотомії) заснований на теоремі Больцано-Коші: якщо неперервна на відрізку **[*a, b*]** функція ***f(x)*** на кінцях його має протилежні знаки, тобто ***f(a)<0*** і ***f(b)>0*** або ***f(a)>0 і f(b)<0***, що означає виконання умови ***f(a)*f(b)<0***, то на цьому інтервалі вона хоча б раз звертається в нуль.

Якщо неперервна і строго монотонна на відрізку [***a, b***] функція ***f(x)*** на кінцях його має протилежні знаки, то на цьому інтервалі існує один і тільки один корінь.

На основі цих тверджень побудуємо алгоритм (рисунки 26-27):

а) розділимо [***a, b***] на дві рівні частини і визначимо значення функції в точці

$$t=\frac{a+b}{2}$$

;

б) якщо ***f(t)=0***, ***t*** — корінь рівняння, виводимо його значення і закінчуємо обчислення, інакше

в) аналізуємо знак добутку ***f(a)*f(t)***;

г) якщо добуток має від'ємне значення, то приймемо ***b=t***, корінь буде на відрізку [***a, t***];

д) якщо цей твір має позитивне значення, то приймемо ***a=t***, корінь буде на відрізку [***t, b***];

е) аналізуємо результат умови │***b-a***│ < ***E***, де ***E*** - точність уточнення кореня, і якщо умова не виконується, то повертаємося до п. а), інакше закінчуємо обчислення.

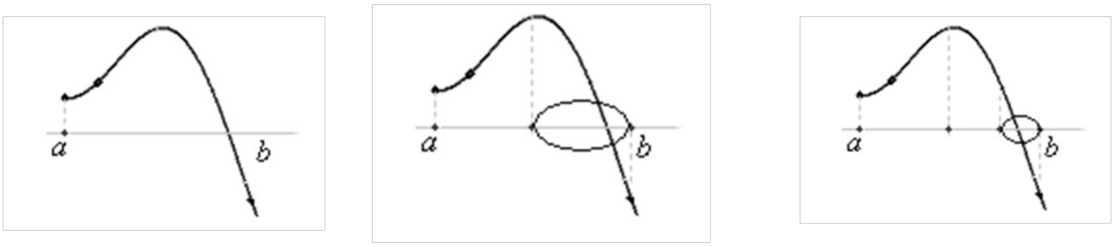


Рисунок 26 – Графічна ілюстрація процесу локалізації кореня методом дихотомії

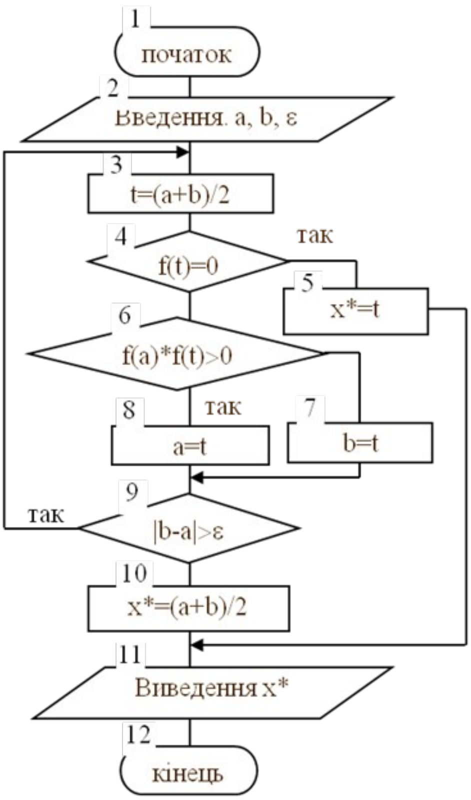

Рисунок 27 – Схема алгоритму методу дихотомії

### 3.3 Метод простих ітерацій

Цей метод базується на послідовному наближенні до розв'язку шляхом багаторазового застосування певної обчислювальної або аналітичної процедури. При цьому вхідними даними для кожної наступної процедури є результати виконання попередньої.

Для застосування цього методу необхідно:

а) вихідне рівняння перетворити до вигляду $x=f(x)$;

б) вибрати нульове наближення кореня $x_0$ на інтервалі ізолювання кореня $[x_n, x_k]$.

Перетворення $x=f(x)$, як правило, не однозначно і окремим завданням є оцінка придатності та ефективності того чи іншого способу.

Наприклад, рівняння $x^2 - \sin x = 1$ можна перетворити, наприклад, так: $x = \sqrt{1 + \sin x}$ або так: $x = \arcsin(x^2 - 1)$, або так: $x = \dfrac{1 + \sin x}{x}$ і т. д.

Для отримання наступного наближення кореня в праву частину рівняння $x= f(x)$ необхідно підставити це нульове наближення так, що $x_1= f(x0)$, а далі відповідно $x_2= f(x_1)$ ,..., $x_n= f(x_{n-1})$.

Границя даної послідовності і буде коренем вихідного рівняння.

Слід мати на увазі, що не всі ряди будуть збігатися. Існує теорема, згідно з якою, для збіжності ітераційного процесу достатньо, щоб на інтервалі, на якому уточнюється корінь, виконувалася нерівність $| f '(x) | < 1$.

Алгоритм процедури уточнення кореня за методом простих ітерацій наведено на рисунку 28.

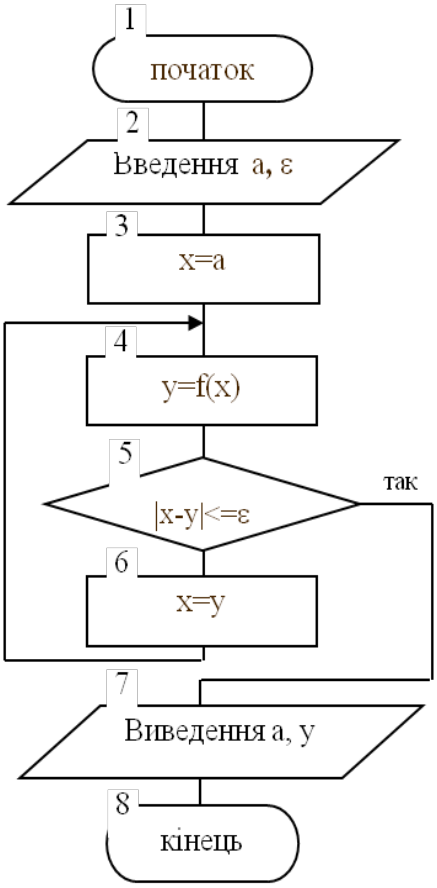


Рисунок 28 – Алгоритм процедури уточнення кореня за методом простих ітерацій

## Контрольні питання

1 Назвіть етапи процесу чисельного знаходження кореня нелінійного рівняння.

2 Яким еквівалентним рівнянням замінюється рівняння ***f(x)=0*** при розв'язуванні його методом простих ітерацій?

3 Рівняння якого виду називається алгебраїчним?

4 Рівняння якого виду називається трансцендентним?

5 Запишіть умову наявності кореня рівняння ***f(x)=0*** на [***a, b***].

6 Опишіть метод ділення відрізка навпіл при знаходженні кореня нелінійного рівняння.

7 Яка умова повинна виконуватися для збіжності процесу знаходження коренів нелінійного рівняння $\boldsymbol{x=f(x)}$ методом простої ітерації на [$\boldsymbol{a, b}$]?

8 Поясніть, чому при застосуванні метода ділення відрізка навпіл при знаходженні кореня нелінійного рівняння $\boldsymbol{f(x)=0}$ функція повинна бути неперервною і строго монотонною?

9 Запишіть критерії збіжності методів чисельного розв'язання рівнянь.

10 Які методи розв'язання рівнянь вигляду $\boldsymbol{f(x)=0}$ Ви знаєте?

## 4 Обробка результатів експериментів

При моделюванні різних фізичних, технологічних, економічних та інших процесів виникає необхідність визначити:

- характер зміни якої-небудь змінної величини залежно від зміни іншої величини;
- значення, яких може набувати ця величина при різних умовах функціонування системи.

Ці дані дозволяють прогнозувати поведінку системи і дають можливість приймати обґрунтовані рішення в питаннях її проектування, управління і т. д.

Для отримання таких даних проводяться експерименти з моделлю системи або процесу. Результати експериментів являють собою сукупності значень досліджуваних величин, які, як правило, задані таблично — у вигляді координат точок $\{x_i, y_i\}$, $i=1, N$.

### 4.1 Інтерполяція поліномом Лагранжа

***Інтерполяція*** — це знаходження многочлена не вище $\boldsymbol{n}$-го ступеня

$$P_n(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \,, \qquad (1)$$

який в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ набуває тих самих значень, що і дана функція, тобто виконуються рівності

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \,, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n \,. \qquad (2)$$

Іншими словами, інтерполяція – знаходження многочлена (поліному) виду (1), який на відрізку [***a, b***] був би наближенням для функції $y = f(x)$.

Нехай на відрізку [***a, b***] задані значення функції $y = f(x)$ в точках $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$:

$$f(x_0) = y_0, \; f(x_1) = y_1, \; f(x_2) = y_2, \; \ldots, \; f(x_n) = y_n.$$

Многочлен (1) називається інтерполяційним многочленом, точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ – вузлами інтерполяції.

Задача інтерполяції — знайти наближені значення функції $f(x)$ у проміжних точках $x$, що лежать між вузлами інтерполяції, коли функція задана тільки в точка $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ а також, коли функція задана формулою на всьому відрізку [***a, b***], але обчислення її значення за цією формулою трудомістке.

$$f(x) \approx P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} y_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} y_n \quad (3)$$

Вираз (3) є інтерполяційною формулою Лагранжа [3].

На рисунку 29 зображений графічний вигляд побудованої за цією формулою кривої.

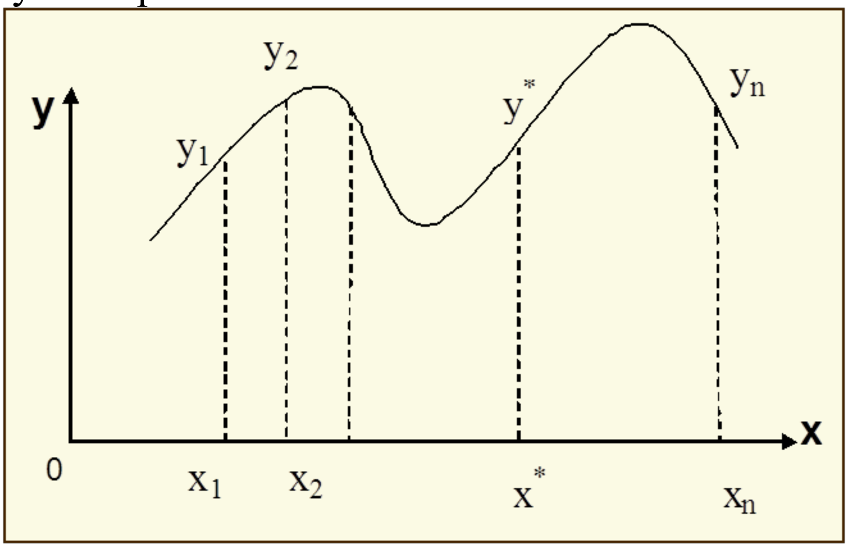


Рисунок 29 – Ілюстрація методу Лагранжа

Приклад. В результаті експерименту для функції $f(x)$ отримали такі значення:

***$x_0 = 1$          $x_1 = 3$  $x_2 = 5$;***
***$y_0 = 2$  $y_1 = 1$  $y_2 = 8$.***

Знайти многочлен другого ступеня, що наближено виражає функцію ***f(x).***

Враховуючи вищенаведене, знаходимо

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2=$$

$$\frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)}2+\frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)}1+\frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)}8;$$

$$P_2(x)=x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}.$$

При складанні алгоритму рисунок 30 обчислення значення полінома Лагранжа скористаємося формулою

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}y_2+\text{¿}$$
$$\dots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n=\sum_{\text{¿}}^{n}\text{¿}_n.$$

Для зручності приймемо нумерацію не з ***0***, а ***1***. Позначимо коефіцієнти при $\boldsymbol{y_i}$ літерою ***B***

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}By_i.$$

Позначимо т. ***x**** , в якій обчислюємо значення полінома, літерою ***D***, тоді

$$B = \frac{(D - x_1)(D - x_2)\ldots(D - x_{i-1})(D - x_{i+1})\ldots(D - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

$$B = B\frac{D - x_j}{x_i - x_j}.$$

Початкове значення ***B=1***, потім

Якщо ***i=j*** , то обчислення за формулою не здійснюються. Для визначення суми спочатку беремо ***f(x*)=0***, ***f(x*)=f(x*)+By**$_i$**.***

В алгоритмі на рисунку 30 літерою ***S*** позначено ***f(x*).***

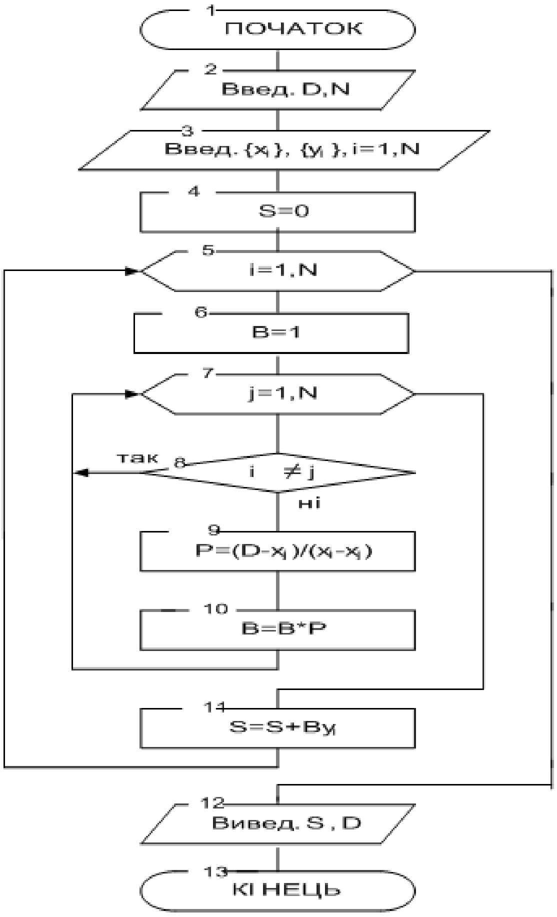


Рисунок 30 – Ілюстрація методу Лагранжа

### 4.2 Регресійний аналіз. Апроксимація кривих методом найменших квадратів

Вплив випадкових факторів в ході експерименту на систему або її модель призводить до того, що результати експерименту набувають характеру випадкових величин. Тоді для виявлення закономірностей та побудови математичної моделі процесу використовуються методи статистичної обробки даних.

У багатьох випадках завдання полягає в тому, щоб знайти аналітичний вираз функції однієї змінної шляхом визначення рівняння лінії, що проходить через задані точки (експериментальні значення досліджуваної величини).

Регресійний аналіз дає можливість побудувати математичну модель залежності, яка найкращим чином відповідає експериментальним даним. При цьому крива апроксимуючої функції проходить не через точки, отримані в результаті експерименту, а поблизу них, даючи усереднену характеристику процесу. Така процедура називається згладжуванням експериментальної залежності (рисунок 31).

Функцію що апроксимує (згладжує) називають ще ***регресійною моделлю***.

При побудові регресійної моделі необхідно, щоб вона якомога більш точно відображала характер процесу, який моделюється, і при цьому, по можливості, були б повніше виключені випадкові відхилення.

### 4.2.1 Метод найменших квадратів

Метод найменших квадратів є одним з найбільш розповсюджених методів апроксимації, що використовується на практиці.

Як і у випадку задачі інтерполювання, результати експерименту задані у вигляді точок масивів $\{ x_i \}$, $\{ y_i \}$, $i=1, N$.

Для практичних цілей можна вибрати функцію невеликого порядку, значення якої $f(x_i)$ у вузлових точках $\{ x_i \}$ найменшим чином відрізнялися б від експериментальної залежності $\{ y_i \}$. За аналогією з інтерполяцією таку функцію, називають апроксимантом.

Як функція, що згладжує, як правило, використовується степеневий поліном $y = f(A, B, C, ..., x)$, де $A, B, C, ...$ — коефіцієнти при $x, x^2, \ldots, x^N$.

Порядок полінома вибирається, виходячи з аналізу природи досліджуваної залежності і досвіду фахівців.

Функцію помилки запишемо в такому вигляді:

$$S=\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-f\left(A,B,C,\ldots,x_i\right)\right)^2.$$

Завдання зводиться до того, щоб знайти такі значення коефіцієнтів

***A, B, C, ...,*** при яких функція ***S*** досягає мінімуму. У даному випадку

***A, B, C,*** ...- це змінні, від яких залежить ***S***, і очевидно, що мінімум функції ***S*** можна знайти класичним шляхом в результаті розв'язування системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial A}=0\,;\\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial B}=0\,;\\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial C}=0\,.\end{cases}$$

*Приклад.* Якщо апроксимант є лінійною функцією (поліном 1–го порядку), то він має вигляд ***y=A+Bx.***

Функція помилки при цьому набуде вигляду

$$S=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{N}\left[\,y_i-\left(A+Bx_i\right)\right]^2.$$

Після піднесення до квадрата одержимо вираз

$$S=\sum_{i=1}^{N}(\,y_i^2-2Ay_i-2Bx_iy_i+A^2+2ABx_i+B^2x_i^2\,).$$

Для визначення мінімуму знайдемо

$$\frac{\partial S}{\partial A}=0;\quad \frac{\partial S}{\partial B}=0.$$

Обчисливши похідні від ***S*** по ***A*** і ***B***, отримаємо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{i-1}^{N} \left(-2y_i+2A+2Bx_i\right)=0;\text{¿¿¿¿} \end{cases}$$

Після виконання простих перетворень система набуде вигляду

$$\begin{cases} AN+B\sum_{i=1}^{N} x_i=\sum_{i-1}^{N} y_i;\text{¿¿¿¿} \end{cases}$$

Таким чином, отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої дасть шукані значення коефіцієнтів ***A*** і ***B***.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів для випадку, коли в ролі апроксимуючої кривої обрана квадратична парабола:

$\boldsymbol{f(x)=Ax^2+Bx+C}$ або $\boldsymbol{f(x_i,,a,b,c)=Ax_i^2+Bx_i+C.}$

Виходячи з суті методу, необхідно, щоб значення

$$S=\sum_{i=1}^{n} \left[y_i-f\left(x_i,A,B,C\right)\right]^2 \rightarrow \min \quad ,$$

тобто виконувалася умова мінімуму суми квадратів відхилень експериментальних значень $\boldsymbol{y_i}$ від аналітичної залежності $\boldsymbol{f(x_i, A, B, C)}$, обчисленої в точці $\boldsymbol{x_i}$ (рисунок 31).

Виходячи з рівності нулю перших часткових похідних від $\boldsymbol{S}$ по $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ , отримаємо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial A} = 0\,; \\ \dfrac{\partial S}{\partial B} = 0\,; \\ \dfrac{\partial S}{\partial C} = 0\,. \end{cases}$$

Після виконання перетворень система матиме вигляд

$$A\sum_{i=1}^{N} x^4{}_i + B\sum_{i=1}^{N} x^3{}_i + C\sum_{i=1}^{N} x^2{}_i = \sum_{i=1}^{N} x^2{}_i y_i$$

$$A\sum_{i=1}^{N} x^3{}_i + B\sum_{i=1}^{N} x^2{}_i + C\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$A\sum_{i=1}^{N} x^2{}_i + B\sum_{i=1}^{N} x_i + CN = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

При складанні алгоритму (рисунок 32) введемо такі позначення:

$$SX4 = \sum_{i=1}^{N} x^4{}_i \;\; SX3 = \sum_{i=1}^{N} x^3{}_i \;\; SX2 = \sum_{i=1}^{N} x^2{}_i \;\; SX = \sum_{i=1}^{N} x_i\,,$$

$$SX2Y = \sum_{i=1}^{N} x_i{}^2 y_i \;\; SXY = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \;\; SY = \sum_{i=1}^{N} y_i\,.$$

В матричному вигляді систему можна записати так:

|SX4 SX3 SX2¿||SX3 SX2 SX¿|¿¿¿
¿

.

Алгоритм методу найменших квадратів наведений на рисунку 32.

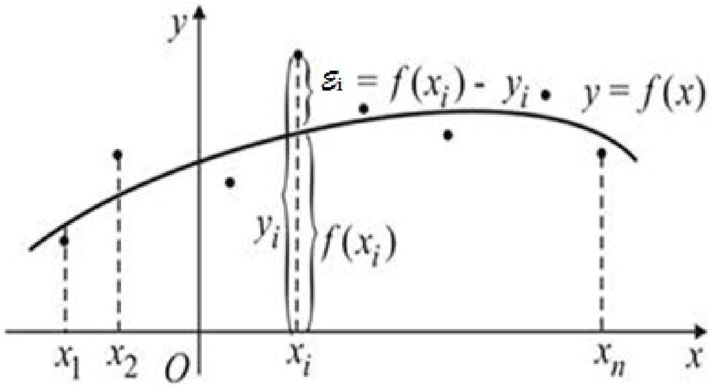


Рисунок 31 – Ілюстрація методу найменших квадратів

***Етапи реалізації завдання апроксимації:***

а) за координатами точок масивів $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ обчислюються коефіцієнти СЛАР відносно невідомих ***A, B, C***, що входять у функцію ***f(x)=*** $\boldsymbol{Ax^2 + Bx + C}$***;***

б) розв'язується СЛАУ, і в результаті визначаються значення ***A, B, C;***

в) обчислюються значення апроксиманта (точки апроксимуючої кривої) в досліджуваному діапазоні.

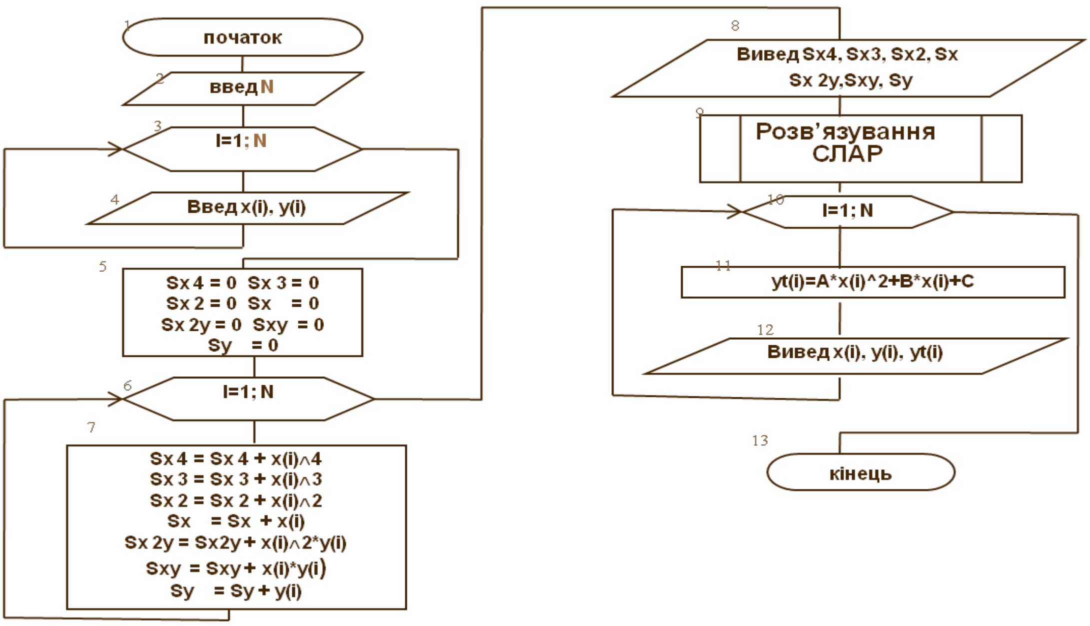


Рисунок 32 – Схема алгоритму методу найменших квадратів

### 4.2.2 Деякі екстраполяційні методи

***Екстраполяція*** – отримання значень $\boldsymbol{y(x)}$ при х, що не належать $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_n}]$, також здійснюється з використанням розглянутих вище методів, але з істотно більшою похибкою.

***Зворотна інтерполяція*** – процес знаходження значень $\boldsymbol{x}$ за заданим значенням $\boldsymbol{y}$. Вона може виконуватися з використанням будь-якого методу інтерполяції, при цьому замість значень $\boldsymbol{x_i}$ вводяться $\boldsymbol{y_i}$ , а замість значень $\boldsymbol{y_i}$ – $\boldsymbol{x_i}$.

***Багатоінтервальна інтерполяція*** полягає в інтерполяції $\boldsymbol{y_i(x_i)}$ у ряді часткових інтервалів (обмежених двома вузлами або групою вузлів) окремими поліномами невисокого ступеня. Вона застосовується, коли звичайна інтерполяція поліномом високого ступеня дає вилику похибку.

***Сплайн-інтерполяція*** – спеціальний вид багатоінтервальної інтерполяції, при якому інтерполюючий поліном забезпечує не тільки виконання умови $\boldsymbol{y(x)} = \boldsymbol{y_i}$ у вузлах, але і безперервність заданого числа перших похідних на границях часткових інтервалів.

## Контрольні питання

1 Сформулюйте постановку задачі інтерполяції функції.

2 Яку функцію називають апроксимуючою?

3 У чому полягає сутність методу найменших квадратів?

4 Основні галузі застосування задачі інтерполяції функцій.

5 З яких етапів складається задача апроксимації поліномом 2-го порядку?

6 Запишіть формулу полінома n-го ступеня.

7 Що таке багатоінтервальна інтерполяція?

8 Що таке екстраполяція?

9 Що таке зворотна інтерполяція?

10 Що таке сплайн- інтерполяція?

## Список літератури

1 Боглаев, Ю. П. Вычислительная математика и программирование [Текст]: учеб. пособие для студентов втузов / Ю. П. Боглаев. — М.: Высшая школа, 1990. — 544 с.

2 Математичні методи та моделі в розрахунках на ЕОМ [Текст]: навч. посібник / М. І. Данько, В. С. Меркулов, В. О. Гончаров [и др.]; під ред. М. І Данька. – Харків: УкрДАЗТ, 2008 – 174 с.

3 Математичні методи і моделі: комп'ютерне моделювання [Текст]: підручник / Н. М. Завгородня, С. В. Панченко, С. Є. Бантюков, В. С. Меркулов; МОН Украины. – Харків: УкрДАЗТ, 2012. —186 с.

4 Советов, Б. Я. Моделирование систем [Текст]: учеб. для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. школа, 2001. — 343 с.

5 Турчак, Л. И. Основы численных методов [Текст] / Л. И. Турчак. – М.: Наука, 1987. — 320 с.

6 Шеннон, Р. Имитационное моделирование систем — искусство и наука [Текст]: пер. с англ. / Р. Шеннон; под ред. Е. К. Масловского. — М.: Мир, 1978. — 420 с.

7 Шуп, Т. Е. Прикладные и численные методы в физике и технике [Текст]: пер. с англ. / Т. Е. Шуп. – М.: Высшая школа, 1990. — 255 с.

8 http://ppt4web.ru/informatika/vidy-i-klassifikacija-modelejj.html