

**ПОЛЯРИЗАЦИЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ****П. Я. Придубков**Украинская государственная академия железнодорожного транспорта  
пл. Фейербаха, 7, г. Харьков, 61050, Украина. E-mail: pavel-pridubkov@yandex.ru

Показано несоответствие рассчитываемых электромагнитных полей электротехнических устройств необратимым потерям энергии, обусловленным поляризацией диэлектрика, установлен параметр, соответствующий проводимости связанных зарядов диэлектрика, и уточнены дифференциальные уравнения векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля, повышающие точность расчёта исходных электромагнитных параметров при расчёте и проектировании электротехнических устройств.

**Ключевые слова:** электромагнитные поля электротехнических устройств, необратимые потери энергии при поляризации, векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля, связанные заряды.

**ПОЛЯРИЗАЦІЯ І ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОТЕНЦІАЛИ****П. Я. Придубков**Українська державна академія залізничного транспорту  
Майдан Фейербаха, 7, м. Харків, 61050, Україна. E-mail: pavel-pridubkov@yandex.ru

Показана невідповідність розрахованих електромагнітних полів електротехнічних пристроїв необоротним втратам енергії, обумовленим поляризацією діелектрика, встановлений параметр, відповідний провідності зв'язаних зарядів діелектрика, і уточнені диференціальні рівняння векторного і скалярного потенціалів електромагнітного поля, що підвищують точність розрахунку початкових електромагнітних параметрів при розрахунку і проектуванні електротехнічних пристроїв.

**Ключові слова:** електромагнітні поля електротехнічних пристроїв, незворотні втрати енергії при поляризації, векторний і скалярний потенціали електромагнітного поля, зв'язані заряди.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Теория электромагнитного поля является той основой, которая позволяет понять принципы функционирования различных электротехнических устройствах спроектировать их и рассчитать на заданные условия работы. К числу таких устройств могут быть отнесены электрические машины, трансформаторы, электропривод, линии связи, устройства автоматики, измерительной техники, радиотехнические и другие устройства.

Неразрывная связь электрического и магнитного компонентов электромагнитного поля выражается в форме системы дифференциальных уравнений классической электродинамики, постулированных Максвеллом [1]. При установлении системы основных уравнений поля сделаны следующие упрощающие допущения:

1) все находящиеся в поле материальные тела неподвижны;

2) в каждой точке поля значения величин  $\epsilon_a$ ,  $\gamma$  и  $\mu_a$ , характеризующих свойства среды, остаются постоянными, то есть не меняются со временем, не зависят от напряжённости поля и считаются заданными;

3) постоянные магниты и ферромагнитные тела отсутствуют.

Второе ограничение означает, в частности, системы основных уравнений не учитывают выделение и поглощение тепла при поляризации среды распространения электромагнитного поля. Между тем данные необратимые преобразования энергии могут оказывать существенное влияние на режимы работы электротехнических установок [2]. Так, например, одним из главных технических применений диэлек-

триков является их использование в цепях электрического тока для изоляции проводников, что позволяет направлять токи, а вместе с этим и направляемые ими потоки энергии в те части электротехнических устройств, куда необходимо эту энергию доставить. Эффективность передачи энергии, а, значит, и работы этих устройств во многом зависит и от того, насколько учтены и оптимизированы необратимые потери передаваемой энергии при поляризации среды распространения поля.

Проектирование электротехнических устройств заключается, в том числе и в расчете параметров их электрических цепей. Для определения этих параметров необходимо знать электрические и магнитные поля, образующиеся около участков электрических цепей при наличии в данных участках токов и напряжений, учитывающих также и необратимые потери, обусловленные поляризацией изолирующих сред. Расчёт электромагнитных полей базируется на основных уравнениях электродинамики с использованием электродинамических потенциалов. Поэтому исследование и уточнение аналитических зависимостей, описывающих выделение и поглощение энергии в средах распространения поля и уточнение дифференциальных уравнений для потенциалов электромагнитного поля, определяющих его параметры, является актуальной проблемой.

Целью настоящей работы является исследование и уточнение аналитических зависимостей, описывающих необратимые преобразования энергии при поляризации сред распространения электромагнитного поля и уточнение дифференциальных уравнений электромагнитных потенциалов этого поля, позволяющих повысить точность расчета исходного для определения параметров электрических цепей

электромагнитного поля и, стало быть, повысить эффективность функционирования проектируемых устройств.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.** Первое уравнение Максвелла определяют зависимость вихря магнитного поля от плотности токов проводимости и токов смещения:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta}_{np} + \vec{\delta}_{cm}, \quad (1)$$

где  $\vec{\delta}_{np} = \gamma\vec{E}$  – вектор плотности тока проводимости ( $\gamma$  – удельная проводимость среды распространения поля);  $\vec{\delta}_{cm} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$  – вектор плотности тока электрического смещения.

Второе уравнение Максвелла выражает связь между ротором напряжённости электрического поля и скоростью изменения магнитного поля в той же точке поля [3]:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

Уравнения Максвелла (1) и (2) определяют возможность распространения электромагнитного поля. Переменное во времени электрическое поле возбуждает меняющееся магнитное поле, которое в свою очередь, изменяясь во времени, приводит к образованию меняющегося электрического поля. Распространяющееся магнитное поле поддерживает электрическое поле и наоборот. В результате этого процесса возникает единое движущееся электромагнитное поле.

Из первого уравнения Максвелла следует, что магнитное поле может возникать не только при наличии тока проводимости, но также в результате изменения напряжённости электрического поля во времени, то есть при наличии тока смещения. Основное различие между этими токами усматривается в том, что первые возникают в результате движения электрических зарядов, вторые же – в результате изменения электрического поля во времени [3].

При распространении электромагнитного поля в вещественной диэлектрической (изолирующей) среде, в которой отсутствуют свободные заряды, изменение вектора электрической индукции ( $\vec{D}$ ) во времени порождает ток смещения ( $\vec{\delta}_{cm}$ ) [2]:

$$\vec{\delta}_{cm} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная ( $\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ );  $\vec{P}$  – вектор поляризации среды.

Следовательно, ток смещения в диэлектрике состоит из двух слагаемых. Одно из них  $\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  обусловлено изменением напряжённости  $\vec{E}$  электрического поля и представляет собой идеальный ток

смещения, отражающий процессы в самом поле, в пространстве между атомами вещества и внутри них. Другое слагаемое  $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ , определяемое скоростью изменения поляризации вещественной среды, является дополнительным током смещения (током поляризации).

Поляризованность  $\vec{P}$  вещества определяется отношением количества электричества  $dQ_{sp}$  смещённого в веществе диэлектрика в процессе изменения поля сквозь элемент поверхности  $d\vec{S}$ , нормальный к направлению смещения связанных зарядов, к величине этого элемента [2]:

$$\vec{P} = \frac{dQ_{sp}}{d\vec{S}}. \quad (4)$$

Смещение связанных зарядов вещества вызывает изменение напряжённости электрического поля, как и наоборот. Для большинства вещественных сред вектор поляризации  $\vec{P}$  пропорционален вектору напряжённости  $\vec{E}$  электрического поля ( $\vec{P} = \kappa\vec{E}$ ) [3, 4]. Стало быть, в токе поляризации вещественных сред ( $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ ) необходимо рассматривать две составляющие:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(\kappa\vec{E})}{\partial t} = \kappa \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\kappa}{\partial t} \vec{E}, \quad (5)$$

где  $\kappa = \varepsilon_0\chi$  – коэффициент пропорциональности между вектором поляризации и напряжённостью электрического поля;  $\chi$  – электрическая восприимчивость.

Одна из составляющих  $\left(\kappa \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$  тока поляризации обусловлена изменением напряжённости электрического поля и является «чистым» током процесса поляризации (реактивной компонентой тока поляризации). Вторая составляющая  $\left(\frac{\partial\kappa}{\partial t} \vec{E}\right)$  отражает процессы смещения связанных зарядов  $dQ_{sp}$  и является током проводимости данных зарядов, т.е. активной составляющей тока  $\vec{\delta}_{np,sp}$  поляризации. Её существование сопровождается необратимыми тепловыми потерями энергии:

$$\frac{\partial dQ_{sp}}{\partial t d\vec{S}} = \vec{E} \frac{\partial\kappa}{\partial t} = \vec{\delta}_{np,sp}. \quad (6)$$

Вещественные среды, у которых внутримолекулярные силы изменяются пропорционально расстоянию между зарядами диполя (квазиупругие диполи) являются диэлектриками с неполярными диполями. Они обладают постоянной диэлектрической восприимчивостью  $\left(\chi = \frac{\kappa}{\varepsilon_0} = const\right)$ , независимой от температуры, т.к. силы электрического поля

уравновешиваются в них внутримолекулярными силами, не зависящими от теплового движения молекул. Поэтому в тех случаях, когда поляризация среды обусловлена смещением электронных орбит неполярных молекул, образование электрического момента происходит практически мгновенно вслед за появлением электрического поля [4], необратимые потери энергии в виде теплоты при этом отсутствуют. В токе поляризации присутствует только реактивная составляющая, обусловленная изменением напряжённости поля, поэтому:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7)$$

Поляризация полярных молекул происходит за счёт их поворота, при этом образование электрического момента осуществляется с некоторым запаздыванием, различным для разных диэлектрических сред. В токе смещения появляется активная составляющая, существование которой обуславливает рассеяние энергии. В этом случае изменение поляризации среды сопровождается как изменением запаса энергии электрического поля, так и необратимыми потерями энергии в виде тепла, стало быть:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \vec{E}. \quad (8)$$

Таким образом, первое уравнение Максвелла  $\left( \text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$ , в котором рассматривается активная составляющая тока  $\left( \vec{\delta}_{np.sp} = \frac{\partial \kappa}{\partial t} \vec{E} \right)$  поляризации, то есть необратимые потери энергии, обусловленные поляризацией среды распространения поля, может быть описано формулой:

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \vec{E}, \quad (9)$$

где

$$\varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10)$$

Абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_a$  определяется выражением:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 + \kappa,$$

в котором электрическая постоянная  $\varepsilon_0$  не зависит от времени ( $\varepsilon_0 = \text{const}$ ), поэтому:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t}.$$

Следовательно [5]:

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \vec{E}.$$

При проектировании того или иного электротехнического устройства необходимо предварительно отыскать основные векторы электромагнитного поля путём интегрирования уравнений Максвелла. Так, например, для расчёта электрической ёмкости надо знать распределение электрического поля, для расчёта индуктивности – распределение магнитного поля. Причём, достаточно определить какой-либо из двух векторов электрического поля и какой-либо из двух векторов магнитного поля, чтобы далее с помощью простых соотношений, характеризующих среду, можно найти оставшиеся два вектора. Математически задача сводится к интегрированию двух векторных или шести скалярных уравнений по числу координатных составляющих векторов поля. Решение данных уравнений существенно облегчается введением вспомогательных величин – скалярного  $\varphi$  и векторного  $\vec{A}$  потенциалов [1, 3].

Система уравнений поля в общем виде с учетом тока, обусловленного смещением связанных зарядов (активной составляющей тока поляризации), определяется двумя парами Максвелловских уравнений:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}_{np} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \vec{E}, \quad (11)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{св}}{\varepsilon_a},$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0.$$

Очевидным решением второго уравнения второй пары Максвелловских уравнений (2) является:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \text{или} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \vec{A}, \quad (13)$$

где  $\vec{A}$  – некоторая векторная функция (векторный потенциал).

Данное решение будет удовлетворять уравнение  $\text{div} \vec{B} = 0$  в силу существующего векторного тождества:  $\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$ . Чтобы определить при каких условиях это решение удовлетворяет второму уравнению Максвелла необходимо подставить первое выражение (13) в первое уравнение второй пары уравнений (12):

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

или

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Последнее уравнение будет удовлетворяться, если положить:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \varphi, \quad (14)$$

где  $\varphi$  – некоторая скалярная функция.

Справедливость данного положения подтверждается векторным тождеством:

$$\text{rot grad}\varphi = 0.$$

Стало быть,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi. \quad (15)$$

Первое уравнение первой пары Максвелловских уравнений (11) можно представить в следующем виде:

$$\text{rot}\vec{H} - \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \vec{E} = \vec{\delta}_{np}. \quad (16)$$

Чтобы определить при каких условиях соотношения (13) и (15) удовлетворяют первому уравнению Максвелла необходимо в уравнение (16) подставить эти соотношения:

$$\begin{aligned} & \text{rot rot}\vec{A} + \mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \left( \text{grad}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \\ & + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{grad}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu_a \vec{\delta}_{np}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в соответствии с одной из важнейших формул векторного анализа:

$$\text{rot rot}\vec{A} = \text{grad div}\vec{A} - \nabla^2 \vec{A},$$

можно констатировать:

$$\begin{aligned} & \text{grad div}\vec{A} - \nabla^2 \vec{A} + \mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \left( \text{grad}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \\ & + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{grad}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu_a \vec{\delta}_{np} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \text{grad} \left[ \text{div}\vec{A} + \mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \varphi + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \nabla^2 \vec{A} + \\ & + \mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_a \vec{\delta}_{np} \end{aligned}$$

Последнее выражение содержит в себя две функции – векторную  $\vec{A}$  и скалярную  $\varphi$ . Так как при введении векторной функции  $\vec{A}$  (13) был задан её ротор, то для полного определения функции  $\vec{A}$  следует задать также и её дивергенцию, причём так, чтобы последнее уравнение могло быть упрощено. С этой целью следует положить:

$$\text{div}\vec{A} = -\mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (17)$$

Тогда уравнение для векторной функции  $\vec{A}$  запишется в виде:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\delta}_{np}. \quad (18)$$

Таким образом, найдены условия, при которых удовлетворяются три из четырёх (11), (12) основных уравнений электромагнитного поля. Чтобы найти условия, при которых удовлетворяется четвёртое уравнение (второе уравнение первой пары Максвелловских уравнений) необходимо подставить в это уравнение соотношение (15):

$$\text{div grad}\varphi + \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_{cs}}{\varepsilon_a}.$$

Так как

$$\text{div}\vec{A} = -\mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

то

$$\text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что:  $\text{div grad}\varphi = \nabla^2 \varphi$ , поэтому:

$$\nabla^2 \varphi - \mu_a \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (19)$$

Стало быть, система двух векторных уравнений Максвелла сведена к одному векторному уравнению (18) и аналогичному ему по математической форме скалярному уравнению (19). Данные уравнения позволяют определить значения скалярного  $\varphi$  и векторного  $\vec{A}$  потенциалов электромагнитного поля по заданному распределению зарядов и токов проводимости с учётом необратимых потерь энергии при поляризации среды распространения поля. Переход к основным векторам поля после определения функций  $\vec{A}$  и  $\varphi$  может быть осуществлён с помощью простых дифференциальных операций, определяемых выражениями (13) и (15).

**ВЫВОДЫ.** Таким образом, полученная аналитическая зависимость (5), описывающая составляющие тока поляризации и уточнение дифференциальных уравнений (18) и (19) для потенциалов электромагнитного поля, позволяет повысить точность расчёта исходных электрических и магнитных полей, и, стало быть, параметров электрических цепей при проектировании электротехнических устройств. Следовательно, обеспечивается и повышение эффективности функционирования данных устройств, т.к. при их разработке учитываются необратимые потери энергии, обусловленные поляризацией среды распространения поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. – 616 с.
2. Сукачев А.П. Теоретические основы электротехники. Часть I. Физические основы электротехники. – Харьков, 1959. – 460 с.

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.

4. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Часть третья. Теория электромагнитного поля. – М.: Энергия, 1969. – 352 с.

5. Придубков П.Я. Исследование характеристик и свойств реальных диэлектрических сред электромагнитного поля // Вестник Кременчугского государственного университета. – 2007. – Вып. 4/2007 (45), част. 2. – С. 25–28.

## POLARIZATION AND ELECTROMAGNETIC POTENTIALS

**P. Pridubkov**

Ukrainian State Academy of Railway Transport

pl. Feyerbaha, 7, Kharkov, 61050, Ukraine. E-mail: pavel-pridubkov@yandex.ru

In this paper, the author has shown the disparity of the expected electromagnetic fields of electrical engineering devices to the irreversible losses of energy, conditioned by polarization of dielectric. The parameter that is proper to conductivity of the linked charges of dielectric is set, and differential equalizations are specified for the vector and scalar potentials of the electromagnetic field. These findings allow for enhancement of calculation accuracy of initial electromagnetic parameters during modelling and planning of electrical engineering devices.

**Key words:** electromagnetic fields of electrical engineering devices, irreversible energy losses during polarization, vector and scalar potentials of the electromagnetic field, linked charges.

## REFERENCES

1. Tamm, I.E. (2003), *Osnovi teorii elektrichestva* [Bases of theory of electricity], Izdatelstvo Fiziko-matematicheskoi literatury, Moscow, Russia.

2. Sukachev, A.P/ (1959), *Teoreticheskie osnovi elektrotehniki. Chast 1. Fisicheskie osnovi elektrotehniki* [Theoretical bases of electrical engineering. Part I. Physical bases of electrical engineering]. Kharkov, Ukraine.

3. Bessonov, L. A. (1986), *Teoreticheskie osnovi elektrotehniki. Electromagnitnoe pole* [Theoretical bases of electrical engineering. Electromagnetic field], Vyshcha shkola, Moscow, Russia.

4. Polivanov, K.M. (1969), *Teoreticheskie osnovi elektrotehniki. Chast 3. Electromagnitnoe pole* [Theoretical bases of electrical engineering. Part 3. Theory of the electromagnetic field], Energiya, Moscow, Russia.

5. Pridubkov, P.Ya. (2007), “Research of descriptions and properties of the real dielectric environments of the electromagnetic field”, *Transactions of Kremenchuk State University*, vol. 4, no. 45, pp. 25–28.

Стаття надійшла 04.09.2013.