**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

Кафедра вищої математики

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Частина II

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання контрольних робіт
з дисципліни “Вища математика”
для студентів загальнотехнічних спеціальностей
заочної форми навчання**

Харків 2007

Завдання і методичні вказівки призначені для студентів загально-технічних спеціальностей безвідривної форми навчання. Розглянуті і рекомендовані до друку на засіданні кафедри вищої математики УкрДАЗТ, протокол №   від 21 травня 2007 року.

Укладачі
доц. О.А. Осмаєв
доц. О.О. Думіна
асист. Ю.С. Шувалова

Рецензент доцент А.О.Дрогаченко

Вступ

Дані методичні вказівки присвячені одному з розділів курсу “Вища математика” – інтегральному численню. В частині II розглянуті основні методи дослідження невласних інтегралів функцій однієї змінної та застосування визначених інтегралів. Робота містить програму, розв’язки типових прикладів та варіанти контрольних робіт для студентів-заочників загальнотехнічних спеціальностей.

Вказівки рекомендовані студентам-заочникам, але можуть бути використані і при вивченні цього розділу студентами стаціонару.

Загальні рекомендації

В зв'язку з невеликим обсягом аудиторних занять (лекційних і практичних) основним джерелом знань для студентів заочної форми навчання є не конспект лекцій, а підручник. Особливу увагу слід звертати на визначення основних понять курсу, а при вивченні теорем – на їх формулювання, прагнути до чіткого усвідомлення припущень теорем і доведення тверджень.

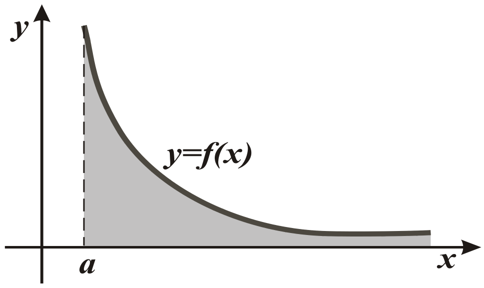
Вивчення теоретичного матеріалу слід супроводжувати розв'язанням задач. Корисно для закріплення навичок, крім свого варіанта, виконати завдання ще кількох варіантів.

Номери варіантів індивідуальних завдань видаються викладачем. Залік контрольних робіт згідно з учбовою програмою є необхідною умовою допуску студента до заліку або екзамену з курсу вищої математики. Контрольна робота, що містить виконаний чужий варіант завдань, не заліковується.

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Визначенн.

Нехай функція $f(x)$ неперервна у напівнескінченному інтервалі $[a;+\infty)$.



Невласним інтегралом з нескінченними межами інтегрування (першого роду) зветься:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)dx .$$

Якщо вказана границя скінченна, то говорять, що невласний інтеграл *збігається*; якщо границя нескінченна або не існує, то невласний інтеграл *розбігається*.

Аналогічно визначають *невласний інтеграл* першого роду на необмеженому проміжку $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)dx .$$

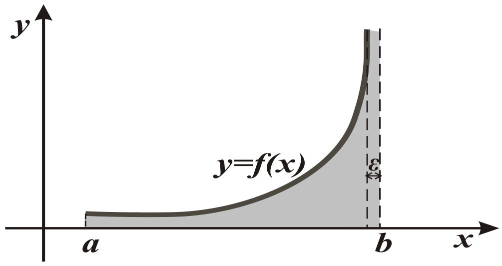
Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на всій вісі, можна розглядати *невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування* на інтервалі $(-\infty,+\infty)$. За визначенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

,

цей інтеграл збігається, якщо обидва інтеграли в правій частині рівності, збігаються.

Нехай функція $f(x)$ неперервна для будь-яких $x\in[a;b)$ та необмежена при $x\to b$.
Невласним інтегралом від



необмеженої функції (другого роду) зветься:

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Якщо границя скінченна, то невласний інтеграл називають *збіжним*; якщо нескінченна або не існує, то *розбіжним.*

Аналогічно визначають *невласні інтеграли від необмеженої функції (другого роду)* від функцій, що терплять нескінченний розрив тільки на лівому кінці інтервалу $[a;b]$

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx .$$

Для функції $f(x)$, що має нескінченний розрив тільки в точці c інтервалу (a,b) за визначенням

$$\int_a^{b} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{b} f(x)dx ,$$

цей інтеграл збігається, якщо обидва доданки в правій частині рівності збігаються.

Збіжним невласним інтегралам можна надати геометричного змісту. Для $f(x)\geq 0$, якщо інтеграл збігається, то площа під кривою $f(x)$ скінченна і дорівнює значенню цього інтеграла. Якщо інтеграл розбігається, то говорити про площу не можна.

При дослідженні збіжності невласних інтегралів важливу роль грає поняття особливої точки.

Особливими точками звуться точки, в будь-якому околі яких функція необмежена, а також $-\infty$ та $+\infty$.

Зауважимо, що якщо підінтегральна функція на проміжку інтегрування має кілька особливих точок, то інтеграл за властивістю адитивності потрібно розбити на суму кількох інтегралів так, щоб в кожному була лише одна особлива точка. Такий інтеграл буде збігатися лише в тому випадку, якщо всі доданки будуть збіжними, та розбігатися в усіх інших випадках.

Приклад 1. За допомогою визначення доведемо розбіжність невласного інтеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Оскільки підінтегральна функція $\frac{1}{x}$ існує для будь-яких $x\neq 0$, то на відрізку інтегрування $x\in[1;\infty)$ вона неперервна. Єдина особливість виникає при $x=+\infty$, тому це невласний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). За визначенням $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big\|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$ – границя дорівнює нескінченності, тому невласний інтеграл розбігається.

Приклад 2. За допомогою визначення доведемо збіжність невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Оскільки підінтегральна функція $\frac{1}{1+x^2}$ визначена для будь-яких x, то вона неперервна при $x\in(-\infty;+\infty)$ (на всьому проміжку інтегрування). Тобто є лише дві особливості $x=-\infty$, $x=+\infty$, тому маємо інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). За визначенням

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{c}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{c}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c}\frac{dx}{1+x^2}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}(arctgc-arctga)+\lim\limits_{b\to+\infty}(arctgb-arctgc)=$$

$=(arctgc-\left(-\frac{\pi}{2}\right))+(\frac{\pi}{2}-arctgc)=\pi$, оскільки обидві границі скінченні, то інтеграл збігається.

<u>Приклад *3*</u>**.** За допомогою визначення доведемо розбіжність невласного інтеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

Інтеграл має скінченні границі інтегрування. Розглянемо підінтегральну функцію $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Знайдемо її особливі точки: $x\ln x=0$, тобто $x=0$ або $\ln x=0$, тому особливі точки $x=0$ та $x=1$. На проміжок $[1;2]$ попадає лише $x=1$, отже маємо невласний інтеграл від необмеженої функції (другого роду).

За визначенням $\int_1^2 \frac{dx}{x\,ln\,x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\,ln\,x}$.

Щоб уникнути громіздких позначень, обчислимо первісну функції $\frac{1}{x\ln x}$ окремо:

$$F(x)=\int\frac{dx}{x\ln x}=\begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\dfrac{dx}{x}\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\ln x|+c\,.$$

Тепер повернемося до обчислення невласного інтеграла

$$\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^2=\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\ln|\ln 2|-\ln|\ln(1+\varepsilon)|\big)=\infty$$

– границя дорівнює нескінченності, оскільки $\ln|\ln(1+\varepsilon)|\underset{\varepsilon\to 0}{\to}-\infty$, тому невласний інтеграл розбігається.

<u>Приклад 4</u>. За допомогою визначення доведемо розбіжність невласного інтеграла $\int_1^3 \frac{dx}{(2-x)^2}$

Розглянемо підінтегральну функцію $\frac{1}{(2-x)^2}$**.** Знайдемо її особливі точки: $(2-x)^2=0$, тобто $x=2$. Даний інтеграл є невласним інтегралом від необмеженої функції (другого роду), бо підінтегральна функція $\frac{1}{(2-x)^2}$ має особливість при $x=2$ та точка $x=2$ належить інтервалу інтегрування $[1;3]$.

За визначенням маємо

$$\int_1^3\frac{dx}{(2-x)^2}=\int_1^2\frac{dx}{(2-x)^2}+\int_2^3\frac{dx}{(2-x)^2}=\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_1^{2-\varepsilon'}\frac{dx}{(2-x)^2}+\lim_{\varepsilon''\to 0}\int_{2+\varepsilon''}^3\frac{dx}{(2-x)^2}\,. \quad (1)$$

Щоб уникнути громіздких позначень, обчислимо первісну функції $\frac{1}{(2-x)^2}$ окремо:

$$F(x)=\int\frac{dx}{(2-x)^2}=\begin{bmatrix} t=x-2 \\ dt=dx \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{(-t)^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{t}+c=-\frac{1}{x-2}+c=\frac{1}{2-x}+c$$

.

Розглянемо перший доданок в визначенні невласного інтеграла: $\lim\limits_{\varepsilon'\to 0}\int\limits_{1}^{2-\varepsilon'}\frac{dx}{(2-x)^2}=\lim\limits_{\varepsilon'\to 0}\left(\frac{1}{2-x}\right)\Bigg|_{1}^{2-\varepsilon'}=\lim\limits_{\varepsilon'\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon'}-1\right)=\infty$ – для того щоб інтеграл збігався потрібно, щоб обидві границі в рівності (1) були скінченні, в цьому прикладі вже перша границя дорівнює нескінченності, тому невласний інтеграл розбігається.

Ознаки збіжності невласних інтегралів

З'ясування питання про збіжність невласних інтегралів значно ускладнюється, якщо первісна функції невідома або її складно обчислити. У випадку *невід'ємної* підінтегральної функції $f(x)\geq 0$ є прості ознаки збіжності невласних інтегралів, що дозволяють визначити збіжність, не вдаючись до обчислення первісної. Сформулюємо ці ознаки для невласних інтегралів з необмеженими межами інтегрування (першого роду). Для визначеності будемо розглядати невласні інтеграли виду $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$; ознаки збіжності для інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{a}f(x)dx$ формулюються аналогічно.

Теорема 1. (*ознака порівняння в загальній формі*)
Нехай $0\leq f(x)\leq g(x)$ для будь-якого $x>a$

1) якщо „більший" інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}g(x)dx$ збігається, то „менший" інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ теж збігається ;

2) якщо „менший" інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ розбігається, то „більший" інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}g(x)dx$ теж розбігається.

Визначення:
Функції називаються *еквівалентними* при $x\to x_0$: $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$, де A – будь-яке число, що не дорівнює нулю або нескінченності.

Теорема 2. (*ознака порівняння в граничній формі*)

Нехай $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} g(x)$, тоді поведінка інтегралів $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ однакова, тобто вони збігаються та розбігаються одночасно.

В якості „еталонних" функцій, з якими найчастіше порівнюють інші функції, відзначимо степеневі функції $\frac{1}{x^p}$ та експоненціальну e^{-kx}:

Невласний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду)	
$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$	збігається при $p > 1$
	розбігається при $p \le 1$
$\int\limits_a^{+\infty} e^{-kx} dx$	збігається при $k > 0$
	розбігається при $k \le 0$

Невласний інтеграл від необмеженої функції (другого роду)	
$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p}$	збігається при $p < 1$
	розбігається при $p \ge 1$

Еталонний інтеграл від необмеженої функції можна узагальнити:

Невласні інтеграли від необмеженої функції (другого роду)	
$\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^p}$; $\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(x-b)^p}$; $\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(x-c)^p}$, $c \in (a;b)$;	збігаються при $p < 1$
	розбігаються при $p \ge 1$

Сформульовані вище теореми застосовуються тільки для функцій, що зберігають знак на інтервалі інтегрування. Більш складним є дослідження інтегралів, що не зберігають постійний знак, наприклад таких, як $\frac{\sin x}{x}$. Для знакозмінних функцій розрізняють два види збіжності: абсолютну та умовну.

Визначення.

Якщо $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається напевно, говорять, що $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається *абсолютно*.

Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, а $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то говорять, що $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається *умовно*.

Теорема 3. (*спеціальна ознака збіжності*)
Якщо 1) функція $g(x)$ монотонно прямує до нуля, коли $x \to +\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$);

2) функція $f(x)$ має обмежену первісну $F(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$, $F(x) \le M, x \in (a;+\infty)$

тоді невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається, взагалі кажучи не абсолютно.

На ознаках збіжності для інтегралів від необмежених функцій (другого роду) ми зупинятися не будемо, оскільки вони формулюються подібно розглянутим в теоремах 1-3.

<u>Приклад 5</u>. За допомогою ознаки порівняння доведемо розбіжність невласного інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Оскільки функція $\frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}}$ існує для будь-яких $x \ne 0$, то при $x \in [1;+\infty)$ вона неперервна. Маємо єдину особливість $x = +\infty$, тобто інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). Зазначимо, що функція $\frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}} \ge 0$ при $x \in [1;+\infty)$

Спробуємо довести розбіжність цього інтегралу. Для ілюстрації застосування ознак збіжності наведемо два способи доведення розбіжності цього невласного інтеграла.
<u>І спосіб.</u>

Розглянемо функцію $\frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}}$ при $x > 1$, оскільки $arctgx$ на проміжку $[1;+\infty)$є монотонно зростаючою функцією, то справедлива нерівність $arctgx > arctg1 = \frac{\pi}{4}$, при $x > 1$. Маємо $\frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}} > \frac{\pi}{4\sqrt[3]{x^2}} = g(x) > 0$ при $x > 1$.

Розглянемо інтеграл від отриманої функції $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\pi}{4\sqrt[3]{x^2}}dx = \frac{\pi}{4}\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3}}dx$ – це еталонний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду), $p = \frac{2}{3} < 1$, тому він розбігається (це „менший” інтеграл), а тому за ознакою порівняння (теорема 1) розбігається і $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ (як „більший” інтеграл).

II спосіб.

Оскільки збіжність інтеграла залежить лише від поведінки функції $\frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}}$ в околі $+\infty$, придумаємо для цієї функції еквівалентну при $x \to +\infty$:

$$\frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Розглянемо $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ – це розбіжний ($p = \frac{2}{3} < 1$) еталонний інтеграл з нескінченими межами інтегрування (першого роду). Якщо довести, що функція $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ еквівалентна вихідній підінтегральній функції, то за ознакою порівняння в граничній формі (теорема 2) можна буде зробити висновок, що $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ теж розбігається. Доведемо еквівалентність за означенням:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}\begin{cases} \neq 0 \\ \neq \infty \end{cases}$, отже функції еквівалентні, а значить інтеграли від них ведуть себе однаково, тому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ розбігається.

Приклад 6. За допомогою ознаки порівняння доведемо збіжність невласного інтеграла $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}dx$.

Функція $\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}$ існує при будь-яких $x \neq -1$. Маємо дві особливості $x = \infty$, $x = -1$. Тобто потрібно розбити вихідний інтеграл на два, так щоб в кожному була лише одна особлива точка $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3}dx$. Розглянемо кожен інтеграл окремо. Зазначимо, що $\frac{x + 2\sqrt[5]{x} + 4}{1 + x^3} \geq 0$ при $x \in (-1;+\infty)$.

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}dx$ – це інтеграл з нескінченними межами інтегрування, оскільки підінтегральна функція неперервна при $x\in[1;+\infty)$. Збіжність інтеграла залежить від поведінки функції в околі нескінченності.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2}=g(x)$. Отриманий інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ – еталонний збіжний ($p=2>1$) невласний інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду).

Доведемо, що функція $f(x)=\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}$ еквівалентна функції $g(x)=\frac{1}{x^2}$. За визначенням:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}:\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2\sqrt[5]{x}\cdot x^2+4x^2}{1+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}+\frac{4}{x}}{\frac{1}{x^3}+1}=1\begin{cases}\neq 0\\ \neq\infty\end{cases},$$ тобто ці функції еквівалентні.

За ознакою порівняння (теорема 2) інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}dx$ теж збігається.

2) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}dx$ – це інтеграл від необмеженої функції, особлива точка $x=-1\in[-1;1]$. Збіжність інтеграла залежить від поведінки функції в околі $x=-1$, тому придумаємо функцію, яка буде еквівалентна $\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}$ при $x\to-1$:

$$\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}=\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{(x+1)(x^2-x+1)}\underset{x\to-1}{\sim}\frac{-1+2\sqrt[5]{-1}+4}{(x+1)(1+1+1)}=\frac{1}{3(x+1)}.$$

Розглянемо $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{x+1}dx$ – це еталонний розбіжний ($p=1\geq 1$) невласний інтеграл від необмеженої функції.

Доведемо, що функція $\frac{1}{x+1}$ еквівалентна $\frac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}$. За визначенням:

$\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3} : \dfrac{1}{1+x} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1-x+x^2} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}$, отже функції еквівалентні, тому за ознакою порівняння (аналог теореми 2 для невласних інтегралів від необмежених функцій) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}dx$ теж розбігається.

Висновок.

Інтеграл $\int\limits_{-1}^{+\infty} \dfrac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}dx$ є сумою збіжного і розбіжного інтегралів, тому він розбігається.

Зауваження.

Збіжність першого інтеграла у прикладі 6 можна довести також, застосовуючи теорему 1. Для цього необхідно придумати більшу функцію, інтеграл від якої буде збіжним. Збільшимо чисельник (кожний доданок замінимо на найбільший) та зменшимо знаменник (відкинемо один з доданків), отже $\dfrac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3} < \dfrac{x+2x+4x}{x^3} = \dfrac{7}{x^2}$.

Розглянемо $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ – це еталонний збіжний ($p = 2 > 1$) інтеграл з необмеженими межами інтегрування (першого роду). Тобто „більший" інтеграл $7\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ збігається, тому за ознакою порівняння (теорема 1) „менший" інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{x+2\sqrt[5]{x}+4}{1+x^3}dx$ теж збігається.

Приклад 7**.** Вивчимо збіжність невласного інтеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Даний інтеграл має дві особливості, оскільки, по-перше, це інтеграл з необмеженими границями інтегрування, по-друге, при $x = 0$ функція $\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ має особливість (знаменник $\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ дорівнює 0). Розіб'ємо цей інтеграл на два, так щоб в кожному інтегралі була лише одна особливість:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx + \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Розглянемо окремо кожен інтеграл.

1) $\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$

На проміжку інтегрування $(0;\pi)$ функція $\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \geq 0$ **,** та має одну особливу точку $x = 0$, тобто це інтеграл від необмеженої функції (другого роду).

Оскільки при $0 < x < \pi$ виконується нерівність $0 < \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, можна застосувати ознаку порівняння (аналог теореми 1 для невласних інтегралів від необмежених функцій). $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ еталонний невласний інтеграл від необмеженої функції (другого роду), $p = \frac{1}{3} < 1$, він збігається (це „більший" інтеграл), тому за ознакою порівняння $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$ теж збігається (як „менший")

2) $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$

На проміжку інтегрування $(\pi;\infty)$ функція $\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$ змінює знак та має одну особливу точку $x = +\infty$, тому це інтеграл на необмеженому проміжку (першого роду). Застосуємо спеціальну ознаку збіжності (теорема 3), нехай $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ та $f(x) = \sin x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$, доведемо монотонність за визначенням $(\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2))$: розглянемо $x_1 < x_2$, доведемо $\frac{1}{\sqrt[3]{x_1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x_2}}$. Оскільки $x_1, x_2 > \pi > 0$, можна позбавитися знаменників $\sqrt[3]{x_2} > \sqrt[3]{x_1}$, піднесемо нерівність до куба $x_2 > x_1$, таким чином $g(x)$ монотонно спадає до нуля.

Знайдемо тепер первісну функції $f(x) = \sin x$: $F(x) = \int_{\pi}^{x} \sin \xi d\xi = \cos\xi\Big|_{\pi}^{x} = \cos x - \cos\pi = \cos x + 1$, використовуючи властивість $|\cos x| \le 1$, маємо $F(x) = cos\, x + 1 \le 2$

За спеціальною ознакою порівняння невласний інтеграл $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$ збігається, взагалі кажучи, не абсолютно.

Висновок.

Невласний інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$ дорівнює сумі двох збіжних інтегралів, тому й сам збігається.

Зауваження.

Збіжність першого інтеграла у прикладі 7 можна також довести застосовуючи аналог теореми 2 для невласних інтегралів від необмежених функцій. Оскільки збіжність інтеграла залежить від його поведінки в околі $x=0$, придумаємо еквівалентну функцію при $x \to 0$: $\frac{sin\,x}{\sqrt[3]{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{-2/3}}$, маємо $\int_0^{\pi} \frac{1}{x^{-2/3}}dx$ збіжний ($p=-\frac{2}{3}<1$)еталонний невласний інтеграл від необмеженої функції. Доведемо, що придумана функція $\frac{1}{x^{-2/3}}$ дійсно еквівалентна вихідній підінтегральній функції $\frac{sin\,x}{\sqrt[3]{x}}$:

за означенням $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} : \frac{1}{x^{-2/3}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}$, тобто функції еквівалентні, тому $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$ теж збігається ознакою порівняння в граничній формі.

<u>Приклад 8</u>. За допомогою ознаки порівняння доведемо розбіжність невласного інтеграла $\int_{0,5}^{1}\frac{arctgx}{x-x^2}dx$

Розглянемо підінтегральну функцію $f(x)=\frac{arctgx}{x-x^2}$, знайдемо її особливі точки: $x-x^2=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=1, x=0$, тобто в будь-якому околі точок $x=1, x=0$ $f(x)$ необмежена. Але на проміжку інтегрування $x\in[0,5;1]$ лежить тільки $x=1$. Даний інтеграл є невласним інтегралом від необмеженої функції (другого роду) з особливою точкою $x=1$. Для ілюстрації роботи ознак збіжності наведемо два способи доведення розбіжності цього інтеграла. Зазначимо, що $\frac{arctgx}{x-x^2}\geq 0$ при $x\in(0,5;1)$.

<u>І спосіб</u>.

Збіжність невласного інтеграла $\int_{0,5}^{1}\frac{arctgx}{x-x^2}dx$ залежить тільки від поведінки $f(x)$ при наближенні до $x=1$. Придумаємо функцію, що еквівалентна $f(x)=\frac{arctgx}{x-x^2}$ при $x\to 1$:

$f(x)=\frac{arctgx}{x-x^2}=\frac{arctgx}{x(1-x)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{arctg1}{1\cdot(1-x)}=\frac{\pi}{4(1-x)}$. Розглянемо $\int_{0,5}^{1}\frac{dx}{1-x}$ – це еталонний розбіжний ($p=1\geq 1$) невласний інтеграл від необмеженої функції. Доведемо за визначенням, що функція $\frac{1}{1-x}$ дійсно еквівалентна

$\frac{arctgx}{x-x^2}$ при $x \to 1$: $\lim\limits_{x\to1} \frac{arctgx}{x-x^2} : \frac{1}{1-x} = \lim\limits_{x\to1} \frac{arctgx}{x} = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \infty \end{cases}$, тобто функції еквівалентні.

За ознакою порівняння в граничній формі (аналог теореми 2 для інтегралів від необмежених функції) $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{arctgx}{x-x^2}dx$ теж розбігається.

II спосіб.

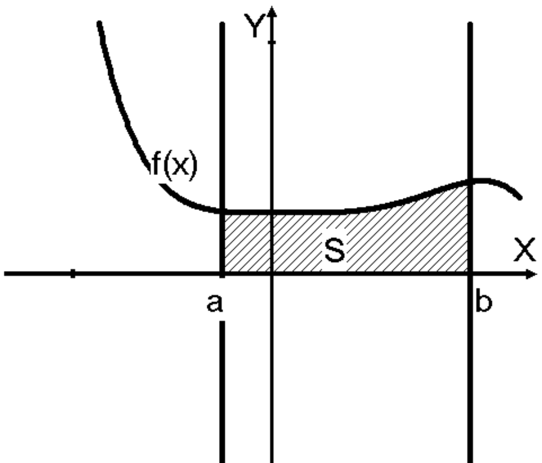
Придумаємо меншу функцію інтеграл від якої буде розбігатися. Для цього зменшимо чисельник: при $x \in (0{,}5;1)$ функція $arctgx$ монотонно зростає, тому $arctgx > arctg0{,}5$; та збільшимо знаменник, підставимо замість x його найбільше значення на проміжку $(0{,}5;1)$; маємо:

$\frac{arctgx}{x-x^2} > \frac{arctg0{,}5}{x(1-x)} > \frac{arctg0{,}5}{1\cdot(1-x)} = arctg0{,}5 \cdot \frac{1}{1-x} = g(x)$.

Розглянемо $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{1-x}$ – це еталонний розбіжний ($p = 1 \geq 1$) невласний інтеграл від необмеженої функції. Тому „менший” інтеграл $\int\limits_{0,5}^{1} g(x)dx$ розбігається. За ознакою порівняння (аналог теореми 1 для невласних інтегралів від необмежених функцій) „більший” інтеграл $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{arctgx}{x^2-x}dx$ теж розбігається.

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Площа фігури



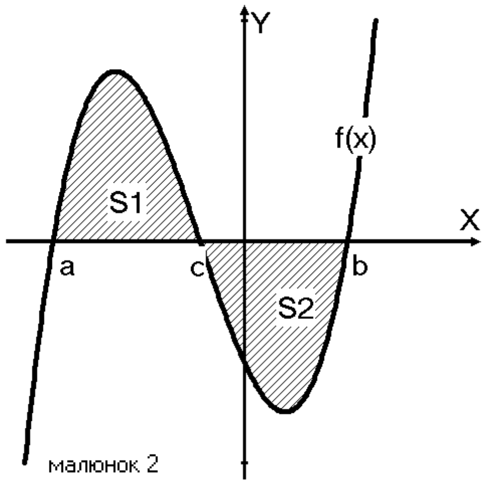
малюнок 1

Як зазначалося в частині першій, задача про обчислення площі плоскої фігури історично пов‘язана з задачею про обчислення визначеного інтеграла. В декартовій системі координат

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx, \qquad (2)$$

де S площа криволінійної трапеції (мал.1), обмеженої зверху графіком функції $y = f(x)$ ($y \geq 0$), знизу віссю OX та з боків прямими $x = a$ та $x = b$ ($a < b$) (см. Частина 1, стор.35).

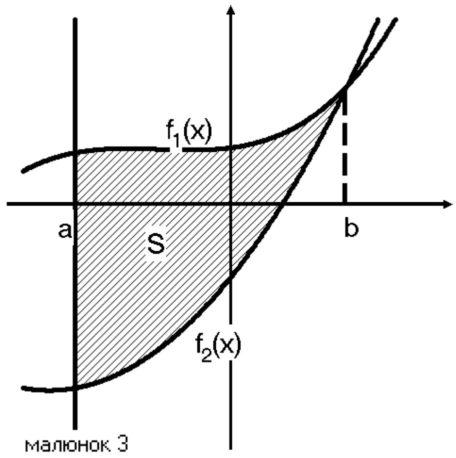
Якщо лінія, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями



$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то, зробивши підстановку в інтегралі (2) за формулою $x = \varphi(t)$, отримаємо

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

де t_1, t_2 – значення, між якими змінюється параметр t, коли точка пробігає зліва направо всю лінію, що обмежує трапецію зверху.



В загальному випадку (мал.2), коли функція $f(x)$ змінює знак на відрізку $a < x < b$ ($f(c) = 0$; $f(x) > 0, a < x < c$; $f(x) < 0, c < x < b$), для обчислення площі застосовується формула

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Узагальнюючи ці формули, можна отримати формулу для обчислення площі складної фігури (мал.3)

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx, \tag{3}$$

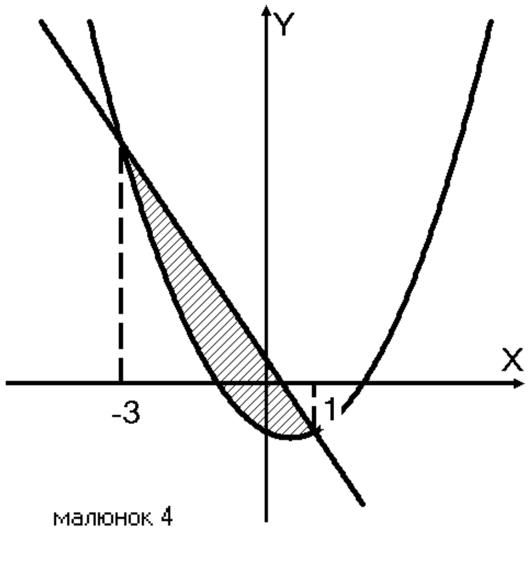
де S площа фігури, обмеженої зверху графіком функції $y = f_1(x)$, знизу графіком функції $y = f_2(x)$ та з боків прямими $x = a$ та $x = b$.

<u>Приклад 9</u>. Знайти площу фігури, обмеженої лініями

$$y = x^2 - x - 2$$
$$y = 1 - 3x$$
.

Дана фігура обмежена зверху прямою $y = 1 - 3x$, знизу параболою $y = x^2 - x - 2$ (мал.4). Щоб знайти лінії, якими вона обмежена з боків знайдемо точки перетину параболи та прямої, для цього розв‘яжемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y = 1 - 3x \end{cases}; \qquad \begin{cases} 1 - 3x = x^2 - x - 2 \\ y = 1 - 3x \end{cases};$$



$\begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ y=1-3x \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=-3, x_2=1 \\ y=1-3x \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=-3, x_2=1 \\ y_1=10, y_2=-2 \end{cases}$,

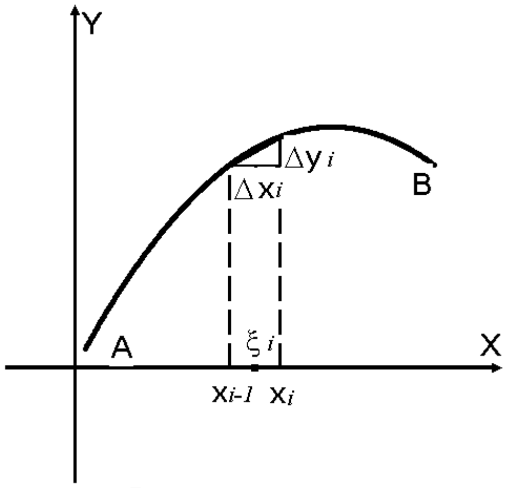
оскільки $x_1 < x_2$, то $a = x_1 = -3$, $b = x_2 = 1$. За формулою (3) знаходимо площу

$$S = \int_{-3}^{1} (1-3x)-(x^2+2x-3)dx = \int_{-3}^{1} (4-5x-x^2)dx = 4x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-3}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{3} - (-12 - \frac{45}{2} + 9) = 26\frac{2}{3}$$

Довжина дуги

Нехай деяка лінія AB є графіком неперервної функції $y = f(x)$, похідна $f'(x)$ якої теж неперервна. Розіб'ємо дугу на n частин. Проводячи через кожні дві сусідні точки розбиття хорду, побудуємо вписану ламану, довжина якої L_n. Довжина маленького відрізку дорівнює $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$, де $(x_i; y_i)$ – координаті кінцевої точки, а $(x_{i-1}; y_{i-1})$ – координати початкової точки (мал.5). Позначимо різниці $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Довжина всієї ламаної дорівнює



малюнок 5

$$L_n = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2} + \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2} + \ldots + \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2}$$

або $L_n = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)^2}\Delta x_1 + \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)^2}\Delta x_2 + \ldots + \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2}\Delta x_n$,

оскільки $y_i = f(x_i)$, то $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$, де $\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Тому за теоремою Лагранжа $L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i$. Природно вважати, що ця довжина є наближеним значенням довжини лінії AB $L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i$. Ця рівність буде тим точніша, чим меншим буде розбиття лінії на частини. Тому за точне значення довжини лінії приймемо границю довжини ламаної при умові, що найбільша довжина ділянки ламаної наближається до нуля, тобто довжина дуги L виражається за допомогою інтеграла

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (4)$$

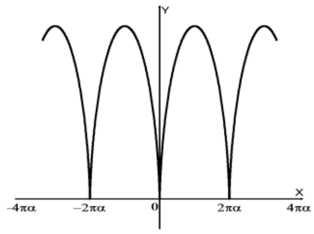
Якщо рівняння задано параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то роблячи, підстановку в (4) маємо

$$L = \int\limits_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt \qquad (5)$$

Якщо рівняння задано у полярних координатах $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, то розглядаючи φ як параметр, маємо $x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$, $y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$, підставляючи в (5), отримаємо $L = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\left(r'\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^2 + \left(r'\sin\varphi + r\cos\varphi\right)^2}\,d\varphi$, нескладні перетворення приводять до формули:

$$L = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2}\,d\varphi \qquad (6)$$

<u>Приклад 10</u>. Знайти довжину однієї арки циклоїди $x = a(t - sin\,t)$, $y = a(1 - cos\,t)$.



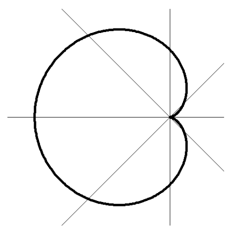
Коли x пробігає відрізок $[0;2\pi a]$ однієї арки циклоїди, параметр t змінюється від 0 до 2π. Обчислимо похідні: $x' = a(1 - cos\,t)$, $y' = a\,sin\,t$.

За формулою (5) маємо

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\;dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\;dt = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\;dt =$$

$$= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\;dt = 2a\int\limits_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a$$

<u>Приклад 11.</u> Знайти довжину кривої $r = 25(1 - \cos\boldsymbol{\varphi})$



Криву задано в полярних координатах, тому обчислимо довжину за формулою (6). Оскільки крива замкнена, то $\boldsymbol{\varphi}$ пробігає значення $(0;2\boldsymbol{\pi})$. Обчислимо похідну: $r' = 25\,sin\,\boldsymbol{\varphi}$

$$L = \int\limits_0^{2\boldsymbol{\pi}} \sqrt{(25(1 - cos\,\boldsymbol{\varphi}))^2 + (25\,sin\,\boldsymbol{\varphi})^2}\,d\boldsymbol{\varphi} = \int\limits_0^{2\boldsymbol{\pi}} \sqrt{625(2 - 2\,cos\,\boldsymbol{\varphi})}\,d\boldsymbol{\varphi} =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} 25\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 50\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi = -100\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = -100\cos\pi + 100\cos 0 = 200$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. **За допомогою визначення обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів з нескінченими межами інтегрування (першого роду):**

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{7x}{x^2+3} dx$
2. $\int\limits_{0}^{\infty} 5^{-3x+2} dx$
3. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$
4. $\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx$
5. $\int\limits_{0,2}^{\infty} \operatorname{arcctg} 5x dx$
6. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \sqrt{\frac{e^x+2}{4}} dx$
7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$
8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^4+2}$
9. $\int\limits_{0}^{\infty} x \sin x dx$
10. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2-5}} dx$
11. $\int\limits_{-\infty}^{1} \sqrt[4]{2-x} dx$
12. $\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-x} dx$
13. $\int\limits_{6}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^4}}$
14. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$
15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{24}{1+9x^2} dx$
16. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1+3^x}{3^{2x-1}} dx$
17. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$
18. $\int\limits_{0}^{\infty} x \sin x^2 dx$
19. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{5^x}\left(5+25^x\right) dx$
20. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}}$
21. $\int\limits_{-\infty}^{0} x e^{2x} dx$
22. $\int\limits_{-\infty}^{-6} \frac{dx}{x^2+10x+25}$
23. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{1}{3^x}\left(9^x+3\right) dx$
24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}$
25. $\int\limits_{0}^{\infty} x \operatorname{arctg} x dx$
26. $\int\limits_{1}^{\infty} (2-x) \ln x dx$
27. $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 \cos x^3 dx$
28. $\int\limits_{6}^{\infty} \frac{dx}{x^2-9}$
29. $\int\limits_{-\infty}^{0} x e^{-x} dx$
30. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2-6x+9}$

Завдання 2. **За допомогою визначення обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів від необмеженої функції (другого роду):**

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
2. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
3. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(2-x)^3}$
4. $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{x \ln^2 x}$
5. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x-1}}{\sin^2 x} dx$
6. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$
7. $\int\limits_{-2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
8. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^4}$
9. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$
10. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$
11. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
12. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{3x-2}$
13. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi} \operatorname{ctg}^2 x dx$
14. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$
15. $\int\limits_{7}^{8} \frac{dx}{(x-7)x}$
16. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi} \frac{3\cos x dx}{1-2\sin x}$
17. $\int\limits_{0,5}^{1} x \ln(1-x) dx$
18. $\int\limits_{\pi/2}^{5\pi/6} \operatorname{tg}^2 x dx$
19. $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{x^3}$
20. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$
21. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}}$
22. $\int\limits_{-1}^{2} x \ln(x+1) dx$
23. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln^3 x}$
24. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x(x+2)}$
25. $\int\limits_{2\pi/3}^{\pi} \frac{3\sin x dx}{1+2\cos x}$
26. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x-2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$
27. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{\cos x}} dx$
28. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$
29. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$
30. $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

Завдання 3. **За допомогою ознак збіжності дослідити на збіжність невласні інтеграли:**

1.а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+6x}dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x^2}{\sqrt[6]{x^7}}dx$

2.а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3}dx$; б) $\int_0^{1} \frac{2x^2+3x+2}{x^3+\sqrt{x}}dx$

3.а) $\int_0^{+\infty} \frac{3+x}{\sqrt{x^4+x}}dx$; б) $\int_0^{1} \frac{tg\sqrt{x}}{\ln(x^2+1)}dx$

4.а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{\sqrt[5]{x}}dx$; б) $\int_{-1}^{0} \frac{2x^4+7}{x^2+2x+1}dx$

5. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5dx}{(x^2+3)\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{\ln(x+1)}}$

6. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 6x}{2x^2}dx$; б) $\int_{-1}^{0} \frac{8x+6}{x^3+3x^2+3x+1}dx$

7. а) $\int_1^{+\infty} \frac{7+x^3dx}{x^2+x-2}$; б) $\int_0^{1} \sqrt{\frac{\sin x}{1-\cos x}}dx$

8. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 8x}{x^4+x^2}dx$; б) $\int_0^{1} \frac{\sqrt[4]{x^3}dx}{\sqrt[3]{x^4}+2x}$

9. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+9\sqrt{x}}{2x^6+x^2}dx$; б) $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt[5]{x+2}}{tg(x+2)}dx$

10.а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 10x}{\sqrt[6]{x^5}}dx$; б) $\int_1^{1,5} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3x-x^2-2}dx$

11.а) $\int_0^{+\infty} \frac{11dx}{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_0^{1} \frac{e^x-1}{x^2}dx$

12. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 12x}{\sqrt[5]{x}}dx$; б) $\int_0^{1} \frac{12dx}{x\sqrt{(1+x)^3}}$

13.а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 13x}{\sqrt[6]{x^7}}dx$; б) $\int_0^{1/2} \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[6]{x}}$

14.а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{14dx}{x^4+x^2+2}$; б) $\int_0^{0,5} \frac{arctg\sqrt[3]{x}}{x-x^3}dx$

15.а) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{15dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$; б) $\int_0^{1} \frac{\arcsin\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}tgx}dx$

16. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 16x}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; б) $\int_0^{0,5} \frac{16xdx}{x^2-\sqrt[3]{x^7}}$

17. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{17dx}{\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^2}+1}$; б) $\int_0^{1} \frac{\sin\sqrt{x}dx}{\ln(x+1)}$

18. а) $\int_1^{+\infty} \frac{18+x^2}{3+x^4-4x}dx$; б) $\int_1^{2} \frac{arctgx}{\sqrt{x^2-1}}dx$

19. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 19x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int_{-1}^{5} \frac{x^2+19}{x^3+1}dx$

20. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+20}{2x^5+x}dx$; б) $\int_0^{1} \frac{\sin\sqrt[4]{x}}{\ln(1+\sqrt[3]{x})}dx$

21.а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 21x}{\sqrt[5]{x}}dx$; б) $\int_1^{2} \frac{(\sqrt{x}+21)dx}{x^2-1}$

22.а) $\int_0^{+\infty} \frac{x+22}{7x^3+2\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int_1^{2} \frac{1-x}{\cos\sqrt{x-1}-1}dx$

23. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 23x}{\sqrt[5]{x}}dx$; б) $\int_2^{3} \frac{1+\sqrt{x}}{(x-2)^4}dx$

24.а) $\int_1^{+\infty} \frac{x+24}{\sqrt[3]{x^7-1}}dx$; б) $\int_0^{1} \sqrt[3]{\frac{tgx}{\sin^2 x}}dx$

25. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 23x}{\sqrt[7]{x^4}}dx$; б) $\int_2^{4} \frac{x^4+25}{x^2-4}dx$

26. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6+26}{x^8+1}dx$; б) $\int_0^{1} \sqrt[4]{\frac{x^2+2x}{arctgx}}dx$

27. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 27x}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int_1^{3} \frac{x^3dx}{x^2+x-2}$

28. а) $\int_1^{+\infty} \frac{28+x}{\sqrt[3]{x^2-1}}dx$; б) $\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{\sin 2x}}{\sqrt[5]{x}(x+2)}dx$

29. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 29x}{x^2+x}dx$; б) $\int_{-2}^{-1} \frac{29\sqrt[3]{x^4}dx}{x^2-2x-3}$

30. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+30dx}{x^4+\sqrt{x}}$; б) $\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{\cos x-1}}{x^2+x}dx$

Завдання 4. **Знайти площу фигури, обмеженої лініями*:***

1.а) $y=2-3x^2$ $y=-x$;	б) $y^2=16-8x$ $y^2=24x+48$	16.а) $1+3y=x^2$ $3y-8=0$;	б) $y=\ln x,\quad y=0,$ $y=\ln 2x,,\quad x=e$
2. а) $y=x^2+3x$ $9y=6x+8$;	б) $y=\sin x,$ $y=2\sin x,$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$	17.а) $y=2x^2-4x$ $2y+3=0$;	б) $y=2^x,\ y=8^x,\ x=-2$
3.а) $y=3x-x^2$ $2y-x=2$;	б) $y=2^x,\quad y=2^{-x},$ $x=4$	18. а) $y=x-x^2$ $y=x-9$;	б) $y=2-4\sqrt[3]{x}$ $x+y-2=0,\ x>0$
4.а) $2y=x^2$ $2x+2y-3=0$;	б) $y=e^{2x},\quad y=2-e^x,$ $x=2$	19. а) $y=2-\frac{x^2}{2},$ $x+y=2$;	б) $xy=3$ $x+y=4$
5. а) $y=x-3x^2$ $4y+1=0$;	б) $y=tgx,$ $y=\sqrt{3},\quad x=-\frac{\pi}{4}$	20. а) $y=x^2-5x$ $y+5x-4=0$;	б) $y=2e^{-x},\quad y=e^x-1,$ $x=0$
6. а) $y=x^2$ $3y=x+2$;	б) $y=\arcsin 2x,$ $y=3,\quad -1/4\le x\le 1/4$	21. а) $y=5x^2-1$ $2y+5x-3=0$;	б) $x=\sqrt{y},$ $y=1,\quad y=4,\quad x=0$
7. а) $y=x^2-4x,$ $y=5x$;	б) $y=\frac{2}{1-x},$ $x=2y+6$	22. а) $y=3x^2-5,$ $2y=-17x$;	б) $y=\frac{2}{x+1},\ y=2-x$
8. а) $y=\frac{x^2}{2}+2,$ $y=2-x$;	б) $y=\frac{1}{4^x},\ y=\frac{1}{2},$ $x=0$	23. а) $y=3x^2-4x-2,$ $y=x$;	б) $y=3\cos x,$ $y=\cos x,$ $(0\le x\le\frac{\pi}{2})$
9. а) $y=x^2+2x+1$ $y=1+3x$;	б) $y=\sqrt{x},\quad y=x$	24. а) $y=2x^2+3x+3$; $y-5=0$	б) $y=-\frac{1}{x},\ 3y-x-4=0$
10. а) $y=\frac{1}{2}x^2,$ $4x-2y+5=0$;	б) $y=arctgx$ $y=-\pi/4,\quad x=\sqrt{3}$	25. а) $y=3x^2-2x+1$ $y+x=1$;	б) $y=x^3,\ y=0$ $-1\le x\le 1$
11. а) $y=4x-4-x^2$ $y=-x$;	б) $y=\arccos 2x,$ $y=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{1}{2}$	26. а) $y=\frac{x^2}{2}$ $4x-2y+5=0$;	б) $y=\sin 2x,\ y=1,$ $x=0, x=\pi$
12.а) $y=4x^2+2x-1,$ $y=2x$;	б) $y=\sqrt[3]{x},\quad y=-x^2$	27. а) $1-2y=x^2,$ $y+4=0$;	б) $y=x^4, y=x$
13.а) $y=\frac{4}{3}x^2+3x-5$; $3y+x+9=0$	б) $y=\sqrt{x}+2$ $x-3y+6=0$	28. а) $y=\frac{4}{3}+x^2$ $4x-3y+3=0$;	б) $y=\frac{1}{2}x^2,\ y=\frac{1}{x^2+1}$

14.а) $\begin{cases}2+3y=x^2\\3x-3y-4=0\end{cases}$;	б) $y=\log_4 x,\quad x=-2,$ $y=0,\quad y=0{,}5$	29. а) $\begin{cases}y=x^2-8\\y=2x-5\end{cases}$;	б) $y=x^3, y=\sqrt{x}$
15. а) $\begin{cases}2y=x^2,\\y-x-4=0\end{cases}$;	б) $xy=3,\ y=3x+2,$ $y=1$	30. а) $\begin{cases}y=4-x^2,\\y=x+4\end{cases}$;	б) $y=x^3,\ y=\sqrt{32x}$

Завдання 5. Знайти довжину дуги кривої

1.	a) $y=1-\ln\cos x;$	$0\le x\le\frac{\pi}{6}$	b) $r=6\cos^2\left(\varphi/2\right);$	$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
2.	a) $y^2=(x-1)^3$	$2\le x\le 5$	b) $r=\sin^3\left(\varphi/3\right)$	$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
3.	a) $\begin{cases}x=2(\cos t+t\sin t);\\y=2(\sin t-t\cos t);\end{cases}$	$0\le t\le\pi$	b) $r=3\cos\varphi$	
4.	a) $y^2=(x+1)^3;$	$1<x<4$	b) $r=5(1+\cos\varphi)$	
5.	a) $\begin{cases}y=5\sin^2 t;\\x=5\cos^2 t;\end{cases}$	$0\le t\le\frac{\pi}{2}$	b) $r=5\sin\varphi$	
6.	a) $\begin{cases}x=9(t-\sin t);\\y=9(1-\cos t);\end{cases}$	$4\pi\le t\le 6\pi$	b) $r=4\cos\varphi$	
7.	a) $y=\ln\sin x$	$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$	b) $r=4(1+\cos\varphi)$	
8.	a) $(y-1)^2=(x+2)^3$	$0\le x\le 2$	b) $r=5(1-\cos\varphi)$	
9.	a) $\begin{cases}x=\cos^3 4t;\\y=\sin^3 4t;\end{cases}$	$\frac{\pi}{16}\le t\le\frac{\pi}{8}$	b) $r=\frac{2}{1+\cos\varphi}$	$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
10.	a) $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$	$-1\le x\le 3$	b) $r=\frac{1}{3(1-\cos\varphi)}$	
11.	a) $\begin{cases}x=7(t-\sin t);\\y=7(1-\cos t);\end{cases}$	$2\pi\le t\le 4\pi$	b) $r=2\cos^3\left(\varphi/3\right);$	$0\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$
12.	a) $\begin{cases}x=\frac{2-t}{2+t}\\y=\frac{t}{2+t}\end{cases}$	$1\le t\le 2$	b) $r=\sin^5\left(\varphi/5\right)$	$0\le\varphi\le 5\pi$
13.	a) $\begin{cases}x=3t-1\\y=-4t+2\end{cases}$	$0\le t\le 1$	b) $r=10\cos\varphi$	
14.	a) $y=2\left(\sqrt{e^x-1}-arctg\sqrt{e^x-1}\right)$	$0\le x\le 2$	b) $r=10(1+\cos\varphi)$	
15.	a) $y=\ln x$	$\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$	b) $r=12\sin\varphi$	

16.	a) $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2$	b) $r = 3\sin^2(\varphi/2)$ $0 \le \varphi \le \pi$
17.	a) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ $0 \le x \le \frac{9}{16}$	b) $r = 11(1-\cos\varphi)$
18.	a) $\begin{cases} x = 6-3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$ $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$	b) $r = \frac{3}{(1-\cos\varphi)}$ $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
19.	a) $\begin{cases} x = 8t^3 \\ y = 6t^2 - 3t^4 \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt{2}$	b) $r = \frac{5}{(1-\cos\varphi)}$ $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
20.	a) $\begin{cases} x = t^2 - t + 1 \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$ $0 \le t \le 1$	b) $r = 6\cos^3(\varphi/3);)$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
21.	a) $y = 5 + \ln\cos x;$ $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$	b) $r = 3(1-\cos\varphi)$
22.	a) $(y-2)^2 = x^3$ $1 \le x \le 3$	b) $r = 2\cos\varphi$
23.	a) $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t); \\ y = 3(\cos t + t\sin t); \end{cases}$ $\frac{\pi}{3} \le t \le \pi$	b) $r = \sin^4(\varphi/4)$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
24.	a) $y^2 = (x+3)^3$ $0 < x < 2$	b) $r = 6\sin^3(\varphi/3);$ $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
25.	a) $\begin{cases} y = \sin^2 5t; \\ x = \cos^2 5t; \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{10}$	b) $r = \cos^4(\varphi/4)$ $-2\pi \le \varphi \le 0$
26.	a) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t; \\ y = 5 - \cos 2t; \end{cases}$ $5\pi \le t \le 6\pi$	b) $r = \frac{3}{(1+\cos\varphi)}$
27.	a) $y = \ln\cos x,$ $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$	b) $r = 4(1-\cos\varphi)$
28.	a) $(y-1)^2 = x^3,$ $0 \le x \le 5$	b) $r = 5\cos\varphi$
29.	a) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t; \\ y = 4\sin^3 t; \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$	b) $r = \frac{1}{2(1+\cos\varphi)}$ $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
30.	a) $y = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{6}$ $0 \le x \le 1$	b) $r = 7\sin\varphi$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970-1985, т.1.
2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969.
3. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа/ Под редакцией А.В. Ефимова и П.Б. Демидовича. – М.: Наука, 1981, 1986.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математическиго анализа. – М.: Наука, 1966.
5. Думіна О.О., Осмаєв О.О., Шувалова Ю.С. Інтегральне числення функцій однієї змінної та його застосування. Методичні вказівки № 1212. – Харків: видавництво ХарДАЗТ, 2004.