№384

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до виконання
розрахунково-графічної роботи
з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ХАРКІВ 2008

Методичні вказівки розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри «Вища математика» 26 листопада 2007 р., протокол № 5.

Рекомендуються для студентів I курсу спеціальностей «Будівельно-колійне господарство» і «Промислове будівництво» денної форми навчання.

Укладачі:

доц. С.Д.Бронза,

асист. Л.В.Наземцева

Рецензент

доц. А.О.Дрогаченко

ВСТУП

Завдання пропонується студентам I курсу будівельного факультету. Методичні вказівки містять розв'язання кожного типу задач з теми „Аналітична геометрія на площині та в просторі", в яких показано всі етапи розв'язання одного з варіантів завдання. Методичні вказівки можна використовувати як під керівництвом викладача, так і для самостійного вивчення матеріалу.

Задача № 1

Задано координати двох суміжних вершин A і B паралелограма $ABCD$ і точка N перетину його діагоналей: $A(1; -2)$, $B(3;2)$, $N(5; -1)$.

Знайти:
1) координати вершин C і D;
2) рівняння сторін;
3) довжину сторін;
4) рівняння висоти AK, проведеної з вершини A до сторони BC;
5) кути паралелограма;
6) площу паралелограма;
7) зробити креслення.

Розв'язання

1 Діагоналі паралелограма точкою перетину N діляться пополам, тому координати т. N дорівнюють:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2};$$

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2}; \quad y_N = \frac{y_B + y_D}{2};$$

звідси маємо:

$$x_C=2x_N-x_A;\ \ y_C=2y_N-y_A;$$
$$x_D=2x_N-x_B;\ \ y_N=2y_N-y_B;$$

x_C=10-1=9, y_C= -2+2=0, маємо C(9;0)
x_D=10-3=7, y_D= -2-2= -4, маємо D(7;-4).

2 Рівняння прямої на площині, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\, y_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2)$ має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Складаємо рівняння сторони AB, як прямої, яка проходить через дві точки A і B:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A};$$

маємо

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{2+2}.$$

Приводимо рівняння до канонічного виду: $y = 2x - 4$.

Складаємо рівняння сторони CD.

Сторони AB *і* CD паралельні, тоді для кутових коефіцієнтів маємо: $k_{AB}=k_{CD}$, $k_{AB}=k_{CD}=2$.

Складаємо рівняння сторони CD, як рівняння прямої, яка проходить через т. C і має кутовий коефіцієнт k_{CD}:

$$y - y_C=k_{CD}\,(x - x_C);$$

маємо: $y=2(x - 9)$, $y=2x - 18$.

Складаємо рівняння сторони BC, як рівняння прямої, яка проходить через дві точки B і C:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},$$

маємо:

$$\frac{x-3}{9-3} = \frac{y-2}{0-2}.$$

Звідси маємо канонічний вид прямої: $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

Складаємо рівняння прямої *AD*, як сторони, паралельної стороні *BC*, тоді для кутових коефіцієнтів маємо: $k_{BC}=k_{AD}$, $k_{BC}=k_{AD}=-\frac{1}{3}$.

Рівняння прямої AD має вид: $y - y_A = k_{AD}(x - x_A)$ або $y+2 = -\frac{1}{3}(x-1)$, тоді $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

3 Довжина сторони AB обчислюється за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{20} \approx 4{,}47,$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2},$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{49+4} = \sqrt{53} \approx 7{,}28,$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{53} \approx 7{,}28.$$

4 Рівняння висоти *АК* – це рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k_{AK} : y - y_A = k_{AK}(x - x_A)$.

$AK \perp BC,$ тоді $k_{AK} = -\dfrac{1}{k_{BC}} = 3,$

$$y + 2 = 3(x - 1),$$
$$y + 2 = 3x - x,$$
$$y = 3x - 5.$$

5 Тангенс кута α між прямими l_1 і l_2 обчислюється за формулою

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

де k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих, які утворюють цей кут.

Отже, тангенс кута між сторонами AB і AD дорівнює:

$$tg\alpha = \frac{k_{AB} - k_{AD}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AD}},$$

$$tg\alpha = \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 1} = 7,$$
$$\alpha = arctg 7 \approx 81^\circ$$
$$\angle A = \angle C \approx 81^\circ$$
$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$
$$\angle B = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ.$$

6 Площа *S* паралелограма *ABCD* обчислюється за формулою

$$S_{ABCD} = h \cdot a,$$

де *а* – основа паралелограма, *a* = *AD*;
АК – висота паралелограма, *АК* = *h*.

AK дорівнює відстані від точки *A* до прямої *BC*, маємо

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$h = \frac{|1 + 3\cdot(-2) - 9|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}} \approx 4{,}43,$$

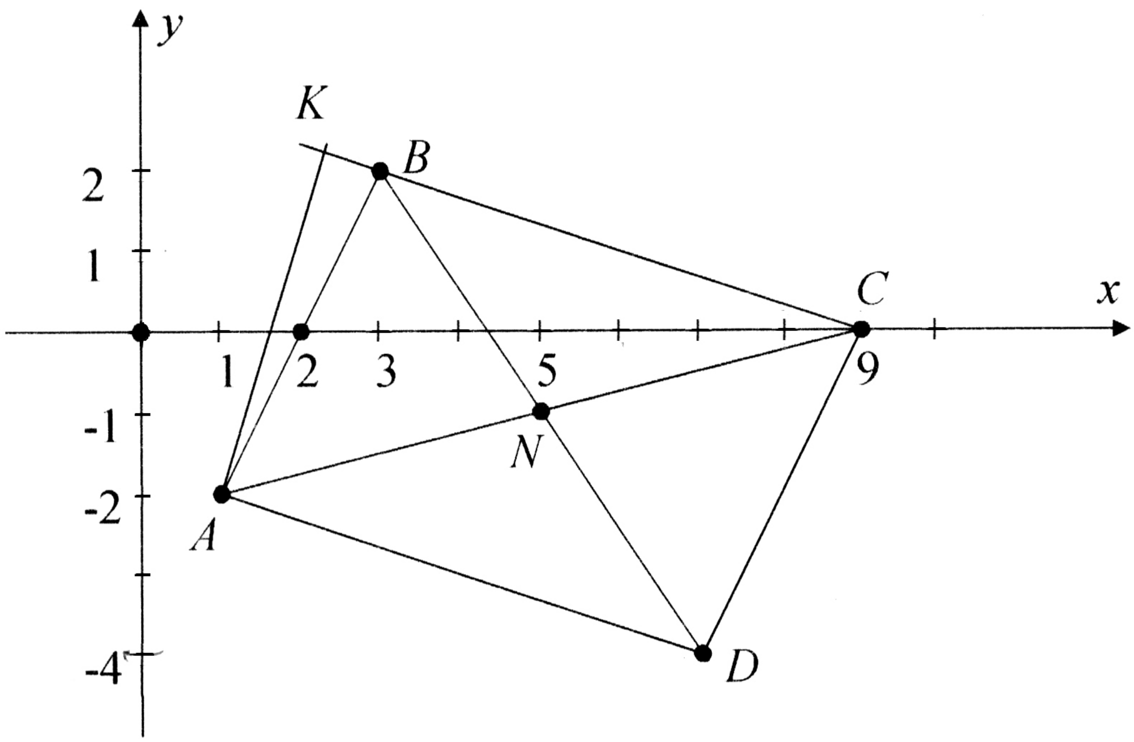
де $Ax_0 + By_0 + C = 0$ - рівняння прямої *BC;*

(x_0, y_0) – координати т. А.

Маємо:

$$S = h \cdot |BC| = 4{,}43 \cdot 7{,}3 = 32{,}34.$$

7 Робимо креслення:



Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	$A(x_1;y_1)$	$B(x_2;y_2)$	$N(x_3;y_3)$
1	(-2; 3)	(1; 0)	(2; 4)
2	(-1; -3)	(6; 4)	(-2; 3)
3	(2; 0)	(3; -1)	(4; 1)
4	(5; -1)	(4; -1)	(3; -1)
5	(4; -3)	(5; -1)	(2; 3)
6	(6; 0)	(-3; 2)	(5; 1)
7	(-3; 2)	(4; -1)	(0; 5)
8	(2; 3)	(6; 0)	(-6; 2)
9	(-3; 4)	(5; -1)	(-4; 1)
10	(7; 1)	0; -3)	(7; 2)
11	(7; 0)	(2; -4)	(-3; 1)
12	(-3; 4)	(3; 0)	(2; -4)
13	(2; -1)	(0; 1)	(-1; 2)
14	(5; -2)	(5; 0)	(-4; 1)
15	(0; 3)	(8; 1)	(3; -2)
16	(7; 1)	(-3; 2)	(-3; 4)
17	(2; -3)	(-4; 1)	(-5; -1)
18	(4; -1)	(-5; 1)	(-3; -2)
19	(5; -3)	(-3; -1)	(4; -2)
20	(7; -1)	(2; -4)	(5; 4)
21	(2; -1)	(5; 1)	(-3; -2)
22	(3; 0)	(-3; 2)	(-5; 0)
23	(-3; -1)	(-4; 1)	(-2; -2)
24	(-2; 4)	(4; 3)	(-4; 3)
25	(5; 1)	(-5; 2)	(3; -5)
26	(6; -3)	(-7; -1)	(0; 5)
27	(0; 2)	(6; 0)	(-2; 1)
28	(1; -3)	(8; -1)	(3; -1)
29	(2; -5)	(-3; 4)	(4; -2)
30	(1; -2)	(-5; 1)	(5; 3)

Задача № 2а

Задано координати вершин трикутника A(1;1;0), B(2;3;0), C(3;3;0), який лежить в основі прямої призми ABCA'B'C'. Висота призми – 5 од.

Знайти:
1) довжину ребер AB, AC, BC, AA';
2) рівняння прямих, які проходять через ребра AB, AC, BC, AA';
3) рівняння прямих A'B', BB' (двома способами);
4) площу основи;
5) рівняння площини ABC;
6) кути в трикутнику ABC;
7) кут між гранню ABC і площиною ABC';
8) об'єм призми (двома способами);
9) зробити креслення.

Розв'язання

1 Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$, використовуючи формулу

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A),$$

$$\overrightarrow{AB} = (1;2;0),\ \overrightarrow{AC} = (2;2;0),\ \overrightarrow{BC} = (1;0;0).$$

Через те, що висота призми дорівнює 5 або $\left|\overrightarrow{AA'}\right| = 5,$ то A' (1;1;5).

Довжина інших ребер обчислюється за формулою

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Маємо:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5},$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8},$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1+0+0} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\left|\overrightarrow{AA'}\right| = 5.$$

2 Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ має вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

тоді маємо рівняння для прямих AB, AC, BC:

$$AB:\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-0}{0-0},\text{або}\,\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0};$$
$$AC:\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-0}{0-0},\text{або}\,\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0};$$
$$BC:\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{3-3}=\frac{z-0}{0-0},\text{або}\,\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{0};$$
$$AA':\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-1}{1-1}=\frac{z-0}{5-0},\text{або}\,\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{5};$$

3 а) $A'B'\|AB$, канонічне рівняння прямої в просторі, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{S}(l;m;n)$, має вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

тоді рівняння *A'B'* має вид

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{0},$$

де A'(1;1;5), $\vec{S}(1;2;0)$;

б) *B'(2;3;5)*, то рівняння через дві точки A' і B':

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-5}{0-0},\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{0}.$$

4 Площа трикутника ABC обчислюється за формулою

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|,$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix};$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(2-4) = -2\vec{k},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{0+0+4} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 = 1.$$

5 Рівняння площини в просторі, що проходить через три задані точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, має вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

тоді маємо рівняння площини ABC, де три точки A,B,C задані

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2-1 & 3-1 & 0-0 \\ 3-1 & 3-1 & 0-0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$(x$-1)(0-0)-(y-1)(0-0)+(z)(2-4)=0, -2z=0, z=0.

6 Косинус кута між прямими, що задані канонічними рівняннями, знаходиться за формулою

$$\cos\varphi = \pm\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

тоді маємо:

$$\cos\varphi_1 = \cos\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+0^2}} \approx 0{,}949, \varphi_1 = \angle A \approx 18°,$$

$$\cos\varphi_2 = \cos\left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-1\cdot 1 - 2\cdot 0 - 0\cdot(-0)}{\sqrt{1\ \ +4+0}\cdot\sqrt{4+4+0}} \approx -0{,}321, \varphi_2 = \angle B \approx 102°,$$

$$\cos\varphi_3 = \cos\left(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\right) = \frac{-2\cdot(-1) - 2\cdot 0 - 0\cdot 0}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{2+0+0}} \approx -0{,}5, \varphi_3 = \angle C \approx 60°.$$

6 Косинус кута між площинами обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Рівняння площини ABC’, де C’(3;3;5) має вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2-2 & 3-1 & 3-0 \\ 3-1 & 3-1 & 5-0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$(x - 1)(10 - 6) - (y - 1)(5 - 6) + (z)(2 - 4) = 0,$
$4x – 4 + y – 1 - 2z = 0$ або $4x + y –2z –5 =0,$

тоді A_1=4, B_1=1, C_1=-2.
Із рівняння площини ABC маємо: A_2=0, B_2=0, C_2=1,

$$\cos\varphi \approx \frac{4\cdot 0 + 1\cdot 0 - 2\cdot 1}{\sqrt{16+1+4}\cdot\sqrt{0+0+1}} = -\frac{2}{\sqrt{21}\cdot 1} \approx -0{,}436; \varphi \approx 116°;$$

8 а) об’єм призми, побудованої на трьох векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}\right|,$$

де

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

тоді маємо:

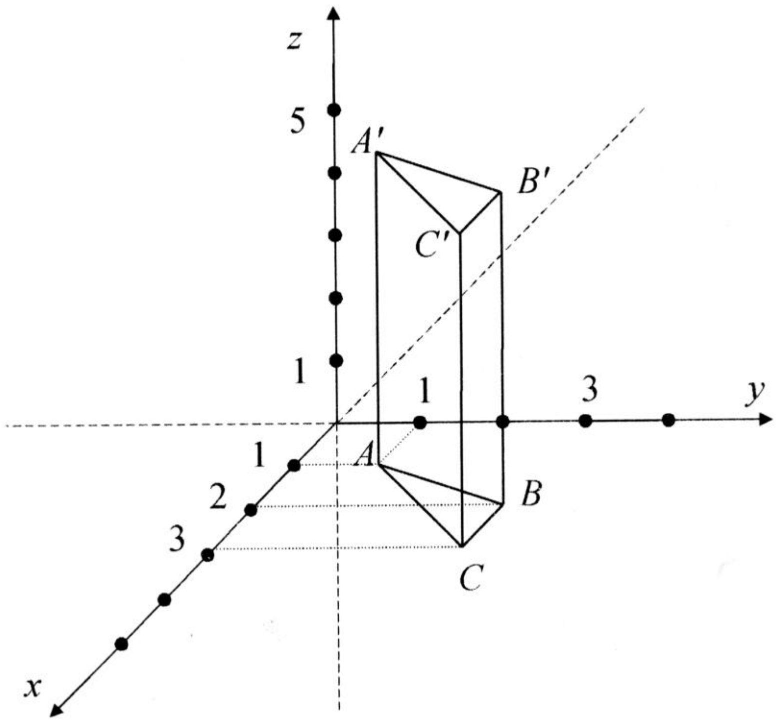
$$V=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\times\overline{AA'}\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\frac{5}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=\frac{5}{2}\left|2-4\right|=5;$$

б) для обчислення об’єму призми використаємо формулу

$$V=S_{осн}\cdot H,$$

де $S_{осн}=S_{ABC}=1$ кв. од.;
H=5(од.);
$V=1\cdot 5=5$(куб. од.);

9 Робимо креслення.



Задача № 2b

Задано координати вершин трикутника $A(2;3;7);\ B(0;3;6);\ C(7;2;3)$, який лежить в основі прямої призми $ABCA'B'C'$. Висота призми – 6 од..

Знайти:
1) довжину ребр AB, AC, BC, AA';
2) рівняння прямих, які проходять через ребра AB, AC, BC, AA';
3) рівняння прямих $A'B';\ BB'$ (двома способами);
4) площу основи;
5) рівняння площини ABC;
6) кути в трикутнику ABC;
7) кут між гранню ABC і площиною ABC';
8) об'єм призми (двома способами);
9) зробити креслення.

Розв'язання

1. *Знайдемо довжину ребр* AB, AC, BC, AA'.

Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$. Використаем формулу:

$$\bar{a} = \overline{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right).$$

Маємо:

$$\overrightarrow{AB} = \left(0-2; 3-3; 6-7\right) = \left(-2; 0; -1\right);$$
$$\overrightarrow{AC} = \left(7-2; 2-3; 3-7\right) = \left(5; -1; -4\right);$$
$$\overrightarrow{BC} = \left(7-0; 2-3; 3-6\right) = \left(7; -1; -3\right).$$

Довжина ребр AB, AC, BC обчислюється за формулою:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}.$$

Маємо:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(-2\right)^2 + 0^2 + \left(-1\right)^2} = \sqrt{5},$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + \left(-1\right)^2 + \left(-4\right)^2} = \sqrt{42}, \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + \left(-1\right)^2 + \left(-3\right)^2} = \sqrt{59}.$$

Обчислимо довжину ребра AA'. Так як призма $ABCA'B'C'$ пряма, а висота призми дорівнює 6, то $\left|\overrightarrow{AA'}\right| = 6$.

2. *Запишимо рівняння прямих, які проходять через ребра* AB, AC, BC. Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$ та $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$.

Таке рівняння має вигляд: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$,

Маємо рівняння для прямих AB, AC, BC:

$$AB: \frac{x-2}{0-2} = \frac{y-3}{3-3} = \frac{z-7}{6-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-7}{-1};$$

$$AC:\ \frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{2-3}=\frac{z-7}{3-7}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-7}{-4};$$

$$BC:\ \frac{x-0}{7-0}=\frac{y-3}{2-3}=\frac{z-6}{3-6}\quad\Rightarrow\quad\frac{x-0}{7}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-6}{-3}.$$

<u>*Запишемо рівняння прямої, яка проходять через ребро*</u> AA'. Для чого знайдемо будь-який вектор паралельний вектору $\overline{AA'}$. Вектор $\overline{AA'}$ перпендикулярний площині ABC, тому вектор $\overline{AA'}$ паралельний вектору нормалі $\bar{N}_{ABC}$ цієї площини, а також вектору, який дорівнює векторному добутку $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Покладемо $\bar{N}_{ABC}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, та обчислимо векторний добуток:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ AB_x & AB_y & AB_z\\ AC_x & AC_y & AC_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & -1\\ 5 & -1 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 5 & -4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 5 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,(0-1)-\vec{j}\,(8+5)+\vec{k}\,(2-0)=-\vec{i}-13\vec{j}+2\vec{k}.$$

Маємо рівняння прямої AA': $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-13}=\dfrac{z-7}{2}$.

3. <u>*Знайдемо рівняння прямої* $A'B'$ *(двома способами).*</u>

<u>*Перший спосіб.*</u> Знайдемо рівняння прямої $A'B'$, як прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ в напрямні, який з задано вектором $\vec{S}=(l;m;n)$.

Каконичне рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ в напрямні, який з задано вектором $\vec{S}=(l;m;n)$, має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

В якості точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ обираємо точку A'. Знайдемо координати точки A'. Координати точки A' співпадають з координатами радіус-вектора $\overrightarrow{OA'}$.

Для радіус-вектора $\overrightarrow{OA'}$ маємо: $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}$.

Для радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$ маємо: $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{AA'}$. Модуль вектора $\overrightarrow{AA'}$ дорівнює 6, так як призма пряма, а висота призми дорівнює 6, тобто $\left|\overrightarrow{AA'}\right|=6$. Так, як $\overline{AA'}\parallel\bar{N}_{ABC}$, то орт вектора $\overline{AA'}$ співпадає з ортом вектора $\bar{N}_{ABC}$, та дорівнює $\dfrac{\bar{N}_{ABC}}{\left|\bar{N}_{ABC}\right|}$. Маємо:

$$\overline{AA'}=\bar{N}_{ABC}\cdot\frac{\left|\overline{AA'}\right|}{\left|\bar{N}_{ABC}\right|}=\left(-\vec{i}-13\vec{j}+2\vec{k}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{(-1)^2+(-13)^2+2^2}}=\left(-1\vec{i}-13\vec{j}+2\vec{k}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{174}}=$$

$$=-\frac{6}{\sqrt{174}}\vec{i}-\frac{78}{\sqrt{174}}\vec{j}+\frac{12}{\sqrt{174}}\vec{k}=-\frac{6\sqrt{174}}{174}\vec{i}-\frac{78\sqrt{174}}{174}\vec{j}+\frac{12\sqrt{174}}{174}\vec{k}.$$

Для радіус-вектора $\overrightarrow{A'A}$ маємо:

$$\overline{AA'}=-\frac{6\sqrt{174}}{174}\vec{i}-\frac{78\sqrt{174}}{174}\vec{j}+\frac{12\sqrt{174}}{174}\vec{k}=-\frac{\sqrt{174}}{29}\vec{i}-\frac{13\sqrt{174}}{29}\vec{j}+\frac{2\sqrt{174}}{29}\vec{k}.$$

Маємо: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}\right) + \left(-\frac{\sqrt{174}}{29}\vec{i} - \frac{13\sqrt{174}}{29}\vec{j} + \frac{2\sqrt{174}}{29}\vec{k}\right) =$

$= \left(2 - \frac{\sqrt{174}}{29}\right)\vec{i} + \left(3 - \frac{13\sqrt{174}}{29}\right)\vec{j} + \left(7 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)\vec{k}$.

Тобто маємо: $A'\left(2 - \frac{\sqrt{174}}{29}; 3 - \frac{13\sqrt{174}}{29}; 7 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)$.

В якості вектора $\vec{S} = (l; m; n)$ обираємо вектор $\overrightarrow{AB}$ - напрямний вектор прямої AB, так як пряма $A'B'$ паралельна прямої AB. Канонічне рівняння прямої AB було отримано в пункті **2**. З цього рівняння маємо: $\overrightarrow{AB} = \left(2; 0; -1\right)$.

Підставляємо координати точки $A'\left(2 - \frac{\sqrt{174}}{29}; 3 - \frac{13\sqrt{174}}{29}; 7 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)$ та координати вектора $\overrightarrow{AB} = \left(2; 0; -1\right)$. Маємо рівняння прямої:

$$\frac{x - \left(2 - \frac{\sqrt{174}}{29}\right)}{2} = \frac{y - \left(3 - \frac{13\sqrt{174}}{29}\right)}{0} = \frac{z - \left(7 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)}{-1}.$$

Спрощуємо вираз, маємо:

$$\frac{x - 2 + \frac{\sqrt{174}}{29}}{2} = \frac{y - 3 + \frac{13\sqrt{174}}{29}}{0} = \frac{z - 7 - \frac{2\sqrt{174}}{29}}{-1}.$$

<u>Другий спосіб</u>: Знайдемо рівняння прямої $A'B'$, як прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$ та $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$. Таке рівняння має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

В якості точки M_1 обираємо точку $A'\left(2 - \frac{\sqrt{174}}{29}; 3 - \frac{13\sqrt{174}}{29}; 7 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)$.

В якості точки M_2 обираємо точку B'.

Знайдемо координати точки B'. Координати точки B' співпадають з координатами радіус-вектора $\overrightarrow{OB'}$. Для радіус-вектора $\overrightarrow{OB'}$ маємо:

$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AA'} = \left(0\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}\right) + \left(-\frac{\sqrt{174}}{29}\vec{i} - \frac{13\sqrt{174}}{29}\vec{j} + \frac{2\sqrt{174}}{29}\vec{k}\right) =$

$= \left(-\frac{\sqrt{174}}{29}\right)\vec{i} + \left(3 - \frac{13\sqrt{174}}{29}\right)\vec{j} + \left(6 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)\vec{k}$

Тобто маємо: $B'\left(-\frac{\sqrt{174}}{29}; 3 - \frac{13\sqrt{174}}{29}; 6 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)$.

Підставляючи координати точок A' і B' маємо:

$$\frac{x-\left(2-\frac{\sqrt{174}}{29}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{174}}{29}\right)-\left(2-\frac{\sqrt{174}}{29}\right)}=\frac{y-\left(3-\frac{13\sqrt{174}}{29}\right)}{\left(3-\frac{13\sqrt{174}}{29}\right)-\left(3-\frac{13\sqrt{174}}{29}\right)}=\frac{z-\left(7+\frac{2\sqrt{174}}{29}\right)}{\left(6+\frac{2\sqrt{174}}{29}\right)-\left(7+\frac{2\sqrt{174}}{29}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{x-2+\frac{\sqrt{174}}{29}}{2}=\frac{y-3+\frac{13\sqrt{174}}{29}}{0}=\frac{z-7-\frac{2\sqrt{174}}{29}}{-1}$$

<u>*Знайдемо рівняння прямої*</u> BB' <u>*аналогічно тому, як було знайдено рівняння прямої*</u> AA'. Маємо:

$$BB':\ \frac{x-x_B}{x_{B'}-x_B}=\frac{y-y_B}{y_{B'}-y_B}=\frac{z-z_B}{z_{B'}-z_B} \Rightarrow \frac{x-0}{-\frac{\sqrt{174}}{29}-0}=\frac{y-3}{3-\frac{13\sqrt{174}}{29}-3}=\frac{z-6}{6+\frac{2\sqrt{174}}{29}-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-0}{-\frac{\sqrt{174}}{29}}=\frac{y-3}{-\frac{13\sqrt{174}}{29}}=\frac{z-6}{\frac{2\sqrt{174}}{29}} \Rightarrow \frac{x-0}{-1}=\frac{y-3}{-13}=\frac{z-6}{2}.$$

Тобто маємо: $BB':\ \frac{x-0}{-1}=\frac{y-3}{-13}=\frac{z-6}{2}$.

4. <u>*Знайдемо площу основи призми*</u> $ABCA'B'C'$. В основі призми лежить трикутник ABC. Площа трикутника ABC обчислюється за формулою:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ був знайдений у п.2:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-13\vec{j}+2\vec{k}.$$

Маємо: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-13)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{174}$.

5. <u>*Знайдемо рівняння площини*</u> ABC. Рівняння площини, що проходить через три задані точки $A_1(x_1;y_1;z_1),\ A_2(x_2;y_2;z_2),\ A_3(x_3;y_3;z_3)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

В якості точок $A_1,\ A_2,\ A_3$ обираємо точки A, B, C, які задано в умові. Маємо рівняння площини ABC:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-7 \\ 0-2 & 3-3 & 6-7 \\ 7-2 & 2-3 & 3-7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-7 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)\cdot(0-1)-(y-3)\cdot(8+5)+(z-7)\cdot(2-0)=0$$

$$-1(x-2)-13(y-3)+2(z-7)=0$$

Маємо: рівняння площини $ABC: -x-13y+2z+27=0$.

6. *<u>Знайдемо кути в трикутнику</u>* ABC. Косинус кута між прямими, що задані канонічними рівняннями, знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \pm\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

де (l_1, m_1, n_1) та (l_2, m_2, n_2) напрямні вектори прямих. Маємо:

$$\cos\varphi_1 = \cos\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-2\cdot 5 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot(-4)}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-4)^2}} \approx -0,4140;\ \varphi_1 = \angle A \approx 114°27';$$

$$\cos\varphi_2 = \cos\left(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right) = \frac{2\cdot 7 + 0\cdot(-1) + 1\cdot(-3)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{59}} = 0,6404;\ \varphi_2 = \angle B \approx 50°10';$$

$$\cos\varphi_3 = \cos\left(\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}\right) = \frac{(-5)\cdot(-7) + 1\cdot 1 + 4\cdot 3}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{59}} \approx 0,9642;\ \varphi_3 = \angle C \approx 15°23'.$$

7. *<u>Знайдемо кут між гранню</u>* ABC *<u>і площиною</u>* ABC'. Кут між гранню ABC і площиною ABC' обчислюється як кут між двома площинами. Косинус кута між площинами обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

Рівняння площини ABC було знайдено в п. 5.

Знайдемо рівняння площини ABC'.

Спочатку знайдемо координати точки C'. Координати точки C' співпадають з координатами радіус-вектора $\overrightarrow{OC'}$.

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AA'} = \left(7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) + \left(-\frac{\sqrt{174}}{29}\vec{i} - \frac{13\sqrt{174}}{29}\vec{j} + \frac{2\sqrt{174}}{29}\vec{k}\right) =$$

$$= \left(7 - \frac{\sqrt{174}}{29}\right)\vec{i} + \left(2 - \frac{13\sqrt{174}}{29}\right)\vec{j} + \left(3 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)\vec{k}$$

Маємо: $C'\left(7 - \frac{\sqrt{174}}{29}; 2 - \frac{13\sqrt{174}}{29}; 3 + \frac{2\sqrt{174}}{29}\right)$.

Рівняння площини ABC' має вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_{C'} - x_A & y_{C'} - y_A & z_{C'} - z_A \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-7 \\ 0-2 & 3-3 & 6-7 \\ 7 - \frac{\sqrt{174}}{29} - 2 & 2 - \frac{13\sqrt{174}}{29} - 3 & 3 + \frac{2\sqrt{174}}{29} - 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-7 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 - \frac{\sqrt{174}}{29} & -1 - \frac{13\sqrt{174}}{29} & -4 + \frac{2\sqrt{174}}{29} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1-\frac{13\sqrt{174}}{29} & -4+\frac{2\sqrt{174}}{29} \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5-\frac{\sqrt{174}}{29} & -4+\frac{2\sqrt{174}}{29} \end{vmatrix}+(z-7)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5-\frac{\sqrt{174}}{29} & -1-\frac{13\sqrt{174}}{29} \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{42\sqrt{174}}{29} & -\frac{114\sqrt{174}}{29} \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ \frac{144\sqrt{174}}{29} & -\frac{114\sqrt{174}}{29} \end{vmatrix}+(z-7)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ \frac{144\sqrt{174}}{29} & -\frac{42\sqrt{174}}{29} \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (x-2)\left(\frac{42\sqrt{174}}{29}\right)-(y-3)\left(\frac{372\sqrt{174}}{29}\right)+(z-7)\left(\frac{84\sqrt{174}}{29}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{42\sqrt{174}}{29}x-\frac{372\sqrt{174}}{29}y+\frac{84\sqrt{174}}{29}z+\frac{444\sqrt{174}}{29}=0$$

Маємо рівняння площини ABC': $\frac{42\sqrt{174}}{29}x-\frac{372\sqrt{174}}{29}y+\frac{84\sqrt{174}}{29}z+\frac{444\sqrt{174}}{29}=0$.

З рівняння площини ABC' маємо: $A_2=\frac{42\sqrt{174}}{29}$; $B_2=-\frac{372\sqrt{174}}{29}$; $C_2=\frac{84\sqrt{174}}{29}$;

$$\cos\varphi=\frac{-1\cdot\frac{42\sqrt{174}}{29}+(-13)\cdot\left(-\frac{372\sqrt{174}}{29}\right)+2\cdot\frac{84\sqrt{174}}{29}}{\sqrt{(-1)^2+(-13)^2+2^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{42\sqrt{174}}{29}\right)^2+\left(-\frac{372\sqrt{174}}{29}\right)^2+\left(\frac{84\sqrt{174}}{29}\right)^2}}\approx 0,9805$$

$$\cos\varphi\approx 0,9805;\quad \varphi\approx 11°17'$$

8. *Знайти об'єм призми* $ABCA'B'C'$ *(двома способами)*.

Перший спосіб. Об'єм призми, побудованої на трьох векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ дорівнює модулю мішаного добутку обчислюється за формулою:

$$V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$

де

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

Об'єм $V_{ABCA'B'C'}$ призми $ABCA'B'C'$:

$$V_{ABCA'B'C'}=\frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AA'}\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 0 & -1\\ 5 & -1 & -4\\ -\frac{\sqrt{174}}{29} & -\frac{13\sqrt{174}}{29} & \frac{2\sqrt{174}}{29}\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\left|-2\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -\frac{13\sqrt{174}}{29} & \frac{2\sqrt{174}}{29}\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}5 & -1\\ -\frac{\sqrt{174}}{29} & -\frac{13\sqrt{174}}{29}\end{vmatrix}\right|\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\left|-2\left(-\frac{54\sqrt{174}}{29}\right)-1\left(-\frac{66\sqrt{174}}{29}\right)\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{174\sqrt{174}}{29}\Rightarrow 3\sqrt{174}$$

Таким чином об’єм $V_{ABCA'B'C'}$ призми $ABCA'B'C'$: $V_{ABCA'B'C'}=3\sqrt{174}$ (куб. од.).

Другий спосіб. Для обчислення об’єму призми використаємо формулу:

$$V=S_{осн}\cdot H$$

де $S_{осн}=S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{174}$ (кв. од.),

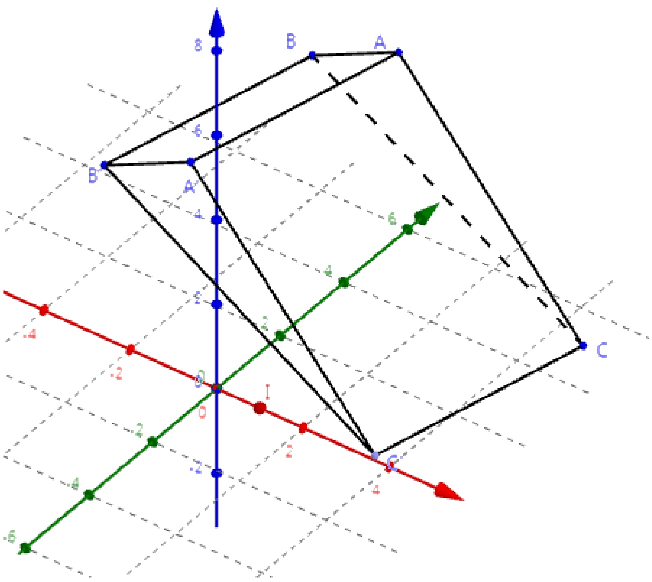
та $H=6$ (од.).

Маємо:

$$V_{ABCA'B'C'}=\frac{1}{2}\sqrt{174}\cdot 6=3\sqrt{174}\text{ (куб. од.).}$$

9. Робимо креслення.

Призма зображена у правій системі координат.



Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	$A(x_1;y_1;z_1)$	$B(x_2;y_2;z_2)$	$C(x_3;y_3;z_3)$	Висота
1	(2; 4; 3)	(3;2;2)	(1;1;2)	4
2	(1; 2; 3)	(1; 3; 2)	(6;3;5)	3
3	(2; 1;4)	(3;5;1)	(1;4; 3)	5
4	(5; 1; 4)	(1;2;3)	(1;4;3)	5
5	(4; 7; 3)	(9; 1; 3)	(2; 4; 1)	6
6	(3;3;2)	(3;2;5)	(6; 5; 3)	3
7	(8; 1; 3)	(4; 5; 7)	(3; 2; 1)	4
8	(2;3;3)	(4; 2; 3)	(3;4;5)	5
9	(6;3;4)	(3;2;4)	(3;7; 1)	6
10	(2; 4; 1)	(1; 3; 5)	(5;3;2)	4
11	(1; 3; 5)	(2;3;7)	(4; 1;5)	3
12	(2;1;4)	(2; 1; 3)	(5;2;3)	3
13	(2; 1; 3)	(5; 2; 4)	(0; 3; 1)	4
14	(0; 2; 5)	(4; 3; 5)	(2; 3; 6)	5
15	(3; 0; 6)	(1;2;4)	(4; 2; 5)	6
16	(6; 0; 1)	(4; 4; 3)	(6; 5; 1)	4
17	(7; 1;2)	(0; 8; 1)	(3; 1; 7)	5
18	(2; 5; 6)	(3; 2; 7)	(4; 2; 8)	6
19	(8; 1; 3)	(5;3;1)	(6; 2; 3)	6
20	(7;2;3)	(2;5;0)	(2;3;3)	5
21	(5; 5; 0)	(3; 1; 5)	(6; 7; 1)	5
22	(3; 2; 0)	(4; 5; 7)	(2;3;7)	4
23	(4; 2; 7)	(3; 2; 6)	(5; 3; 6)	3
24	(8;3;2)	(4; 3; 7)	(5; 0; 1)	5
25	(2; 3; 7)	(0;3;6)	(7; 2; 3)	6
26	(5;6; 1)	(7;0;3)	(2; 4; 6)	3
27	(0; 5; 3)	(7; 2; 0)	(3;6;1)	5
28	(3; 1; 4)	(3;7; 1)	(7; 0; 2)	6
29	(4; 2; 1)	(3; 0; 5)	(4; 2; 1)	4
30	(5;2;3)	(6; 3; 1)	(0;3;2)	4

Задача № 3

Перетворити до канонічного виду рівняння кривої, визначити тип кривої, знайти осі, ексцентриситет, фокуси, рівняння директрис, побудувати графік кривої.

Розв'язання:

а) $4x^2 - 9y^2 – 8x – 36 – 68=0$.

Перетворимо ліву частину рівняння, виділивши повні квадрати по кожній змінній:

$$4\left(x^2-2x+1\right)-9\left(y^2+4y+4\right)-4+36-68=0,$$
$$4(x-1)^2-9(y+2)^2-36=0,$$

маємо:

$$4(x-1)^2-9\left(y+2\right)^2=36.$$

Розділимо праву і ліву частини рівняння на 36:

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1 \text{ або } \frac{(x-1)^2}{3^2}-\frac{(y+2)^2}{4^2}=1.$$

Одержали канонічне рівняння гіперболи з центром у точці $O(1;-2)$, де $a^2=9$, $b^2=4$, тоді $a=3$, $b=2$;

дійсна вісь: $2a=6$; уявна вісь:$2b=4$;

фокуси: $F_1(+c;0); F_2(-c;0)$, де $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $c=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$,

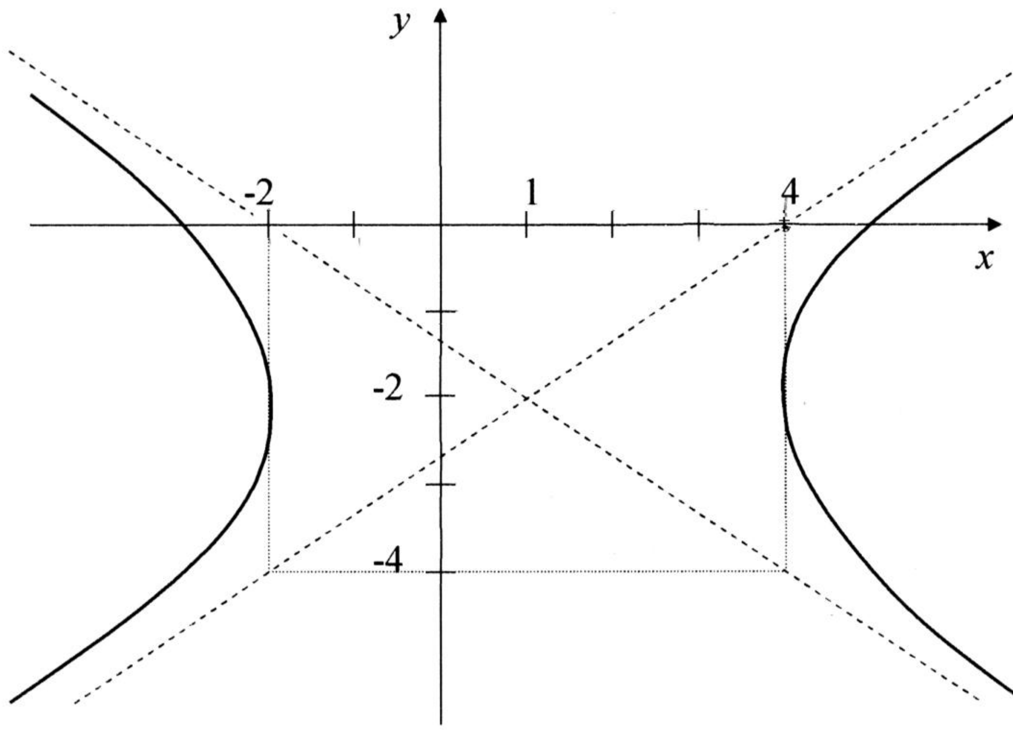
тоді $F_1(\sqrt{13};0); F_2(-\sqrt{13};0)$;

ексцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}\approx 1.2$;

рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$,

$$x_1=\frac{2}{1,2}\approx 2,5;\ \ x_2=-\frac{3}{1,2}\approx 2,5.$$

Будуємо графік:



б) $5x^2+4xy+8y^2+8x+14y=0$.

Використаємо формули перетворення:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Маємо:

$$5(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 4(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$8(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 8(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 14(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 5 = 0$$

або

$$(5\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha)x'^2 +$$
$$+(5\sin^2\alpha) - 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha)y'^2 +$$
$$+\left[6\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right]x'y' +$$
$$(8\cos\alpha + 14\sin\alpha)x' + (14\cos\alpha - 8\sin\alpha)y' + 5 = 0.$$

Виберемо кут повороту α так, щоб коефіцієнт біля добутку $x_1 \cdot y_1$ став рівним нулю. Отримаємо рівняння для визначення кута α:

$$4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 6\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

або

$$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0,$$

звідси

$$tg\alpha_1 = 2; tg\alpha_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ці значення tgα відповідають двом взаємно перпендикулярним напрямкам. Тому, взявши tgα=2 замість $tg\alpha = -\frac{1}{2}$, ми тільки міняємо місцями осі x' і y'.

З tgα=2 випливає, що кут повороту α може знаходитись у першій або в третій чвертях. Оберемо tgα=2, α - в першій чверті. Визначимо sinα і cosα:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};$$

$$\text{tg}\alpha=2;\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тоді рівняння матиме вид

$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0$$

або

$$9\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) = -5.$$

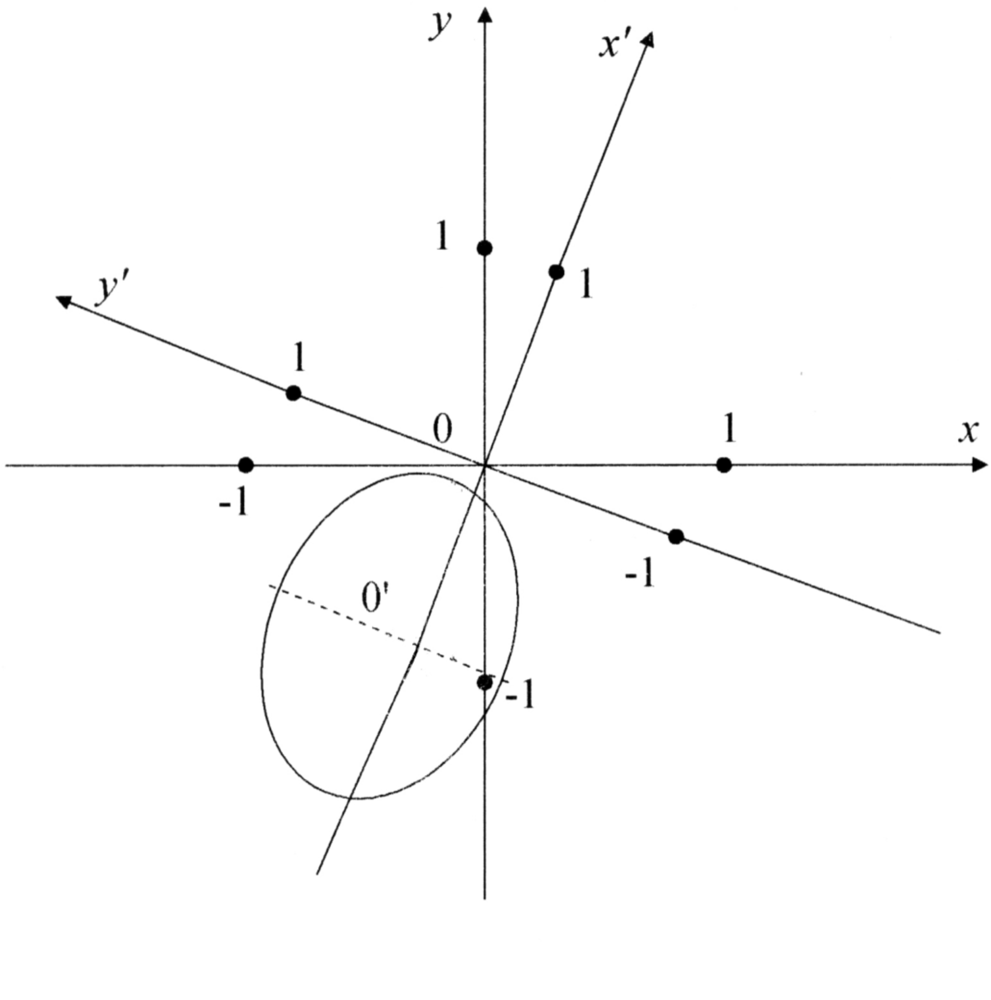
Вирази в дужках доповнимо до повних квадратів:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5=\frac{9}{4}$$

або

$$\frac{\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{9}{16}}=1.$$

Отримали рівняння еліпса з центром в точці $O\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$.



Варіанти індивідуальних завдань

1) а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0,$

б) $32x^2+52xy-7y^2+180=0;$

2) а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0,$

б) $15x^2-2\sqrt{55}xy+9y^2=20;$

3) а) $y=\frac{1}{4}x^2+x+2,$

б) $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2=12;$

4) а) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0,$

б) $5x^2+4\sqrt{6}xy+7y^2=22;$

5) а) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0,$

б) $4xy+3y^2=36;$

6) а) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0,$

б) $5x^2+8xy+5y^2=9;$

7) а) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0,$

б) $13x^2-48xy+27y^2=45;$

8) а) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0,$

б) $4x^2+24xy+11y^2=20;$

9) а) $y=4x^2-8x+7,$

б) $3x^2-2\sqrt{5}xy-y^2=8;$

10) а) $9x^2+4y^2+18x-8y+49,$

б) $6x^2-4\sqrt{14}xy+5y^2=26;$

11) а) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0,$

б) $x^2-2\sqrt{21}xy+5y^2=24;$

12) а) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0,$

б) $9x^2+4\sqrt{2}xy+2y^2=20;$

13) а) $2x^2+3y^2 8x-6y+11=0$,

б) $4x^2+2\sqrt{18}xy+7y^2=15$;

14) а) $3x^2+2y^2-5x-7y-20=0$,

б) $5x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=12$;

15) а) $x=y^2-2y+5$,

б) $5x^2-4xy+2y^2=24$;

16) а) $x^2+3y^2-4x+9y-10=0$,

б) $5x^2+4\sqrt{2}xy+3y^2=14$;

17) а) $2x^2-5y^2-8x+10y=15$,

б) $5x^2+4xy+2y^2=18$;

18) а) $3x^2+5y^2-8x+10y=15$,

б) $4xy+3y^2=36$;

19) а) $4x^2+4y^2-8x+10y=15$,

б) $4x^2+2\sqrt{3}xy+2y^2=1$;

20) а) $x^2-y^2+4x-3y=10$,

б) $4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2=24$;

21) а) $x=2y^2+y-6$,

б) $5x^2+8xy+5y^2=1$;

22) а) $2x^2+3y^2-4y+10x=13$,

б) $3x^2+8xy-3y^2=20$;

23) а) $x^2+3y^2+4x-5y-20=0$,

б) $4x^2+4\sqrt{3}xy+5y^2=40$;

24) а) $3x^2+5y^2-4x-10y-20=0$,

б) $8x^2+2\sqrt{14}xy+3y^2=10$;

25) а) $x^2+5y^2+4x-12y-10=0$,

б) $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2=21$;

26) а) $2x^2+3y^2-5x-7y=12$,

б) $7x^2+2\sqrt{6}xy+2y^2=21$;

27) а) $x^2+y^2-4x-6y-15=0$,

б) $3x^2-2\sqrt{2}xy+2y^2=20$;

28) а) $2x^2-3y^2+10x-9y-50=0$,

б) $3x^2+4xy+3y^2=1$;

29) а) $3x^2+5x-y^2+2y-10=0$,

б) $4x^2+\sqrt{18}xy+y^2=10$;

30) а) $3x^2+2y^2+4x-5y-20=0$,

б) $x^2-4xy+3y^2=8$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 640 с.
2 Вища математика /За ред. Г.Л. Калініна. – К.: Либідь, 1994. – Кн. 1. – 310 с.
3 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.:Наука, 1984.
4 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.:Наука, 1984.
5 Берман Г.Р. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1975.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

і завдання до виконання
розрахунково-графічної роботи
з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Відповідальний за випуск Бронза С.Д.

Редактор Еткало О.О.

Підписано до друку 30.11.07 р.

Формат паперу 60х84 1/16 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 1,25. Обл.-вид.арк. 1,5.

Замовлення № Тираж 150. Ціна

Видавництво УкрДАЗТу, свідоцтво ДК № 2874 від 12.06.2007 р.
Друкарня УкрДАЗТу,
61050, Харків - 50, пл. Фейєрбаха, 7