МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

С.В. Панченко, М.П. Медиченко, В.П. Лисечко

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

Частина 1

Харків 2015

УДК 681.5(072)

ББК 32.811
П 168

Рекомендовано вченою радою Української державної академії залізничного транспорту як навчальний посібник (витяг з протоколу №10 від 26 грудня 2014 р.)

Рецензенти:

професор, д-р техн. наук В.І. Мойсеєнко (УкрДАЗТ),
професор, д-р техн. наук О.А. Серков (НТУ «ХПІ»),
професор, д-р техн. наук В.А. Краснобаєв (Полтавський НТУ ім. Ю. Кондратюка

П 168 Панченко С.В., Медиченко М.П., Лисечко В.П. Методи оптимізації та моделювання: Навч. посібник / – Харків: УкрДАЗТ, 2015. – Ч.1. – 128 с., рис. 35, табл. 45.
ISBN 978-617-654-023-6

У навчальному посібнику викладаються загальні принципи керування системами, роль і місце математичних методів при обґрунтуванні рішень. Основна увага приділена розгляду методів математичного програмування (лінійного, цілочислового, нелінійного). Дається геометричне трактування даних методів, наводяться численні приклади розв'язання завдань методами математичного програмування.

Рекомендується для студентів всіх форм навчання факультету АТЗ і слухачів ІППК.

УДК 681.5(072)
ББК 32.811

ISBN 978-617-654-023-6

Навчальний посібник

Панченко Сергій Володимирович,
Медиченко Михайло Петрович,
Лисечко Володимир Петрович

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Частина І

Відповідальний за випуск Лисечко В.П.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 22.04.2014 р.
Формат паперу 60x84 1/8. Папір писальний.
Умовн.-друк.арк. 5,0. Тираж 100. Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

С.В. Панченко, М.П. Медиченко, В.П. Лисечко

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник

Частина 1

Харків 2015

Українська державна академія залізничного транспорту

Факультет автоматики, телемеханіки та зв'язку

Кафедра транспортного зв'язку

С.В. Панченко, М.П. Медиченко, В.П. Лисечко

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Частина 1

Харків 2015

УДК 681.5(072)
ББК
П

Затверджено як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (витяг з протоколу № від 2014 р.)

Рецензент

проф. В.І. Мойсеєнко

П Методи оптимізації та моделювання: Навч. посібник / С.В.Панченко, М.П. Медиченко, В.П. Лисечко. – Харків: УкрДАЗТ, 2015. – Ч.1. – 128 с., рис. 35, табл. 45.
ISBN

У навчальному посібнику викладаються загальні принципи керування системами, роль і місце математичних методів при обґрунтуванні рішень. Основна увага приділена розгляду методів математичного програмування (лінійного, цілочислового, нелінійного). Дається геометричне трактування даних методів, наводяться численні приклади розв’язання завдань методами математичного програмування.

Рекомендується для студентів всіх форм навчання факультету АТЗ і слухачів ІППК.

УДК 681.5(072)
ББК

ISBN 978-

ЗМІСТ

1. ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ

1.1. Система та її опис

Система – це одно з поширених понять, яке широко використовується у наш час при вивченні різних об'єктів і явищ навколишнього світу. До систем можна віднести виробниче підприємство і живий організм, електронну обчислювальну машину, сукупність диференціальних рівнянь і підсилювач електричних сигналів. Системами є транспортна мережа України, порядок контролю якості продукції, таблиця множення, впорядкована послідовність хімічних елементів і так далі.

Навіть простого перерахування цих об'єктів вистачає, щоб помітити, наскільки вони відрізняються один від одного. Серед них є об'єкти реальні і абстрактні, природні і штучні, різної фізичної природи (біологічні, технічні, соціальні) і різного цільового призначення. Та все ж таки, незважаючи на істотні відмінності, усім їм властиві деякі загальні ознаки, що дозволяють розглядати пераховані об'єкти як системи.

У першу чергу слід зазначити, що система виступає як об'єкт складений, який являє собою сукупність окремих частин.

З іншого боку, система - це об'єкт комплексний, окремі частини якого пов'язані і тісно взаємодіють між собою.

Відмічені основні ознаки дозволяють дати визначення системи, справедливе для будь-яких об'єктів або явищ, що розглядаються в якості систем незалежно від їх природи, походження і цільового призначення. У загальному випадку система - це цілісна безліч об'єктів, пов'язаних між собою взаємними стосунками. Тут цілісність означає те, що система відносно інших об'єктів виступає чимось єдиним.

Особливий клас систем складають цілеспрямовані системи. Як випливає з їх назви, функціонування таких систем спрямоване на досягнення певної мети. Але для цього системою необхідно управляти. Тому тільки в цілеспрямованих системах мають місце різноманітні процеси керування і з цієї точки зору надалі під системою ми матимемо на увазі цілеспрямовану систему.

Прикладом цілеспрямованої системи може служити автоматизована система контролю (АСК) радіоелектронної апаратури.

Спрощена структурна схема такої системи наведена на рис. 1.1, де прийняті такі позначення:

$ОК_1, \ldots, ОК_n$ - об'єкти контролю, якими виступають вузли і блоки радіоелектронної апаратури;

ВВП - випробувально-вимірювальний пристрій, призначений для вимірювання параметрів апаратури і передачі їх по з'єднувальних лініях для обробки в центральному процесорі (ЦП);

ГІС - генератор сигналів, що імітуються, призначений для створення сигналів, що імітують роботу інших блоків;

ЦП - електронна обчислювальна машина, що здійснює обробку результатів вимірів параметрів і порівняння їх з номінальними значеннями, а також керування роботою ВВП і ГІС і видачу інформації на пристрій відображення;

ПВІ - пристрій відображення інформації у вигляді табло, дисплеїв або інших пристроїв;

ПУ - пульт керування, що дозволяє операторові здійснювати вмикання і вимикання АСК, задавати різні режими роботи системи і так далі;

О – оператор.

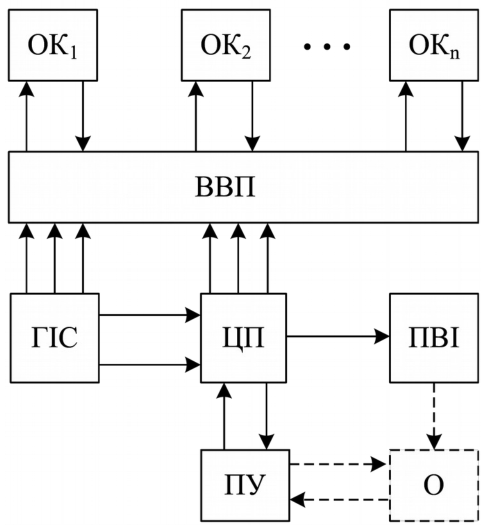

Рис. 1.1

Хоча кожен з вищеперелічених об'єктів виконує свої строго певні функції, їх робота в комплексі підпорядкована вирішенню єдиного завдання - визначенню технічного стану об'єктів контролю. Тому, маючи на увазі дуже широкий клас цілеспрямованих систем, можна дати таке визначення системи: система - це комплекс взаємопов'язаних і взаємодіючих між собою об'єктів, призначених для вирішення єдиного завдання.

Вивчення будь-якої системи розпочинається з її опису. Опис системи - це модель, що відображає певну групу властивостей системи. Залежно від задач дослідження, глибини вивчення системи опис її може бути різним.

Уявлення про будову системи дає морфологічний опис. Оскільки система складається з окремих взаємопов'язаних і взаємодіючих між собою частин, основними поняттями у разі морфологічного опису є поняття елемента, зв'язку і структури.

Елемент - це об'єкт системи, що не підлягає подальшому поділу на частини. Розбиття системи на елементи умовне, відносне і цілком визначається рівнем її дослідження.

Елементи системи можуть бути однотипними і різнотипними.

У разі аналізу систем часто групу елементів об'єднують у підсистему. Підсистемою називається певним чином виділена сукупність елементів системи, що мають схожі ознаки.

Взаємодія елементів системи між собою здійснюється за допомогою зв'язків. Зв'язки відіграють дуже важливу роль, оскільки забезпечують функціонування системи як єдиного цілого. Залежно від призначення зв'язки поділяються на речові, енергетичні та інформаційні. Вони призначені для передачі від елемента до елемента відповідно речовини, енергії або інформації.

Інформаційні зв'язки є найбільш поширеним видом зв'язків у цілеспрямованих системах. За допомогою інформаційних зв'язків забезпечується керування.

За характером взаємодії між елементами розрізняють прямі і зворотні зв'язки.

Прямі зв'язки служать для передачі речовини, енергії або інформації відповідно до послідовності функцій, що виконуються системою.

Зворотні зв'язки призначені, в основному, для передачі інформації про стан тих або інших елементів або підсистем і про виконані ними дії. Як правило, зворотні зв'язки використовуються для цілей керування.

Під структурою системи розуміється організація системи з окремих елементів з їх взаємозв'язками відповідно до функцій, що виконуються системою.

Іншою, складнішою формою опису системи є функціональний опис. Функціональний опис виходить з того, що будь-яка система виконує деякі функції, взаємодіє з іншими системами. За умови цього встановлюються функціональні залежності між параметрами системи, тобто будується математична модель функціонування системи або просто математична модель системи. На математичній моделі системи ми зупинимося нижче.

І, нарешті, існує ще одна форма опису системи - інформаційний опис. Він визначає, яким чином внутрішня і зовнішня інформація впливає на якість функціонування системи.

1.2. Прості і складні системи. Система і середовище

Під складною системою розуміється система, що складається з великої кількості взаємопов'язаних і взаємодіючих елементів різної природи і має розгалужену структуру.

Іноді складну систему визначають як систему, що допускає розбиття на підсистеми і яка функціонує в умовах невизначеності та здійснює цілеспрямований вибір своєї поведінки.

З цих визначень випливають такі основні властивості складних систем:

- багатомірність системи, визначувана великою кількістю елементів;
- розгалуженість структури і велика кількість взаємозв'язків між елементами;
- різноманіття природи елементів системи;
- відносна автономність елементів, тобто здатність елемента автономно виконувати своє коло завдань незалежно від того, функціонують інші елементи або ні;

- перестроювання структури і зв'язків відповідно до цілей, поставлених перед системою.

Очевидно, розглянута вище автоматизована система контролю певною мірою має вище перелічені властивості.

На відміну від складної системи, проста система складається з невеликої кількості елементів, має невелику кількість внутрішніх зв'язків і характеризується певною поведінкою. Одна і та сама система залежно від повноти опису, цільового призначення і завдань дослідження може бути віднесена як до простих, так і до складних систем.

Будь-яка система функціонує не ізольовано, а у взаємодії з іншими системами, довкіллям.

Довкілля - це сукупність об'єктів, що не входять у систему, але які на неї впливають або схильні до впливу з боку системи. Таким чином, довкілля - це усе те, що знаходиться поза системою і забезпечує необхідні умови її існування та розвитку.

Довкілля і система завжди знаходяться в єдності і взаємодії. Взаємодія системи з середовищем здійснюється за допомогою входів (вхідних полюсів) і виходів (вихідних полюсів) системи (рис. 1.2). Середовище впливає на систему через входи. Входи системи бувають речовими, енергетичними та інформаційними. Через них у систему поступає речовина, енергія та інформація. Передача речовини, енергії та інформації з системи в середовище відбувається через виходи системи.

Рис. 1.2

Система, що не взаємодіє з довкіллям, називається закритою системою. Зазначимо, що серед цілеспрямованих систем закритих не зустрічається. У той же час у системних дослідженнях до закритих систем часто відносять системи, що слабо взаємодіють з довкіллям і використовують у процесі свого функціонування внутрішню інформацію. До таких систем належать деякі системи автоматичного регулювання.

На противагу закритим, відкриті системи завжди взаємодіють з довкіллям.

Зазначимо на закінчення, що поділ реального світу на систему і довкілля також є умовним. В одному випадку об'єкт може бути віднесений до системи, в іншому - до довкілля. Все залежить від міри деталізації даної системної задачі і цілей дослідження. З іншого боку, розгляд системи і середовища спільно носить принциповий характер, оскільки дозволяє вивчати систему у взаємодії з системами, що її оточують.

1.3. Моделювання систем

Безпосереднє дослідження властивостей реальних систем часто пов'язане зі значними труднощами. У той же час у більшості випадків властивості реальної системи можуть бути легко відтворені і досліджені за допомогою будь-якого іншого об'єкта. Відтворення властивостей досліджуваної системи за допомогою іншого об'єкта або системи складає суть моделювання систем.

У практиці системних досліджень розрізняють фізичне і математичне моделювання.

Фізичне моделювання полягає в тому, що реальна система замінюється моделлю, яка має ту саму фізичну природу, що і оригінал. При цьому, очевидно, фізичні процеси, що протікають у системі і її моделі, є подібними. Прикладами фізичного моделювання є моделювання польоту літака в аеродинамічній трубі, моделювання умов роботи бортової радіоелектронної апаратури в термо- і барокамерах та інші.

Перевагами фізичного моделювання є те, що, з одного боку, воно дозволяє провести дослідження процесів і систем, безпосередній аналіз яких ускладнений або неможливий, а з іншого боку, встановлювати залежність між різними параметрами системи шляхом безпосередніх вимірів. Оскільки при фізичному моделюванні немає необхідності зберігати такі характеристики системи, як вагу, розміри, швидкості протікання деяких процесів та інші, це дозволяє отримати істотний виграш у вартості і часі проведення досліджень.

Математичне моделювання полягає в тому, що реальній системі ставиться у відповідність деякий математичний об'єкт, дослідження якого математичними методами дозволяє судити про властивості і поведінку системи. Такими об'єктами можуть виступати рівняння, нерівності, матричні співвідношення, алгоритми тощо. Вибір математичного об'єкта для опису системи рівнозначний побудові її математичної моделі.

Побудова математичної моделі розпочинається зі змістовного опису системи, в якому встановлюється сукупність параметрів і характеристик системи, характер залежностей між ними, вплив різних факторів на процес функціонування системи. Тут же формулюється задача дослідження і вказується перелік досліджуваних величин і залежностей. Оскільки математична модель не може адекватно відобразити реальну систему, у процесі змістовного опису враховуються лише найбільш суттєві властивості системи та ігноруються другорядні.

Далі проводиться формалізація, тобто безпосередня побудова математичної моделі.

Математичні моделі бувають двох видів: аналітичні та імітаційні.

Для аналітичних моделей характерне те, що процеси функціонування системи виражаються у вигляді функціональних співвідношень, що зв'язують ті або інші параметри системи.

У тих випадках, коли дослідження системи за допомогою аналітичної моделі призводить до отримання явних залежностей, що зв'язують різні параметри або характеристики системи, або приведення рівнянь до вигляду, для якого розв’язки відомі, або оцінки граничних значень параметрів, розв’язання задачі дослідження можна вважати якнайповнішим.

На жаль, явне розв’язання задачі дослідження системи за допомогою аналітичної моделі вдається отримати лише для порівняно простих систем. З їх ускладненням ускладнюються і співвідношення, що становлять математичну модель.

Проте під час дослідження навіть складних систем все ж таки намагаються використати аналітичну модель для отримання розв’язку в явному вигляді. Це досягається шляхом умисного відступу від первинної моделі, її спрощення. Такий підхід дозволяє порівняно легко отримати хоча і грубі, наближені, але цілком прийнятні для оцінок результати, які потім можуть уточнюватися іншими методами.

Якщо аналітична модель у силу її складності не дозволяє отримати розв’язок у явному вигляді, можна перейти до використання чисельних методів. Зміст роботи при чисельному дослідженні системи залишається в основному тим самим, що і у разі пошуку явного розв’язку, оскільки і в тому, і в іншому випадку основою досліджень є аналітична модель системи. Різниця полягає в тому, що розв’язання систем рівнянь, нерівностей і так далі здійснюється наближено за допомогою програмних методів.

Чисельні методи дозволяють розширити коло завдань дослідження систем. Проте і вони часто виявляються безсилими під час розгляду дуже складних систем. Більш того, у ряді випадків математична модель є співвідношеннями, що характеризують розвиток процесу функціонування системи в часі, причому перетворити ці співвідношення в сукупність рівнянь, що зв'язують параметри системи, надзвичайно важко. Тут на допомогу приходять імітаційні моделі.

Суть імітаційного моделювання полягає в тому, що за допомогою спеціального алгоритму відтворюється сам процес функціонування системи. Так, наприклад, можна скласти програму, яка імітуватиме процес. Вводячи різні початкові дані, можна визначати відповідну реакцію системи. Таким чином, імітаційне моделювання можна порівняти з натурним експериментом, проте при цьому немає необхідності будувати саму систему або її фізичну модель.

Для імітаційного моделювання розробляється спеціальний моделюючий алгоритм.

Імітаційні моделі порівняно з аналітичними дають можливість дослідження систем дуже високої складності. У цьому полягає їх основна перевага, яка обумовлює широке застосування імітаційного моделювання на практиці. Окрім того, в імітаційній моделі порівняно легко ув'язуються елементи різної фізичної природи, відображаються різноманітні зв'язки між ними, враховується велика кількість факторів дії середовища на систему і системи на середовище. При цьому моделювання випадкових дій не зустрічає особливих ускладнень.

На закінчення зазначимо, що питання про вибір моделі вирішується у кожному конкретному випадку дослідження системи. Для одних систем добрі результати дають аналітичні моделі, для інших - імітаційні. Не виключається і одночасне використання обох видів моделей. Доповнюючи один одного, вони дозволяють істотно розширити можливості дослідника.

1.4. Математична модель динамічної системи

Незважаючи на те, що на практиці дослідження системи припускає побудову конкретної математичної моделі, існує широкий клас систем, який може бути описаний моделлю в найзагальнішій формі.

Перш ніж перейти до розгляду цієї моделі, зупинимося на загальних припущеннях про характер функціонувань системи.

1. Будь-яка система функціонує в часі. Сукупність моментів часу t, в яких розглядається робота системи, утворює множину T. Множина T є підмножиною множини R дійсних чисел.

2. У будь-який момент часу t система знаходиться в одному з можливих станів.

Стан системи описується за допомогою деякої множини величин, що характеризують систему, - параметрів. Кількість параметрів може бути дуже великою. Тому на практиці для опису системи використовують лише найбільш суттєві, характерні для неї параметри, що відповідають конкретним цілям вивчення системи.

Позначимо істотні параметри системи через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Якщо ці параметри незалежні, то будь-який стан системи може бути поданий у вигляді вектора в n-мірному просторі, координатними осями якого служать $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Цей простір X називається простором станів або фазовим простором. Таким чином, у будь-який момент часу t стан системи є вектором

$$\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)).$$

Нехай у момент часу t_0 стан системи характеризується вектором $\overline{x}(t_0)$. На рис. 1.3 показано положення вектора $\overline{x}(t_0)$ в тримірному просторі станів. Якщо впродовж інтервалу часу (t_0, t_1) система змінила свій стан, то у момент часу t_1 вектор приймає положення $\overline{x}(t_1)$. При цьому кінець вектора описує в просторі станів лінію, що називається фазовою траєкторією.

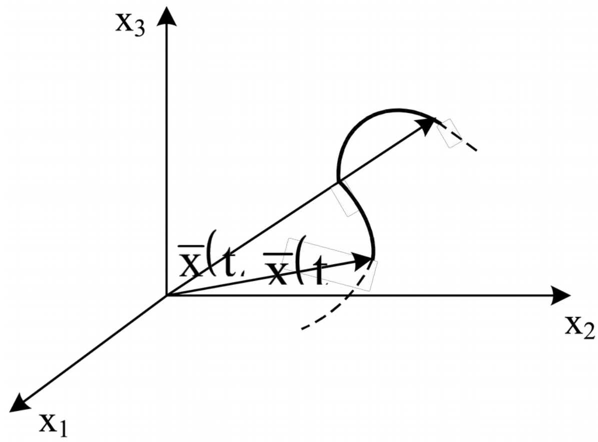

Рис. 1.3

Розглянуті поняття дозволяють ввести визначення динамічної системи.

Динамічною системою називається така система, яка впродовж інтервалу часу функціонування переходить від одного стану до іншого.

Якщо впродовж часу функціонування система не змінює свій стан, вона є статичною системою. Очевидно, для статичної системи фазова траєкторія є точкою у просторі станів.

Значення параметрів системи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, як правило, обмежені. Та область простору станів, в якій може знаходитися кінець вектора станів, називається областю допустимих станів системи. Під час дослідження систем розглядається тільки область допустимих станів.

3. Зміна станів системи відбувається під впливом як внутрішніх, так і зовнішніх дій. Внутрішні дії обумовлені процесами, що протікають усередині системи.

Зовнішні дії обумовлені впливом середовища на систему і тому є для системи вхідними діями. Усі вхідні дії можна розділити на два види: керуючі дії і збурювальні дії.

Керуючі дії - це дії, які цілеспрямовано змінюють стан системи.

Зазначимо, що в загальному випадку керуючі дії розглядаються не в окремі моменти часу, а на деякому інтервалі часу.

Керуючі дії подаються у вигляді вектора в l-мірному просторі U, який називається простором керуючих дій:

$$\bar{u}_{t_0}(t) = \left(u_{1,t_0}(t), u_{2,t_0}(t), \ldots, u_{l,t_0}(t)\right).$$

Запис $\bar{u}_{t_0}(t)$ означає, що керуюча дія розглядається на інтервалі часу (t_0, t_1).

Збурювальними діями називаються дії, які змінюють стан системи випадковим, непередбачуваним чином. Як правило, збурювальні дії є перешкодою у досягненні системою поставленої мети.

Збурювальні дії в загальному випадку також можна подати у вигляді вектора в q-мірному просторі Ξ, який є простором збурених дій:

$$\bar{\xi}_{t_0}(t) = \left(\xi_{1,t_0}(t), \xi_{2,t_0}(t), \ldots, \xi_{q,t_0}(t)\right).$$

Зазначимо, що збурювальні дії можуть мати і внутрішнє походження. Проте надалі внутрішні дії ми враховувати не будемо, вважаючи, що вони завжди можуть бути приведені до еквівалентних зовнішніх дій.

4. Система, змінюючи свій стан під впливом вхідних дій, у свою чергу впливає на довкілля. Ці впливи проявляються у вигляді вихідних дій.

Вихідні дії подаються у вигляді вектора в p-мірному просторі Y, який називається простором вихідних дій:

$$\bar{y}_{t_0}(t) = \left(y_{1,t_0}(t), y_{2,t_0}(t), \ldots, y_{p,t_0}(t)\right).$$

Так само як і вхідні, вихідні дії розглядаються на інтервалі часу (t_0, t_1).

Поняття стану, вхідних і вихідних дій дозволяють зображувати динамічну систему у вигляді, поданому на рис. 1.4.

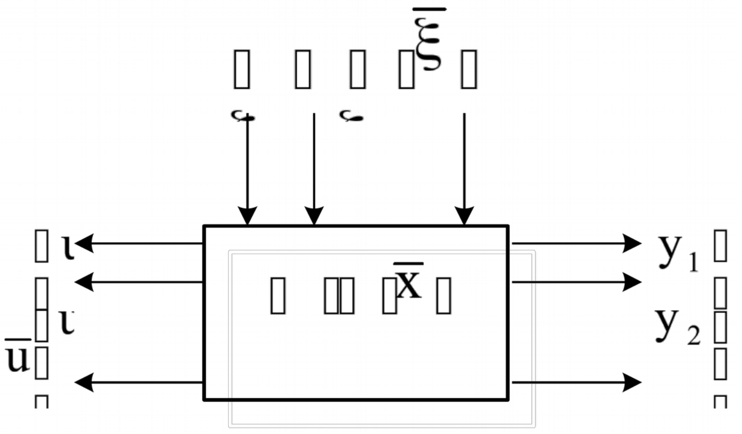

Рис. 1.4

Отже, динамічна система характеризується тим, що в процесі свого функціонування вона змінює свій стан. Послідовність змін стану системи називається рухом системи.

Нехай у деякий момент часу t_0 система знаходилася в стані $\bar{x}(t_0)$, який ми назвемо початковим станом. Оскільки система є динамічною, у момент часу t її стан змінюється і набуває значення $\bar{x}(t)$. Таким чином, впродовж інтервалу часу (t_0, t_1) відбувається перехід системи зі стану $\bar{x}(t_0)$ у стан $\bar{x}(t)$. Цей перехід (перетворення стану) здійснюється згідно з деяким правилом, яке називається оператором перетворення. Позначимо оператор перетворення $\bar{x}(t_0)$ в $\bar{x}(t)$ через F і вважатимемо, що вид цього оператора відомий.

З іншого боку, перехід системи зі стану $\bar{x}(t_0)$ у стан $\bar{x}(t)$ відбувається під впливом вхідної дії $\bar{u}_{t_0}(t)$ (збурювальні дії ми доки розглядати не будемо).

Тоді залежність між станом $\bar{x}(t)$, початковим станом $\bar{x}(t_0)$ і вхідною (керуючою) дією $\bar{u}_{t_0}(t)$ можна записати таким чином:

$$\bar{x}(t) = F\left[\bar{x}(t_0), \bar{u}_{t_0}(t)\right]. \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) називається рівнянням стану динамічної системи, а оператор F - оператором переходів.

Зміна стану системи під впливом вхідної дії призводить до зміни вихідної дії. Позначимо оператор цього перетворення через G, також вважаючи, що він відомий. Тоді можна записати:

$$\bar{y}_{t_0}(t) = G\left[\bar{x}(t_0), \bar{u}_{t_0}(t)\right]. \quad (1.2)$$

Рівняння (1.2) називається рівнянням виходу динамічної системи, а оператор G - оператором виходів.

Рівняння стану і рівняння виходу складають узагальнену математичну модель динамічної системи.

Під час виведення рівнянь (1.1) і (1.2) ми припустили, що оператори F і G відомі в тому сенсі, що вони здійснюють невипадкові перетворення. Окрім того, збурювальні дії, що зазвичай мають випадковий характер, не враховувалися.

Якщо оператор здійснює випадкові перетворення, він називається стохастичним оператором. Урахування стохастичних операторів, а також випадкових збурювальних дій приводить до такої математичної моделі динамічної системи:

$$\bar{x}(t) = \tilde{F}\left|\bar{x}(t_0), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right|, \tag{1.3}$$

$$\bar{y}(t) = \tilde{G}\left|\bar{x}(t_0), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right|, \tag{1.4}$$

де $\tilde{F}$ і $\tilde{G}$ - стохастичні оператори.

Системи, що описуються моделлю (1.1) і (1.2), належать до класу детермінованих, а моделлю (1.3) і (1.4) - до класу стохастичних динамічних систем.

Як вже підкреслювалося вище, клас систем, що описуються моделлю (1.1) і (1.2) або (1.3) і (1.4), великий, у силу чого ці моделі носять досить загальний характер. Конкретизація операторів F і G (чи $\tilde{F}$ і $\tilde{G}$) приводить до математичних моделей конкретних систем. У той же час навіть у такому загальному вигляді моделі (1.1)-(1.2) і (1.3)-(1.4) мають принципове значення, оскільки встановлюють причинно-наслідкові співвідношення між станом системи, вхідними і вихідними діями.

1.5. Суть керування системами

З розглянутої вище математичної моделі динамічної системи випливає, що процес її функціонування полягає в послідовній зміні станів під впливом вхідних дій. При цьому одні дії цілеспрямовано змінюють стани системи, а інші - прагнуть завадити цьому. У той же час будь-яка цілеспрямована система призначена для виконання будь-яких задач, для досягнення певної мети. Забезпечення виконання задач, поставлених перед системою, здійснюється за допомогою керування.

Говорячи про керування, слід мати на увазі такі обставини. По-перше, як вже зазначалося, керування припускає наявність цілі, причому ціль виступає як найважливіша характеристика керування. Безцільні перетворення не є керуванням, вони позбавлені будь-якого змісту. Безглуздо говорити про процеси керування в системі, утвореній сукупністю молекул газу в замкнутому об'ємі, хоча вона безперервно змінює свій стан. Рух системи в наявності, але він хаотичний.

Під метою керування слід розуміти той кінцевий результат, на досягнення якого спрямована дія.

По-друге, управляти можна системою, яка має більш ніж один стан. Власне кажучи, керування і є цілеспрямованою зміною станів системи, яка призводить до бажаної цілі. Оскільки зміна станів з часом відбувається тільки в динамічних системах, можна говорити про керування тільки динамічними системами.

Нарешті, зазначимо, що керування полягає у виборі таких керуючих дій, які змінюють стани системи у бажаному напрямі. Отже, керування можливо тільки тими системами, на які можна тим або іншим чином цілеспрямовано впливати.

З усього вищевикладеного випливає, що керування можливе за наявності щонайменше двох об'єктів, один з яких здійснює дію на інший, змінюючи його стани відповідно до мети керування. Надалі об'єкт, що забезпечує зміну станів іншого об'єкта відповідно до мети керування, називатимемо керуючим органом (КО). Той об'єкт, стан якого змінюється під впливом керуючого органу, назвемо об'єктом керування (ОК).

Введені поняття керуючого органу і об'єкта керування дозволяють сформулювати таке визначення керування.

Керуванням називається сукупність дій керуючого органу, який призначений для забезпечення виконання об'єктом керування поставленої цілі.

На кожному циклі керування можна виділити такі елементи процесу керування:

- отримання керуючим органом інформації про цілі і задачі керування (як правило, ця інформація є зовнішньою інформацією);

- збір керуючим органом інформації про стан об'єкта керування і виконані ним дії (інформації стану);

- аналіз отриманої інформації і ухвалення рішення;

- формування керуючих дій і передача їх об'єкту керування;

- виконання об'єктом керування дій у відповідності з отриманою командною інформацією.

Слід зазначити, що не кожен процес керування включає перераховані елементи. Так, наприклад, під час реалізації програмного керування керуючий орган не отримує інформацію про стан об'єкта керування, не приймає рішення. Рішення про те, що належить робити об'єкту керування, закладене у вигляді програми, відповідно до якої керуючий орган й формує керуючі дії.

Дамо математичне трактування процесу керування. Вище було зазначено, що керування є цілеспрямованою зміною станів об'єкта керування. Оскільки об'єкт керування є динамічною і, в загальному випадку, стохастичною системою, його рівняння стану, як відомо, має вигляд

$$\bar{x}(t) = \tilde{F}\left|\bar{x}(t_0), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right|.$$

З цього виразу випливає, що цілеспрямована зміна станів системи здійснюється за допомогою керуючих дій $\bar{u}_{t_0}(t)$. Якщо є можливість вибору $\bar{u}_{t_0}(t)$ з безлічі U, зміну станів можна вести у бажаному для досягнення мети напрямі.

Отже, керування - це вибір такого вектора $\bar{u}_{t_0}(t)$ з безлічі (простору керуючих дій) U, за умови якого система переходить із стану $\bar{x}(t_0)$ у стан $\bar{x}(t)$ відповідно до поставленої цілі.

З огляду на те, що керування трактується як вибір $\bar{u}_{t_0}(t)$ з безлічі U, цей вибір може бути неоднозначним. Іншими словами, поставленої мети керування можна досягти різними шляхами, тобто вибираючи різні вектори $\bar{u}_{t_0}(t)$. Виникає питання, який же з векторів $\bar{u}_{t_0}(t)$ забезпечує краще, порівняно з іншими векторами, керування? Очевидно, відповісти на нього можна у тому випадку, якщо досягнутому результату можна дати кількісну оцінку.

Оскільки в процесі керування об'єкт керування переходить з початкового в кінцевий стан під впливом $\bar{u}_{t_0}(t)$, то кількісна оцінка повинна залежати від $\bar{x}(t_0)$, $\bar{x}(t)$, $\bar{u}_{t_0}(t)$ і в загальному випадку, від вектора збурювальних дій $\bar{\xi}_{t_0}(t)$.

У загальному випадку кількісна оцінка керування визначається функціоналом

$$I = \Phi\left[\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right]. \tag{1.5}$$

Тоді задачу керування можна визначити як вибір таких керуючих дій $\bar{u}_{t_0}(t)$, за умови яких функціонал (1.5) набуває екстремального (мінімального або максимального) значення, тобто

$$\begin{aligned} I_{opt} &= \underset{\bar{u}\in U}{\mathrm{extr}}\, \Phi\left[\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right] = \\ &= \Phi\left[\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}^{*}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Керуюча дія $\bar{u}^{*}_{t_0}(t)$, при якій функціонал (1.5) набуває екстремального значення, називається оптимальним керуванням.

Природно, що під час здійснення керування безліч U має бути відомою. Тільки в цьому випадку можна здійснювати цілеспрямований вибір керуючих дій. Задача визначення безлічі U в теорії керування називається задачею керованості.

Математично задача керованості формулюється таким чином. Нехай керована система (об'єкт керування) описується рівнянням стану (1.3), і задано інтервал часу (t_0, t_1), впродовж якого здійснюється керування. Необхідно знайти усі керуючі дії $\bar{u}_{t_0}(t_1)$, які переводять систему з початкового $\bar{x}(t_0)$ у кінцевий $\bar{x}(t_1)$ стан. Якщо знайдеться хоч би одна така керуюча дія, говорять, що система керована. Очевидно, розв’язання задачі керованості при відомих $\bar{x}(t_1)$ і $\bar{x}(t_0)$ полягає в розв’язанні рівняння (1.3) відносно $\bar{u}_{t_0}(t)$.

У ряді випадків необхідно розв’язувати задачу визначення початкового стану системи при відомому кінцевому стані або, в загальному випадку, вихідній дії (реакції) системи. Така задача називається задачею спостережуваності. Надамо математичне формулювання задачі спостережуваності. Нехай керована система описується рівнянням стану (1.3) і рівнянням виходу (1.4). При відомих $\bar{x}(t_1)$ або $\bar{y}_{t_0}(t_1)$ необхідно визначити початковий стан системи $\bar{x}(t_0)$, з якого за інтервал часу (t_0, t_1) система перейде в $\bar{x}(t_1)$ під впливом керуючої дії $\bar{u}_{t_0}(t)$.

З рівнянь (1.3) і (1.4) випливає, що

$$\bar{x}(t_0) = \tilde{F}^{-1}\left|\bar{x}(t_1), \bar{u}_{t_0}(t_1), \bar{\xi}_{t_0}(t_1)\right|;$$
$$\bar{x}(t_0) = \tilde{G}^{-1}\left[\bar{y}_{t_0}(t_1), \bar{u}_{t_0}(t_1), \bar{\xi}_{t_0}(t_1)\right],$$

де $\tilde{F}^{-1}; \tilde{G}^{-1}$ - зворотні оператори.

Розв’язуючи одно з цих рівнянь, можна розв’язати задачу спостережуваності.

На практиці в аналітичному виді вказані рівняння вдається розв’язати далеко не завжди. Проте принцип «зворотного рахування» отримав поширення і з успіхом використовується для розв’язання цілого ряду задач оптимального керування.

1.6. Види керування

Повернемося до основних рівнянь (1.3) і (1.4) динамічної системи. Зазвичай, до здійснення керування намагаються отримати якомога більше інформації про оператора $\tilde{F}$ і збурювальні дії $\bar{\xi}_{t_0}(t_1)$. Узагальнення цієї, так званої апріорної, інформації дозволяє визначити апріорні значення F_a і $\bar{\xi}_{a,t_0}(t)$.

Отже, у процесі функціонування системи реальні значення $\tilde{F}$ і $\bar{\xi}_{t_0}(t)$ відрізняються від апріорних значень F_a і $\bar{\xi}_{a,t_0}(t)$. Ці відмінності можуть бути враховані у вигляді таких формальних стосунків:

$$\tilde{F} = F_a \oplus \Delta F; \tag{1.7}$$
$$\bar{\xi}_{t_0}(t) = \bar{\xi}_{a,t_0}(t) \oplus \Delta\bar{\xi}_{t_0}(t). \tag{1.8}$$

Тут знак $\oplus$ означає довільну композицію операторів і векторів, яка в окремому випадку може бути і звичайною сумою, а ΔF і $\Delta\bar{\xi}_{t_0}(t_1)$ характеризують міру відмінності реальних і апріорних значень.

Залежно від того, наскільки реальні значення відрізняються від апріорних, розрізняють такі види керування: програмне керування, керування зі зворотним зв'язком і комбіноване керування.

Розглянемо випадок, коли впливом ΔF і $\Delta\bar{\xi}_{t_0}(t_1)$ можна нехтувати, тобто прийняти

$$\tilde{F} \approx F_a, \tag{1.9}$$

$$\bar{\xi}_{t_0}(t) \approx \bar{\xi}_{a,t_0}(t).$$

Тоді, розв’язавши рівняння

$$I_{opt} = \underset{\bar{u}\in U}{\mathrm{extr}}\,\Phi\left[\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{a,t_0}(t)\right], \tag{1.10}$$

або з урахуванням рівнянь (1.3) і (1.9)

$$I_{opt} = \underset{\bar{u}\in U}{\mathrm{extr}}\,\Phi\left\{\bar{x}(t_0), F_a\left[\bar{x}(t_0), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{a,t_0}(t)\right], \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{a,t_0}(t)\right\}, \tag{1.11}$$

отримаємо програму формування керуючої дії $\bar{u}^*_{t_0}(t)$ на інтервалі часу (t_0, t_1). Керування, здійснюване за цією програмою, і буде програмним керуванням.

Характерною особливістю програмного керування є те, що під час керування інформація про поточний стан об'єкта керування не використовується. У процесі розв’язання рівнянь (1.10) або (1.11) враховуються тільки початковий і кінцевий (бажаний) стан ОК.

Оскільки програмне керування вимагає тільки передачі керуючих дій від керуючого органу до об'єкта керування, воно реалізується в системі, структурна схема якої показана на рис. 1.5. Система складається з керуючого органу і об'єкта керування, сполучених між собою зв'язком, за яким здійснюється передача керуючих дій. Така система називається розімкненою системою керування, а зв'язок між КО і ОК - прямим зв'язком. Очевидно, у розімкнених системах реалізуються не усі елементи процесу керування, про що згадувалося раніше.

У тому випадку, коли вплив ΔF і $\Delta\overline{\xi}_{t_0}(t_1)$ істотний і ними нехтувати не можна, розв'язок рівнянь (1.10) або (1.11) отримати не вдається. У цих умовах не залишається нічого іншого, як формувати керуючі дії залежно від поточного стану об'єкта керування. Це досягається використанням зворотного зв'язку, який служить для передачі інформації про стан об'єкта керування і виконані ним дії керуючому органу.

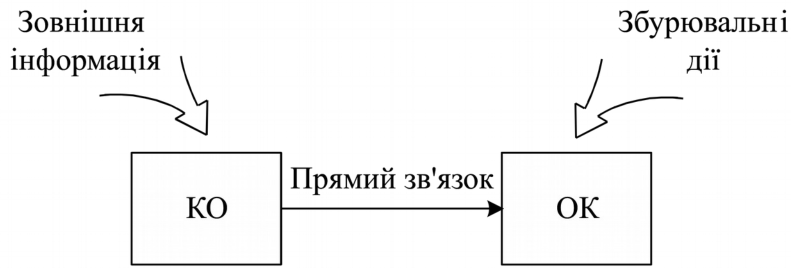

Рис. 1.5

Система, що реалізує керування зі зворотним зв'язком, називається замкнутою системою керування. Структурна схема такої системи подана на рис. 1.6. Зазначимо, що в замкнутій системі процес керування містить усі вище перелічені елементи.

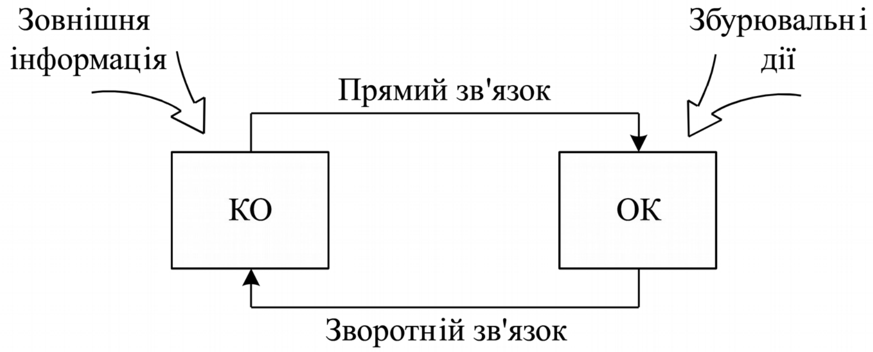

Рис. 1.6

Що стосується комбінованого керування, то воно об'єднує в одній системі і програмне керування, і керування зі зворотним зв'язком.

Подання системи керування у вигляді сукупності керуючого органу і об'єкта керування, взаємозв'язаних між собою за допомогою прямого і зворотного зв'язку, дозволяє провести таку класифікацію систем керування.

Якщо роль керуючого органу системи керування виконує автомат, то така система називається системою автоматичного керування.

У тому випадку, якщо в системі функції керування розподілені між людиною і автоматом, така система називається автоматизованою системою керування. Іноді автоматизовану систему керування називають системою «людина-машина».

Автоматичні системи керування в переважній більшості випадків належать до чисто технічних систем, хоча бувають і виключення. Надалі автоматичні системи ми розглядатимемо в технічному аспекті.

Автоматизовані системи керування (АСК) є складними людино-машинними системами, призначеними для керування складними об'єктами. Основна мета створення АСК – підвищити ефективність керування шляхом автоматизації процесів збору, обробки і передачі інформації, формування керуючих дій, тобто усіх тих елементів, з яких складається процес керування. Участь людини полягає в тому, що вона і тільки вона приймає рішення і несе за них відповідальність.

Автоматизовані системи керування можуть виконувати функції керування як технологічними процесами, так і організаційними системами. Перші мають справу з технологічними процесами в широкому сенсі слова, другі - з колективами людей.

1.7. Керування в технічних системах

У технічних системах керуючим органом і об'єктом керування виступають різні технічні пристрої. Як вже підкреслювалося вище, у переважній більшості випадків такі системи є системами автоматичного керування, оскільки керування здійснюється без безпосередньої участі людини. Роль людини полягає в тому, щоб спроектувати систему керування, побудувати її, відрегулювати, задати певну програму роботи, здійснювати, у випадку необхідності, ремонт системи, її переналагодження і так далі.

Системи автоматичного керування знаходять дуже широке застосування на практиці. Особливо важливими є такі системи там, де час реакції людини на зміну стану об'єкта керування незмірно більше від самого часу зміни стану і там, де керування здійснюється в умовах, в яких людина або взагалі не може знаходитися, або її перебування пов'язане зі значною небезпекою для життя або шкідливе для здоров'я.

Під час програмного керування керуючий орган технічної системи формує керуючі дії за наперед заданою програмою. Такий вид керування є відносно простим, тому надалі основна увага буде приділена технічним системам, що реалізують керування зі зворотним зв'язком.

Під час керування зі зворотним зв'язком, як відомо, інформація про стан об'єкта керування передається керуючому органу по каналу зворотного зв'язку. У технічних системах безпосередньо інформацію про стан об'єкта керування частіше отримати не вдається. Проте з огляду на те, що між станом об'єкта керування і вихідною дією існують причинно-наслідкові зв'язки (у процесі зміни стану змінюється і вихідна дія), вказану інформацію можна отримати, спостерігаючи вихідні дії. Тому в технічних системах керування зі зворотним зв'язком реалізується по виходу об'єкта керування.

Ціль керування задаватимемо тією вихідною дією $\overline{y}_{t_0}^{э}(t_1)$, яку бажано отримати в результаті керування за інтервал часу (t_0, t_1).

Об'єкт керування як динамічна система описується рівнянням стану

$$\overline{x}(t) = \widetilde{F}_{оу}\left|\overline{x}(t_0), \overline{u}_{t_0}(t), \overline{\xi}_{t_0}(t)\right| \tag{1.12}$$

і рівнянням виходу

$$\overline{y}_{t_0}(t) = \widetilde{G}_{оу}\left|\overline{x}(t_0), \overline{u}_{t_0}(t), \overline{\xi}_{t_0}(t)\right|, \tag{1.13}$$

де $\widetilde{F}_{оу}[\ ]$ і $\widetilde{G}_{оу}[\ ]$ - оператори переходів і виходів об'єкта керування.

Але і вихідна дія об'єкта керування $\overline{y}_{t_0}(t)$ не завжди може бути використана безпосередньо для здійснення керування. Тому за умови керування по виходу система керування в загальному випадку повинна містити вимірювальну підсистему, яка здійснює перетворення вихідних дій $\overline{y}_{t_0}(t)$ об'єкта керування. Очевидно, для вимірювальної підсистеми $\overline{y}_{t_0}(t)$ є вхідною дією. Оскільки вимірювальна підсистема є динамічною системою, для неї можна записати рівняння стану

$$v(t) = \widetilde{F}_u\left[\overline{v}(t_0), \overline{y}_{t_0}(t), \overline{v}_{t_0}(t)\right] \qquad (1.14)$$

і рівняння виходу

$$\overline{\eta}_{t_0}(t) = \widetilde{G}_u\left[\overline{v}(t_0), \overline{y}_{t_0}(t), \overline{v}_{t_0}(t)\right], \qquad (1.15)$$

де $\widetilde{F}_u[\ ]$ і $\widetilde{G}_u[\ ]$ - відповідно оператори переходів і виходів вимірювальної підсистеми;

$\overline{v}(t_0)$ і $\overline{v}(t)$ - вектори початкового і поточного станів;

$\overline{\eta}_{t_0}(t)$ - вектор вихідної дії;

$\overline{v}_{t_0}(t)$ - вектор збурювальних дій, що впливають на вимірювальну підсистему за умови перетворення $\overline{y}_{t_0}(t)$ в $\overline{\eta}_{t_0}(t)$.

Ціль керування, як вже зазначалося вище, задається у вигляді $\overline{y}^e_{t_0}(t)$. Але з огляду на те, що вимірювальна підсистема перетворює $\overline{y}_{t_0}(t)$ в $\overline{\eta}_{t_0}(t)$, бажано і ціль керування задавати в просторі вихідних дій вимірювальної підсистеми. Це можна зробити, скориставшись функціональним перетворенням

$$\overline{\eta}^e_{t_0}(t) = f\left[\overline{y}^e_{t_0}(t)\right]. \qquad (1.16)$$

Тоді суть автоматичного керування зі зворотним зв'язком по виходу полягає в тому, що виміряне значення $\overline{\eta}_{t_0}(t)$ вихідної дії об'єкта керування порівнюється з його бажаним значенням $\overline{\eta}^э_{t_0}(t)$, фіксується значення помилки

$$\overline{\varepsilon}_{t_0}(t) = \overline{\eta}^э_{t_0}(t) - \overline{\eta}_{t_0}(t) \qquad (1.17)$$

і вибирається така керуюча дія $\overline{u}_{t_0}(t)$, яка мінімізує цю помилку.

Вибір керуючої дії $\overline{u}_{t_0}(t)$ можна трактувати як перетворення $\overline{\varepsilon}_{t_0}(t)$ в $\overline{u}_{t_0}(t)$ відповідно до заданого критерію оптимальності. Це перетворення здійснюється керуючим органом, який як динамічна система описується рівнянням стану

$$\overline{q}(t)=\widetilde{F}_{yo}\left[\overline{q}(t_0),\overline{\varepsilon}_{t_0}(t),\overline{\mu}_{t_0}(t)\right] \tag{1.18}$$

і рівнянням виходу

$$\overline{u}(t)=\widetilde{G}_{yo}\left[\overline{q}(t_0),\overline{\varepsilon}_{t_0}(t),\overline{\mu}_{t_0}(t)\right]. \tag{1.19}$$

Тут $\widetilde{F}_{yo}[\ ]$ і $\widetilde{G}_{yo}[\ ]$ - оператори переходів і виходів керуючого органу;

$\overline{q}(t_0)$ і $\overline{q}(t)$ - вектори початкового і поточного станів;

$\overline{\mu}_{t_0}(t)$ - вектор, що збурює дію.

Таким чином, сукупністю рівнянь (1.12)÷(1.19) є узагальнена математична модель системи автоматичного керування. Відповідно до цієї моделі структурна схема системи має вигляд, як на рис. 1.7. Відмітимо, що вимірювальна підсистема включається в ланцюг зворотного зв'язку системи автоматичного керування.

Автоматичному керуванню також може бути дана кількісна оцінка, яка випливає з узагальненої оцінки (1.5). Очевидно, вибір керуючих дій $\overline{u}_{t_0}(t)$ в умовах автоматичного керування цілком визначатиметься оператором $\widetilde{G}_{yo}$. З огляду на те, що керування здійснюється по виходу об'єкта керування, функціонал, що визначає кількісну оцінку, можна записати таким чином:

$$I=\Phi\left[\overline{u}_{t_0}(t),\overline{\xi}_{t_0}(t)\right]=\Phi\left[\widetilde{G}_{yo}(\ ),\overline{\xi}_{t_0}(t)\right]. \tag{1.20}$$

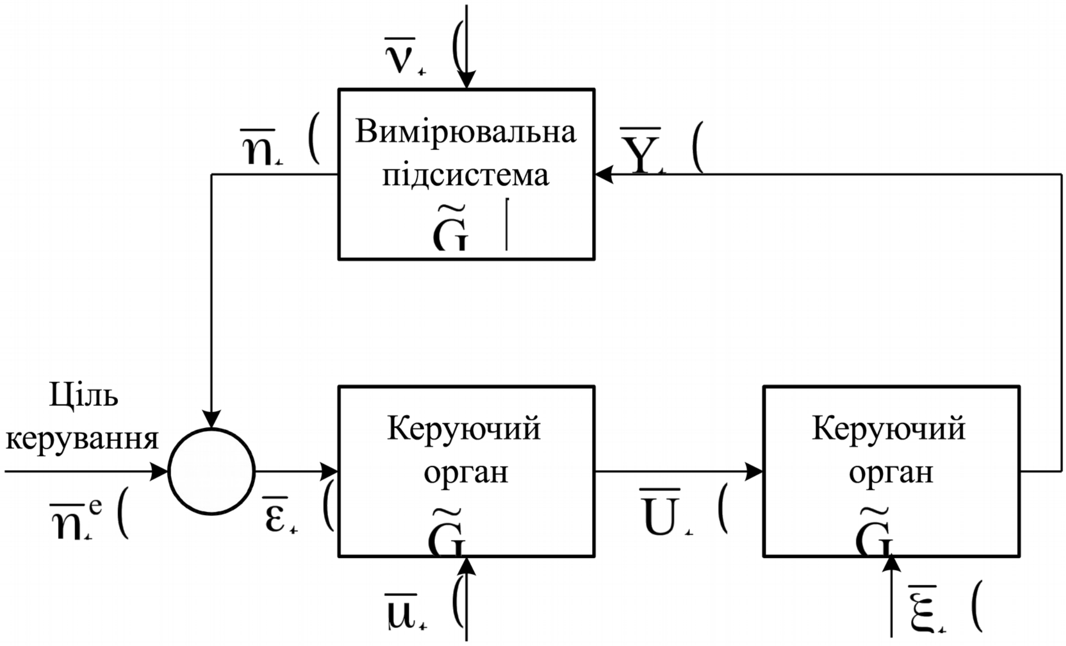

Рис. 1.7

Залежно від характеру розв'язуваних системою автоматичного керування задач, оператор $\widetilde{G}_{yo}(\cdot)$ в процесі функціонування системи може або залишатися незмінним, або змінюватися. Ці можливості закладаються у процесі проектування системи. У першому випадку система забезпечує стійкість або стану, або поведінки об'єкта керування. Другий випадок припускає зміну параметрів, по яких здійснюється керування, і навіть структури системи. У першому випадку оцінка (1.20) є єдиною, у другому - є сукупністю таких оцінок, що дозволяє оптимізувати систему.

Прикладом системи автоматичного регулювання є поширена в радіотехніці і техніці зв'язку система автоматичного підстроювання частоти, спрощена структурна схема якої показана на рис. 1.8.

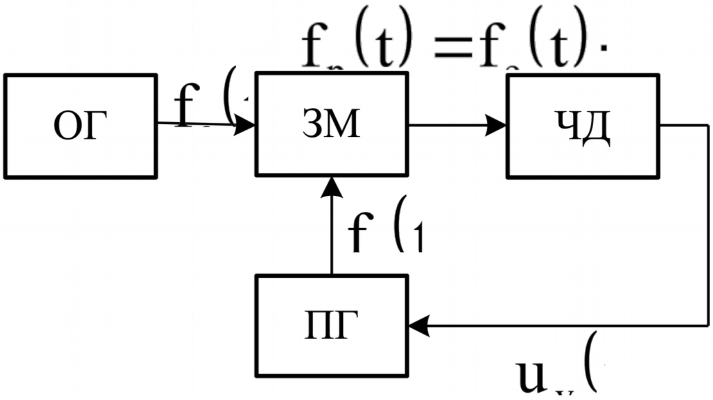

Рис. 1.8

Система містить високостабільний опорний генератор (ОГ), змішувач (ЗМ), частотний дискримінатор (ЧД) і генератор, що перестроюється (ПГ). Ціль керування у такій системі полягає в підтримці значення частоти генератора $f_г$, що перестроюється, близького до значення частоти високостабільного опорного генератора $f_е$.

Принцип роботи системи полягає в наступному. Напруга частоти $f_е(t)$ опорного генератора і частоти $f_г(t)$ генератора, що перестроюється, поступають на змішувач, де виділяється напруга різницевої частоти

$$f_р(t) = f_е(t) - f_г(t).$$

Ця напруга, у свою чергу, поступає на частотний дискримінатор, який залежно від величини і знака $f_р(t)$ формує керуючий сигнал $u_у(t)$. Типова залежність $u_у$ від різницевої частоти $f_р$, що називається дискримінаційною характеристикою, зображена на рис. 1.9. Впливаючи на перестроюваний генератор, керуючий сигнал забезпечує перебудову частоти ПГ так, щоб звести значення $f_р$ до нуля.

Таким чином, опорний генератор задає бажане значення частоти $f_е$ (у термінах узагальненої математичної моделі $\eta_е$). Змішувач у будь-який момент часу фіксує значення неузгодження $f_р$ (в узагальненій моделі ε) між частотами опорного і перестроюваного генератора. Частотний дискримінатор є керуючим органом у такій системі, оскільки на його виході формується керуючий сигнал $u_у$.

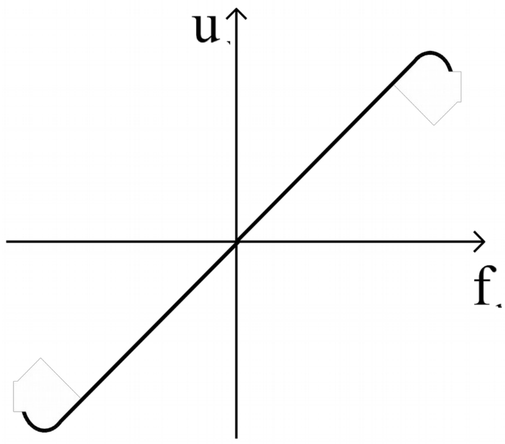

Рис. 1.9

У межах лінійної ділянки дискримінаційної характеристики залежність між $u_у$ і $f_р$ можна виразити співвідношенням

$$u_у(t) = kf_р(t), \tag{1.21}$$

яке є окремим випадком співвідношення (1.19). Отже, у даній системі оператор $\tilde{G}_{уо}$ є звичайною лінійною функцією.

Якість роботи системи автоматичного підстроювання частоти можна було б безпосередньо оцінити величиною $f_р$. Але в процесі роботи системи як різницева частота $f_р$, так і керуючий сигнал змінюються. Тому якість роботи такої системи прийнято оцінювати величиною середньоквадратичної помилки неузгодження:

$$I = \int_0^T \left[f_э(t) - f_г(t)\right]^2 dt = \int_0^T f_р^2(t)dt,$$

де T - час функціонування системи.

З урахуванням того, що

$$f_р(t) = \frac{1}{k}u_у(t) - k_1 u_у(t),$$

де $k_1 = \frac{1}{k}$, можна записати

$$I = \int_0^T k_1^2 u_y^2(t)dt \tag{1.22}$$

(цей вираз є окремим випадком виразу (1.20)).

Повернемося до виразу (1.20). Припустимо, що в процесі роботи системи є можливість вибору оператора $\widetilde{G}_{yo}$ з деякої безлічі $\{\widetilde{G}_{yo}\}$. Очевидно, різним операторам відповідатимуть різні значення оцінки I. Тоді, вибираючи відповідним чином оператор $\widetilde{G}_{yo}$ з безлічі $\{\widetilde{G}_{yo}\}$, можна добитися мінімального значення I, тобто оптимізувати систему.

Системи, в яких у процесі функціонування здійснюється пошук оптимального оператора $\widetilde{G}_{yo}$, називаються автоматичними системами оптимального керування. Для таких систем вибір оператора $\widetilde{G}_{yo}$ робиться відповідно до умови

$$I = \min_{\widetilde{G}_{yo} \in \{\widetilde{G}_{yo}\}} \Phi\left[\widetilde{G}_{yo}(\cdot), \overline{\xi}_{t_0}(t)\right] = \Phi\left[\widetilde{G}_{yoopt}(\cdot), \overline{\xi}_{t_0}(t)\right], \tag{1.23}$$

де $\widetilde{G}_{yoopt}(\cdot)$ - оптимальний оператор.

Задавальні дії $\overline{\eta}^e_{t_0}(t)$ в системах автоматичного керування можна розділити на три види: постійна дія, дія, що є деякою заданою функцією часу, і випадкова дія. Відповідно до цього розрізняють системи автоматичної стабілізації, системи програмного керування зі зворотним зв'язком, системи стеження (нагадаємо, що розглядається тільки керування зі зворотним зв'язком):

а) у системах автоматичної стабілізації

$$\overline{\eta}^e_{t_0}(t) = \overline{\eta}^e = \text{const}.$$

Це означає, що в таких системах ціллю керування є підтримка постійних значень компонент вектора $\overline{\eta}_{t_0}(t)$ поблизу $\overline{\eta}_e$. Незважаючи на дію збурень $\overline{\xi}_{t_0}(t)$ і зміну з плином часу оператора $\widetilde{G}_{yo}$, розглянута вище система автоматичного підстроювання частоти належить до систем стабілізації, де постійність f_e визначається високою стабільністю опорного генератора. До систем автоматичної стабілізації належать також різні стабілізатори струму і напруги живлення, система автоматичного регулювання посилення та інші.

Принцип роботи системи автоматичної стабілізації ілюструється рис. 1.10, а, де для простоти показані одномірні величини $\overline{\eta}^e$ і $\overline{\eta}_{t_0}(t)$;

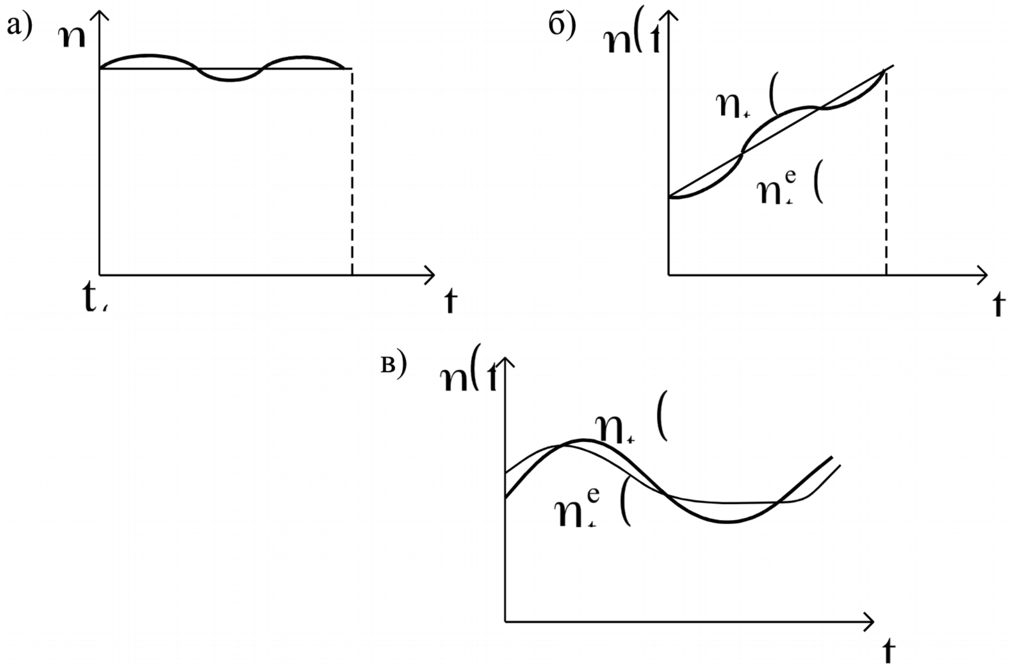

Рис. 1.10

б) системи програмного керування зі зворотним зв'язком відрізняються тим, що в якості $\overline{\eta}^e_{t_0}(t)$ задається відрізок вектор-функції заданої форми, наприклад функції (рис. 1.10, б), яка лінійно змінюється. У процесі роботи системи $\overline{\eta}_{t_0}(t)$ прагне повторити форму $\overline{\eta}^e_{t_0}(t)$. Роль зворотного зв'язку зводиться до контролю за тим, як об'єкт керування фактично реагує на керуючі дії. Інформація про фактичний стан об'єкта керування дозволяє своєчасно коригувати керуючі дії і тим самим зменшити помилку $\overline{\varepsilon}_{t_0}(t)$.

Системи програмного керування зі зворотним зв'язком широко використовуються для керування пуском електричних двигунів і генераторів і виведення їх у режим, що встановився, для керування літальними апаратами і в ряді інших випадків;

в) у системах стеження задавальна дія $\overline{\eta}^e_{t_0}(t)$ є відрізком випадкової вектор-функції (рис. 1.10, в). Задача системи стеження полягає в тому, щоб $\overline{\eta}_{t_0}(t)$ якомога менше відхилялося від $\overline{\eta}^e_{t_0}(t)$. У цьому випадку $\overline{\eta}_{t_0}(t)$ ніби «стежить» за випадковими змінами $\overline{\eta}^e_{t_0}(t)$, відтворює $\overline{\eta}^{e}_{t_0}(t)$ з певною точністю. Таким чином, вектор $\overline{\eta}_{t_0}(t)$ є автоматично отримуваною оцінкою вектора $\overline{\eta}^{e}_{t_0}(t)$.

Прикладами систем стеження є радіолокаційні станції автоматичного супроводу, пристрої синхронізації в системах передачі інформації та інші. До систем стеження також належать системи, у яких електричний сигнал відтворюється у вигляді механічного переміщення, або сервомеханізми.

На закінчення відмітимо, що стеження є найзагальнішим випадком автоматичного керування. І програмне керування зі зворотним зв'язком, і стабілізація випливають з принципу стеження за умови завдання конкретного виду $\overline{\eta}^{e}_{t_0}(t)$.

1.8. Керування організаційними системами

Під організаційними системами розуміємо такі системи, елементами яких є люди або колективи людей.

Керування в організаційних системах пов'язане з поняттям операції. Операція - це впорядкована сукупність дій колективу, пов'язаних взаємними стосунками і спрямованих на досягнення цілі або розв’язання поставленої задачі. Очевидно, керування організаційною системою передбачає керування операцією, здійснюваною цією системою. Але оскільки кожна організаційна система може мати не одну, а декілька цілей, і отже, здійснювати декілька операцій, керування організаційною системою завжди ширше, ніж керування однією конкретною операцією.

Організаційна система, що здійснює операцію, може бути представлена у вигляді двох підсистем: керуючої і керованої.

Керуюча підсистема виступає керуючим органом, а керована - у якості об'єкта керування.

Як і будь-яка інша динамічна система, організаційна система в кожен момент часу характеризується вектором станів, який, як і раніше, позначимо через $\overline{x}(t)$.

Поведінкою організаційної системи назвемо зміну її стану, наслідком якої є деякий результат. Але результат характеризує ту ціль або задачу, які були поставлені перед системою. Отже, поведінка системи завжди пов'язана з досягненням поставленої цілі. При здійсненні операцій разом зі зміною стану системи змінюється і стан середовища. Сукупність станів системи і середовища в один і той самий момент часу називається ситуацією.

Результатом операції називається ситуація, що склалася до моменту завершення операції. Звідси випливає, що ціль і задачі операцій, що проводяться системою, можна трактувати як бажані ситуації, до яких система повинна прийти в результаті здійснення операції.

Для проведення операції керуючий орган має в розпорядженні ресурси. Розподіляючи ресурси відповідним чином, керуючий орган може управляти операцією.

Стратегією керуючого органу назвемо спосіб використання або розподілу ресурсів впродовж усієї операції. Вибираючи ту або іншу стратегію, керуючий орган формує послідовність команд, які призводять до того або іншого розподілу ресурсів у ході здійснення операції.

З усього вищевикладеного випливає, що стратегія і керуюча дія тісно взаємопов'язані між собою. Кожній стратегії відповідає своя керуюча дія, яка призводить до використання відповідних ресурсів. Тому і стратегію, і керуючу дію на інтервалі (t_0, t_1) позначатимемо вектором $\bar{u}_{t_0}(t)$. Кількісно вектор $\bar{u}_{t_0}(t)$ характеризує ті ресурси, які використовуються в разі вибору відповідної стратегії.

Очевидно, ресурси, виділені на проведення операції, можна представити вектором $\bar{u}^{\circ}$. Ресурси, що витрачаються у ході операції відповідно до вибраної стратегії $\bar{u}_{t_0}(t)$, не повинні перевищувати виділених ресурсів. Це означає, що при здійсненні операції повинна виконуватися нерівність

$$\bar{u}_{t_0}(t) \leq \bar{u}^{\circ}. \tag{1.24}$$

Дія з боку середовища також змінює стан організаційної системи. При цьому в ряді випадків ця дія носить активний характер, характер протидії досягненню цілі системою навіть шляхом знищення частини її ресурсів. Відповідно до позначень, які прийняті раніше, назвемо дію $\bar{\xi}_{t_0}(t)$ стратегією середовища. Для середовища також справедливе обмеження

$$\bar{\xi}_{t_0}(t) \leq \bar{\xi}^{\circ}, \tag{1.25}$$

де вектор $\bar{\xi}^{\circ}$ можна трактувати як ресурси середовища, що виділяються з метою завадити проведенню операції.

Оскільки організаційна система є динамічною системою, то вона може бути описана рівнянням стану

$$\bar{x}(t) = \tilde{F}\left|\bar{x}(t_0), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right|, \tag{1.26}$$

де $\bar{u}_{t_0}(t)$ – стратегія (чи керування) системи;

$\bar{\xi}_{t_0}(t)$ - стратегія середовища.

Бажаний результат операції може бути досягнутий вибором тієї або іншої стратегії і того або іншого керування, що відповідає їй. З огляду на те, що при виборі стратегій існує свобода вибору, можна говорити про кращу або гіршу стратегію.

Кількісно результат використання стратегії $\bar{u}_{t_0}(t)$ оцінюється функціоналом

$$I = \Phi\left|\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right|. \tag{1.27}$$

На відміну від виразу (1.5) тут фігурують стратегії $\bar{u}_{t_0}(t)$ керуючого органу системи і $\bar{\xi}_{t_0}(t)$ середовища.

Оскільки ціллю операції є досягнення кінцевого стану $\bar{x}(t)$ впродовж інтервалу (t_0, t_1), то можна вибрати таку стратегію, а отже, і відповідне керування, при якому ціль операції буде досягнута оптимальним чином. Вибір стратегії здійснюється з умови

$$I_{opt} = \underset{\bar{u}_{t_0}(t)\in U}{\operatorname{extr}} \Phi\left|\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right| = \Phi\left|\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}^{*}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right|, \tag{1.28}$$

$$\bar{u}_{t_0}(t) \le \bar{u}^{\circ}.$$

Стратегія $\bar{u}^{*}_{t_0}(t)$, при якій функціонал Φ досягає екстремуму, називається оптимальною стратегією, а керування, що відповідає їй, - оптимальним керуванням.

Пошук екстремуму у виразі (1.28) означає процес вироблення і ухвалення рішення з вибору оптимальної стратегії. Право ухвалення рішення за умови проведення операції надається окремій людині або групі осіб, що керують проведенням операції. Надалі вважатимемо, що ухвалення рішення здійснює особа, що приймає рішення (ОПР), об'єднуючи під цією назвою як окремого керівника, так і групу осіб.

Якщо оператор $\tilde{F}$ і функціонал Φ мають формально-математичний опис, то вирази (1.26) і (1.27) є математичною моделлю операції. У цьому випадку оптимальна стратегія може бути отримана, наприклад, шляхом розрахунків на ЕОМ. Проте слід особливо підкреслити, що стратегія, визначена шляхом розрахунків, не є обов'язковою для ОПР при ухваленні рішення. У конкретних умовах виходячи з досвіду, знань, інтуїції ОПР може вибрати стратегію, що відрізняється від $\bar{u}^*_{t_0}(t)$ і є, на її думку, оптимальною. За прийняте рішення ОПР несе повну відповідальність. У той же час планування операції, тобто визначення $\bar{u}^*_{t_0}(t)$ або декількох альтернативних стратегій $\bar{u}_{t_0}(t)$ математичними методами, може надати істотну допомогу ОПР у виробленні обґрунтованого рішення.

Організаційна система певною мірою є самокерованою системою. Тому процес керування в організаційній системі, не виходячи з рамок загальних закономірностей, має характерні особливості.

На рис. 1.11 подана схема циклу керування організаційною системою. З неї випливає, що процес керування організаційною системою складається з таких етапів:

- збір даних про стан об'єкта (чи об'єктів) керування, про стан середовища, а також отримання зовнішньої інформації;
- постановка задачі;
- аналіз задачі і пошук альтернативних стратегій;
- прийняття рішення;
- доведення команд до об'єкта керування;
- виконання рішення об'єктом керування;
- аналіз і оцінка результату проведеної операції;
- розроблення рекомендацій на майбутнє.

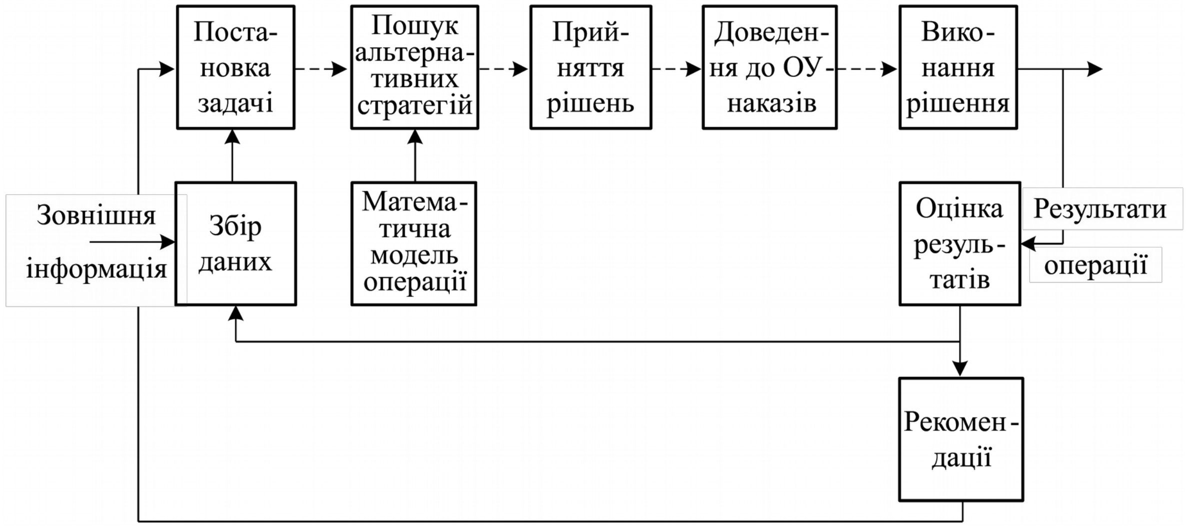

Рис. 1.11

Постановка задачі на проведення операції здійснюється після збору даних про стан об'єкта керування і середовища відповідно до бажання змінити ситуацію, що склалася, у потрібному напрямі.

Після постановки задачі проводиться її аналіз і пошук альтернативних стратегій. При цьому може бути використана математична модель операції і розраховані можливі стратегії і плани проведення операції. На цьому етапі широке застосування знаходять математичні методи обґрунтування рішень.

Наступним етапом є прийняття рішення. Рішення - це завжди вибір однієї з безлічі альтернативних стратегій відповідно до вибраного критерію. У разі прийняття рішення ОПР враховує усі альтернативні стратегії, у тому числі і отримані математичними методами.

Відповідно до прийнятого рішення на проведення операції формуються команди, які доводяться до об'єкта керування. Для передачі команд використовуються різні технічні засоби.

Виконання об'єктом керування рішення, прийнятого керівництвом і доведеного до об'єкта керування у вигляді команд, є здійсненням операції. При цьому середовище порушує бажаний плин операції.

Закінчення операції виражається кінцевим результатом. Результат підлягає оцінці, оскільки він відображує новий стан об'єкта керування. Оцінка враховується в разі постановки задачі на новий цикл керування.

За результатом проведення операції можуть бути дані рекомендації, які слід враховувати при проведенні подальших операцій. Ці рекомендації поповнюють знання, збагачують досвід керівництва. Тому в процесі керування організаційною системою відбувається самонавчання керуючого органу.

Слід підкреслити, що рішення пронизує всі етапи керування і є його головним фактором. І оцінка результату, і рекомендації нарешті спрямовані на те, щоб знайти правильне рішення при проведенні операції.

Враховуючи виняткову важливість етапу прийняття рішення, надалі зосередимо увагу на математичних методах, що дозволяють обґрунтувати продумані рішення в різних ситуаціях.

1.9. Математичні методи обґрунтування рішень

Прийняття рішення, як було підкреслено вище, полягає у виборі однієї з альтернативних стратегій $\overline{u}_{t_0}(t)$ з деякої безлічі допустимих стратегій, кожна з яких забезпечує бажаний результат операції. За умови вибору оптимальної стратегії ОПР керується, з одного боку, критерієм оптимальності, а з іншого - враховує різні фактори, що впливають на хід операції.

Усі фактори, що впливають на хід операції, можна розділити на три групи:

- ресурси;
- природні і технічні фактори;
- психологічні фактори.

У разі прийняття рішень фактори першої і другої груп піддаються кількісній оцінці. Це дозволяє використати різні математичні методи для обґрунтування рішення, що приймається. Математичні методи і моделі обґрунтування рішення, що приймається, складають предмет великого розділу прикладної математики - дослідження операцій.

Нині існує багато визначень дослідження операцій. Одно з них полягає в наступному: «Дослідження операції є науковим методом, що дає в розпорядження виконавчого органу кількісні підстави для ухвалення рішень з дії організацій, що знаходяться під його керуванням». Це визначення підкреслює ту обставину, що математичні методи дослідження операцій не дають готового рішення, а лише допомагають у процесі його вироблення. Інакше не може і бути, оскільки фактори третьої групи кількісній оцінці не піддаються, але мають істотний вплив на рішення, а отже, на увесь хід проведення операції.

При використанні математичних методів процес прийняття рішення можна розділити на такі етапи:

- побудова математичної моделі операції;
- пошук оптимального рішення;
- оцінка рішення;
- реалізація рішення.

Процесу прийняття рішення, як вже зазначалося вище, передує формулювання цілі операції.

Побудова математичної моделі операції передбачає визначення математичного вираження критерію оптимальності і встановлення обмежень. Модель будується з урахуванням факторів, що впливають на проведення операції. Вимоги до моделі суперечливі. З одного боку, у моделі необхідно враховувати якомога більше факторів, що дозволило б точніше описати реальну операцію. З іншого боку, велика кількість факторів, що враховуються, ускладнює модель, робить її незручною для практичного використання. Тому на практиці доводиться йти на компроміс між точністю і складністю моделі, враховуючи лише найбільш суттєві фактори.

Великий клас моделей дослідження операцій будується відповідно до виразів

$$I = \Phi\left|\bar{x}(t_0), \bar{x}(t), \bar{u}_{t_0}(t), \bar{\xi}_{t_0}(t)\right|,$$

$$\bar{u}_{t_0}(t) \le \bar{u}^{\circ},$$

$$\bar{\xi}_{t_0}(t) \le \bar{\xi}^{\circ}.$$

Математичне вираження для критерію оптимальності I називається цільовою функцією. Цим підкреслюється, що прагнення досягти екстремуму I є математичним відображенням цілі операції.

Обмеження є безліччю допустимих стратегій керуючого органу, які призводять до бажаного результату операції, і безліччю стратегій середовища. Оскільки вибір керуючим органом стратегії - це і є рішення, назвемо безліч допустимих стратегій областю допустимих рішень (ОДР).

Другий етап полягає в пошуку оптимального рішення (оптимальної стратегії). Для цього визначається алгоритм пошуку оптимального рішення. На цьому етапі широко використовуються математичні методи оптимізації. У результаті розв'язання задачі визначається та стратегія $\bar{u}^*_{t_0}(t)$ з безлічі допустимих, яка обертає в мінімум або максимум цільову функцію. Тут слід зазначити, що пошук максимуму цільової функції можна замінити пошуком мінімуму, якщо скористатися очевидним співвідношенням

$$\max_{\bar{u}\in U}\Phi(\bar{u}) = \min_{\bar{u}\in U}\left[-\Phi(\bar{u})\right], \tag{1.29}$$

яке для одномірної величини $\bar{u}$ ілюструється рис. 1.12.

З цього рисунка випливає, що максимум функції $\Phi(\bar{u})$ і мінімум функції $\Phi(\bar{u})$ досягаються при одному і тому самому значенні $\bar{u}^*$. Тому надалі, не порушуючи спільності, орієнтуватимемося на задачі мінімізації цільової функції.

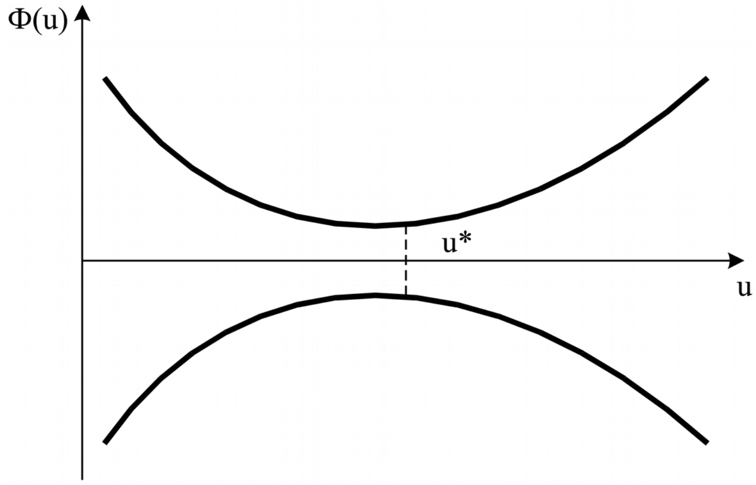

Рис. 1.12

На третьому етапі здійснюється оцінка стратегії $\bar{u}^*_{t_0}(t)$. Тут ОПР враховує і додаткові фактори, які не увійшли до математичної моделі, а саме фактори третьої групи. Урахування цих факторів може внести відповідні корективи у виборі стратегії. Не останню роль відіграють тут і суб'єктивні якості ОПР: знання, досвід, почуття відповідальності, воля, рішучість і так далі.

Усебічна і глибока оцінка $\overline{u}^{*}_{t_0}(t)$ призводить до ухвалення відповідного рішення.

Останній етап полягає в реалізації рішення. Після проведення операції ОПР оцінює правильність свого рішення за результатами операції.

Сукупність стратегії середовища визначає обстановку, у якій проводиться операція. Обстановка має істотний вплив на ухвалення рішення. Очевидно, і математичні методи обґрунтування рішення в різних умовах обстановки будуть різними. Залежно від характеру обстановки розрізняють:

- математичні методи обґрунтування рішень у задачах керування з повною інформацією, коли стратегії середовища або відомі, або мають несуттєвий вплив на проведення операції і їх можна не враховувати в моделі;
- математичні методи обґрунтування рішень в умовах невизначеності, коли стратегії середовища є випадковими діями з відомими або невідомими законами розподілу вірогідності;
- математичні методи обґрунтування рішень в умовах протидії (чи стратегічній невизначеності), коли стратегії середовища носять активний характер протидії проведенню операції.

Перш ніж перейти до класифікації перерахованих методів, зупинимося на двох основних видах моделей операцій.

Однокрокова модель операції характеризується тим, що система в такій операції переходить з початкового в кінцевий стан ніби стрибком, за один крок. Проміжні стани системи на інтервалі часу проведення операції (t_0, t_1) не враховуються. При цьому впродовж усього часу керування системою стратегія $\overline{u}_{t_0}(t)$ керуючого органу і стратегія середовища $\overline{\xi}_{t_0}(t)$ вважаються незмінними.

Багатокрокова модель операцій відрізняється тим, що перехід системи з початкового в кінцевий стан здійснюється послідовно (по кроках), з урахуванням проміжних станів на кожному кроці. Інтервал часу (t_0, t_1) розбивається на послідовність підінтервалів (кроків) (t_0, t_1), (t_1, t_2) і так далі, на кожному з яких використовується своя стратегія (керування) $\overline{u}_{t_0}(t_1)$, $\overline{u}_{t_0}(t_2)$ і так далі. При цьому вибір стратегії на подальшому кроці здійснюється з урахуванням стану, у який прийшла система в кінці попереднього кроку.

Перейдемо тепер до класифікації математичних методів обґрунтування рішень.

В однокрокових моделях зазвичай рішення полягає у визначенні кінцевого стану системи. Оскільки система «стрибком» переходить у кінцевий стан, то без порушення спільності можна покласти $\bar{x}(t_0)=0$, $\bar{x}(t)=\bar{x}$. Незмінними на інтервалі (t_0, t_1) вважаються і стратегії середовища, тобто $\bar{\xi}_{t_0}(t)=\bar{\xi}$. Тоді цільову функцію можна подати у вигляді

$$I = f[\bar{x}, \bar{\xi}] = f[x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q], \tag{1.30}$$

де f - звичайна функція.

Оскільки зміна стану системи пов'язана з розподілом ресурсів, очевидно, буде справедливим таке обмеження:

$$\bar{x} \le \bar{u}^{\circ}, \tag{1.31}$$

де $\bar{u}^{\circ}$ - виділені на проведення операції ресурси.

Тоді задача визначення стану $\bar{x}$ системи формулюється таким чином: необхідно знайти такий вектор $\bar{x}$, який задовольняв би обмеження (1.31) і обертав у мінімум цільову функцію (1.30). Математичний запис цієї задачі має вигляд

$$I_{\min} = \min_{\bar{x} \in X} f[\bar{x}, \bar{\xi}], \tag{1.32}$$

$$\bar{x} \le \bar{u}^{\circ}.$$

У ряді випадків значення вектора $\bar{x}$ мають бути ще і невід’ємним. Це обмеження випливає з фізичної суті ресурсів, відведених на проведення операції.

Сформульована задача (1.32) розв’язується методами математичного програмування. Математичне програмування є розділом дослідження операцій, призначеним для вирішення однокрокових завдань керування операціями. При цьому математичне програмування дає алгоритмічну форму розв’язання задачі, тобто вказує обчислювальну процедуру, що призводить до розв’язання задачі.

Для розв’язання різних конкретних задач розроблено різні методи математичного програмування. Розпочнемо з детермінованих задач керування операціями. Детерміновані задачі мають місце в тих випадках, коли стратегії середовища відомі або їх можна враховувати. Тоді вираз для цільової функції має вигляд

$$I = f(\bar{x}) = f[x_1, x_2, \ldots, x_n]. \qquad (1.33)$$

Якщо функція f є лінійною функцією змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обмеження (1.31) є лінійними рівностями або нерівностями, а змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ повинні задовольняти умову невід’ємності, задача (1.32) розв’язується методами лінійного програмування.

В усіх інших випадках (функція f нелінійна, обмеження (1.31) - нелінійні рівності або нерівності) методи розв’язання задачі (1.32) складають суть нелінійного програмування.

Серед методів нелінійного програмування часто виділяють методи цілочислового і дробово-лінійного програмування. Задачі цілочислового програмування відрізняються тим, що за умови лінійних обмежень і цільової функції на змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ накладаються вимоги невід’ємності і цілочисленості. Що стосується дробово-лінійного програмування, то при лінійних обмеженнях цільова функція є дробово-лінійною функцією змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

У стохастичних задачах умови проведення операції (стратегії середовища) невідомі.

Якщо цільова функція задана у вигляді виразу (1.30), обмеження - у вигляді виразу (1.31), задані імовірнісні характеристики стратегій середовища, то така задача розв’язується методами стохастичного програмування.

Важливим випадком стохастичної задачі є випадок, коли кількість стратегій середовища кінцева, а величини x_i і ξ_j можуть набувати значень, що належать кінцевим множинам. Операції, що проводяться в цих умовах, називаються статистичними іграми, а прийняття рішень здійснюється за допомогою методів теорії статистичних рішень.

І, нарешті, в умовах протидії, коли стратегії середовища спрямовані на те, щоб завадити досягненню цілі системою, для обґрунтування рішень застосовуються методи теорії стратегічних ігор чи просто теорії ігор.

Перейдемо тепер до класифікації методів обґрунтування рішень за умови проведення операцій, що описуються багатокроковими моделями. Якщо інтервал часу (t_0, t_1) проведення може бути розбитий (природним або штучним шляхом) на n підінтервалів (кроків), то стан системи на довільному k-му кроці можна подавати як

$$\overline{x}_k = F(\overline{x}_{k-1}, \overline{u}_k, \overline{\xi}_k), \tag{1.34}$$

де $\overline{x}_k = \overline{x}_{t_{k-1}}(t_k)$ - стан системи в кінці k-го кроку;

$\overline{x}_{k-1} = \overline{x}_{t_{k-2}}(t_{k-1})$ - стан системи в кінці (k-1)-го кроку;

$\overline{u}_k = \overline{u}_{t_{k-1}}(t_k)$ – керування (стратегія) на k-му кроці;

$\overline{\xi}_k = \overline{\xi}_{t_{k-1}}(t_k)$ - стратегія середовища на k-му кроці.

Керування на k-му кроці кількісно можна оцінити деяким виграшем

$$I_k = \Phi(\overline{x}_k, \overline{u}_k, \overline{\xi}_k). \tag{1.35}$$

Вираз (1.35) представляє цільову функцію на k-му кроці.

Цільова функція за умови управління усією операцією в більшості випадків може бути представлена сумою I_k. Таким чином, у загальному випадку можна записати

$$I = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(\overline{x}_k, \overline{u}_k, \overline{\xi}_k). \tag{1.36}$$

На стратегії $\overline{u}_k$ на кожному кроці накладаються обмеження у вигляді рівностей, нерівностей і так далі.

Задача вибору оптимального рішення формулюється таким чином: знайти таке керування

$$\overline{u} = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k, \ldots, \overline{u}_n),$$

яке переводить систему з початкового $\overline{x}_0$ в кінцевий стан $\overline{x}_n$, задовольняє обмеження і обертає в мінімум цільову функцію, тобто

$$I_{min} = \min_{\substack{\bar{u}_k \in \upsilon \\ \bar{u}_k \leq \bar{u}_k^{\circ}}} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k\left(\bar{x}_k, \bar{u}_k, \bar{\xi}_k\right). \qquad (1.37)$$

Якщо стратегії середовища відомі, тобто задача є детермінованою, то вона розв'язується методами динамічного програмування.

У тому випадку, коли операція є комплексом робіт, наприклад робіт з технічного обслуговування радіоелектронної апаратури, багатокрокову задачу доцільно розв'язувати методами мережевого планування.

В умовах невизначеності багатокрокова задача розв'язується методами стохастичного динамічного програмування.

На рис. 1.13 подана класифікаційна таблиця математичних методів обґрунтування рішень для різних моделей операцій і різних умов проведення операції.

Модель операції	Умови проведення операції		
	Повна інформація	Невизначеність	Протидія
Однокрокова	Лінійне програмування, цілочислове програмування, нелінійне програмування	Стохастичне програмування, теорія статистичних рішень	Теорія ігор
Багатокрокова	Динамічне програмування, мережеве планування	Стохастичне динамічне програмування	Теорія багатокрокових ігор

Рис. 1.13

На закінчення зазначимо, що одна і та сама задача обґрунтування рішень може бути розв'язана різними математичними методами. Так, наприклад, у ряді випадків багатокрокової моделі послідовність значень змінної $\bar{u}$ на окремих кроках можна розглядати як одну багатомірну змінну на одному кроці. Тоді багатокрокова модель перетвориться в однокрокову і замість методів динамічного програмування можна скористатися методами лінійного програмування.

2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Постановка задачі лінійного програмування

Лінійне програмування (ЛП) є найбільш розробленим і широко вживаним на практиці розділом дослідження операцій. Методами лінійного програмування успішно розв’язуються різноманітні задачі планування виробничих процесів, розподілу засобів, транспортних перевезень і так далі.

Уперше загальна постановка задачі лінійного програмування і один з методів її розв’язання були дані в 1939 році радянським вченим Л.В. Канторовичем у роботі «Математические методы организации и планирования производства». Загальна математична теорія лінійного програмування була розроблена в 1949 році Дж. Данцигом. Подальший розвиток теорії лінійного програмування та її практичних застосувань пов'язаний з іменами вітчизняних і зарубіжних вчених: В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, Д.Б. Юдіна, Г. Куна, С. Гасса та інших.

Розглянемо приклад постановки задачі лінійного програмування. Для передачі повідомлень організується комплекс засобів зв'язку. У разі організації комплексу в розпорядженні розробника є n типів засобів зв'язку (наприклад, короткохвильові і ультракороткохвильові радіостанції, засоби проводового і радіорелейного зв'язку і так далі). Комплекс призначений для роботи в різних умовах обстановки. Кількість різних варіантів обстановки дорівнює m.

Кожен з перерахованих засобів зв'язку характеризується показником ефективності – об'ємом корисної інформації, що передається за допомогою одного комплекту цього засобу за деякий проміжок часу. Цей показник може вимірюватися в різних одиницях – кількістю повідомлень, кількістю кодових комбінацій, кількістю бітів інформації. Тому надалі вважатимемо, що показник ефективності задається в деяких умовних одиницях.

Значення в умовних одиницях показника ефективності одного комплекту різних типів засобів зв'язку, працюючих у різних умовах обстановки, наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

	1	2	…	j	…	n
1	v_{11}	v_{12}	…	v_{1j}	…	v_{1n}
2	v_{21}	v_{22}	…	v_{2j}	…	v_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
i	v_{i1}	v_{i2}	…	v_{ij}	…	v_{in}
…	…	…	…	…	…	…
m	v_{m1}	v_{m2}	…	v_{mj}	…	v_{mn}

Відомо, що для виконання задачі управління в і-му варіанті обстановки $i = \overline{1, m}$ комплекс повинен забезпечити передачу повідомлень об'ємом не менше V_i умовних одиниць. Витрати на експлуатацію одного комплекту j-го типу засобів зв'язку складають G_j, $j = \overline{1, n}$.

Необхідно організувати такий комплекс засобів зв'язку, який за умови мінімальних експлуатаційних витратах забезпечив би виконання задач управління в будь-яких умовах обстановки.

Проведемо формалізацію цієї задачі. Організувати комплекс – це означає визначити кількість комплектів кожного з типів засобів зв'язку, причому так, щоб витрати на експлуатацію комплексу були мінімальними.

Позначимо через x_1 – кількість комплектів засобів зв'язку першого типу, x_2 – кількість комплектів засобів зв'язку другого типу і так далі. Тоді в першому варіанті обстановки комплекс забезпечить передачу $\hat{v}_1$ умовних одиниць інформації:

$$\hat{V}_1 = v_{11}\tilde{o}_1 + v_{12}\tilde{o}_2 + \ldots + v_{1j}\tilde{o}_j + \ldots + v_{1n}\tilde{o}_n. \qquad (2.1)$$

Але за умовою для виконання задачі управління в першому варіанті обстановки необхідно, щоб $\hat{v}_1 \geq V_1$. Отже, з урахуванням виразу (2.1) можна записати

$$v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \ldots + v_{1j}x_j + \ldots + v_{1n}x_n \geq V_1. \qquad (2.2)$$

Продовжуючи аналогічні міркування для інших варіантів обстановки, доходимо до такої системи нерівностей:

$$\begin{array}{l} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \ldots + v_{1j}x_j + \ldots + v_{1n}x_n \geq V_1; \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \ldots + v_{2j}x_j + \ldots + v_{2n}x_n \geq V_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ v_{i1}x_1 + v_{i2}x_2 + \ldots + v_{ij}x_j + \ldots + v_{in}x_n \geq V_i; \\ v_{m1}x_1 + v_{m2}x_2 + \ldots + v_{mj}x_j + \ldots + v_{mn}x_n \geq V_m. \end{array} \qquad (2.3)$$

Таким чином, система нерівностей (2.3) характеризує обмеження на об'єми інформації, яка необхідна для виконання задачі управління в будь-яких умовах обстановки.

Експлуатаційні витрати комплексу зв'язку, очевидно, можна записати таким виразом:

$$C(\bar{x}) = C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_jx_j + \ldots + C_nx_n. \qquad (2.4)$$

За умовою задачі величини x_1, x_2 і так далі не можуть набувати від'ємних значень, тобто мають місце такі обмеження:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_j \geq 0,\ x_n \geq 0.$$

Тепер задачу організації комплексу засобів зв'язку можна сформулювати таким чином: знайти такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють обмеження (2.3) і обертають у мінімум цільову функцію (2.4). Оскільки обмеження

(2.3) є системою лінійних нерівностей, а цільова функція (2.4) – лінійна функція змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, то згідно з наведеною вище класифікацією задача організації комплексу засобів зв'язку належить до задач лінійного програмування.

Для розв’язання задачі лінійного програмування її необхідно привести до канонічної форми. Канонічна форма задачі ЛП характеризується тим, що обмеження мають вигляд лінійних рівнянь. Перехід від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь можна здійснити за певними правилами, які будуть розглянуті нижче. Поки ми вважатимемо, що такий перехід здійснено і проведено.

Тоді задачу лінійного програмування можна сформулювати так: знайти такі невід’ємні значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють обмеження

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + v_{in}x_n \ge b_i; \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{aligned} \qquad (2.5)$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_jx_j + \dots + C_nx_n. \qquad (2.6)$$

У такій постановці задача називається основною задачею лінійного програмування (ОЗЛП).

Очевидно, при $m = n$ задача має єдиний розв’язок і, з точки зору вибору оптимального розв’язку з декількох альтернативних, інтересу не представляє. Нас цікавитиме випадок, коли $m < n$. У цьому випадку задача має безліч розв’язків, а отже, існує можливість вибору найкращого розв’язку.

Будь-яку сукупність невід’ємних значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що задовольняють обмеження (2.5), назвемо допустимим або опорним розв’язком ОЗЛП. Безліч допустимих розв’язків є підмножиною безлічі невід’ємних значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ і утворює область допустимих рішень (ОДР).

Сукупність значень $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ змінних, які дають мінімальне значення цільової функції $L(\bar{x})$, називається оптимальним розв’язком ОЗЛП.

Перейдемо до розгляду методів розв’язання основної задачі лінійного програмування.

2.2. Графічний метод розв’язання ОЗЛП

Розглянемо випадок основної задачі лінійного програмування, коли кількість змінних x_j перевищує кількість рівнянь-обмежень на 2, тобто $m - n = 2$. У цьому випадку задача лінійного програмування набуває наочної геометричної інтерпретації і для її розв’язання можна скористатися графічним методом.

Виділимо з усієї сукупності змінних x_j дві змінні, які назвемо вільними змінними. Використовуючи рівняння-обмеження (2.5), виразимо інші змінні, що називаються базисними, через вільні.

Нехай у якості вільних змінних вибрані змінні x_1 і x_2. Тоді базисні змінні будуть пов'язані з вільними такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x_3 &= \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2, \\ x_4 &= \beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Побудуємо координатні осі Ox_1 і Ox_2 (рис. 2.1).

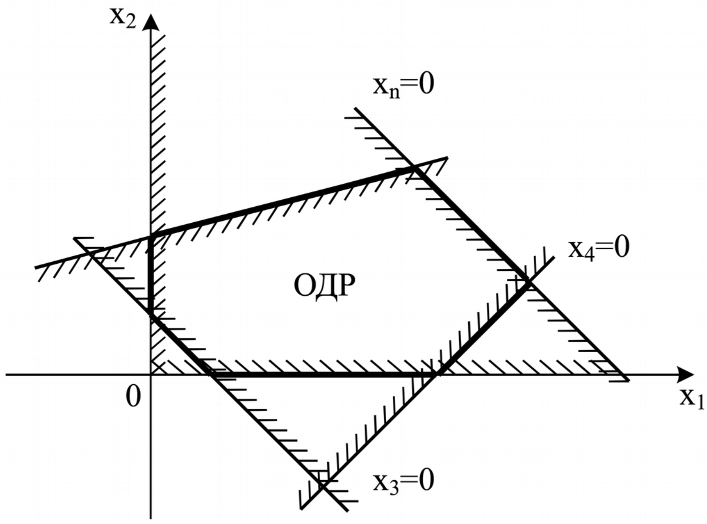

Рис. 2.1

Кожна точка координатної осі відповідає певному значенню однієї з вільних змінних. Відмітимо штрихуванням ті півосі, на яких змінні x_1 і x_2 набувають невід'ємних значень. Так, змінна x_1 набуває невід'ємних значень вправо від осі Ox_2, а змінна x_2 – вгору від осі Ox_1. Очевидно, у першому квадранті системи координат x_1Ox_2 і змінна x_1, і змінна x_2 будуть невід'ємними.

За умовою задачі інші змінні також мають бути невід'ємними, тобто $x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ або

$$\begin{array}{l} \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \geq 0, \\ \beta_4 + \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 \geq 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \geq 0. \end{array} \tag{2.8}$$

Якщо покласти $x_3=0$, тобто узяти граничне допустиме значення x_3, то рівняння

$$\beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 = 0$$

у координатах x_1Ox_2 є рівнянням прямої. Кожна точка прямої, побудованої у координатах x_1Ox_2 відповідає $x_3=0$. Область, що лежить по один бік від цієї прямої, відповідатиме додатним значенням x_3, а по інший бік - від'ємним. Відмітимо штрихуванням ту область, де змінна x_3 набуває додатних значень.

Аналогічним чином побудуємо прямі $x_4 = 0, \ldots, x_n = 0$ і визначимо області, де $x_4 > 0, \ldots, x_n > 0$. Тоді область (багатокутник), кожна точка якої відповідає невід'ємним значенням змінних $x_4 > 0, \ldots, x_n > 0$, і буде областю допустимих рішень (рис. 2.1).

Приступимо тепер до пошуку оптимального рішення. Скориставшись виразом (2.6), виразимо цільову функцію через вільні змінні:

$$\begin{aligned} L(\bar{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3(\beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) + \ldots + \\ + C_n(\beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2) = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= C_3\beta_3 + \ldots + C_n\beta_n; \\ \gamma_1 &= C_1 + C_3\beta_{31} + \ldots + C_n\beta_{n1}; \\ \gamma_2 &= C_2 + C_3\beta_{32} + \ldots + C_n\beta_{n2}. \end{aligned}$$

Покладемо значення $L(\bar{x}) = \Gamma_1$.

Тоді рівняння

$$\Gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$$

або

$$\gamma_0 - \Gamma_1 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = 0 \tag{2.10}$$

є рівнянням прямої в координатах x_1Ox_2. Вона перетинає координатні осі в точках

$$x_1^{'} = \frac{\Gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_2}; \quad x_2^{'} = \frac{\Gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1}.$$

Визначивши ці точки, побудуємо пряму виразу (2.10) (рис. 2.2).

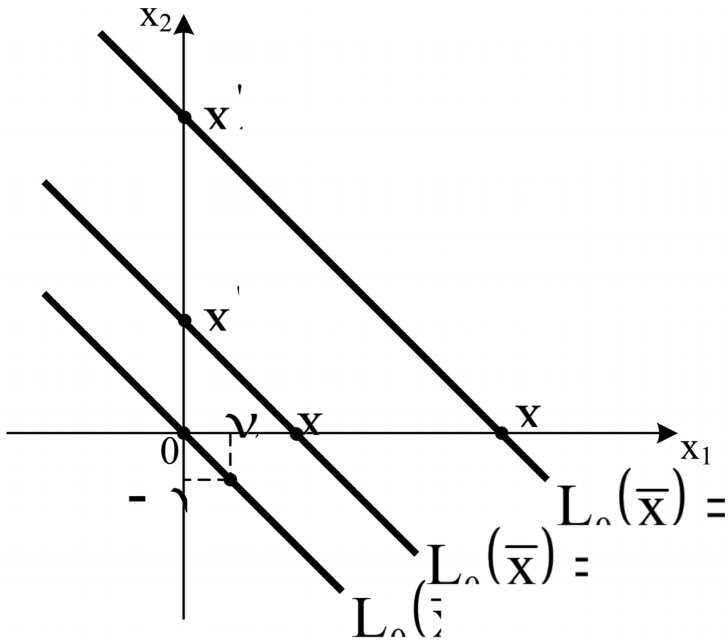

Рис. 2.2

Змінимо значення цільової функції до Γ_2. Очевидно, рівняння

$$\gamma_0 - \Gamma_2 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0 \qquad (2.11)$$

також є рівнянням прямої. Побудувавши цю пряму, неважко переконатися, що зміна цільової функції з Γ_1 до Γ_2 відповідає переміщенню прямої виразу (2.10) паралельно самій собі.

Розв'язуючи задачу лінійного програмування графічним методом для побудови вихідної прямої, зручно покласти $L(\overline{x}) = \gamma_0$.

Тоді з виразу (2.9) випливає, що

$$L_0(\overline{x}) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0. \qquad (2.12)$$

Назвемо пряму $L(\overline{x})$ основною прямою. Оскільки основна пряма, як це випливає з виразу (2.12), проходить через початок координат, для її побудови необхідно знайти ще одну точку. Очевидно, рівняння (2.12) задовольняє також точка з координатами $(\gamma_2, -\gamma_1)$. Таким чином, провівши пряму через точки з координатами $(0,0)$ і $(\gamma_2, -\gamma_1)$, ми тим самим будуємо основну пряму. Переміщення основної прямої паралельно самій собі в одному напрямі відповідатиме збільшенню значення цільової функції $L(\overline{x})$, а в протилежному – його зменшенню.

Як вже підкреслювалося вище, суть задачі лінійного програмування полягає у знаходженні мінімуму цільової функції (2.9). Для цього необхідно визначити напрям переміщення прямої (2.12), при якому б значення цільової функції зменшувалося. Цей напрям визначимо, скориставшись поняттям антиградієнта.

Відомо, якщо $F(\overline{x})$ – функція, що диференціюється, то її градієнтом $\nabla F(\overline{x})$ називається вектор, проекціями якого служать значення частинних похідних, а напрям співпадає з напрямом найбільшого зростання функції, тобто

$$\nabla F(\overline{x}) = \left\| \frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_n} \right\|. \qquad (2.13)$$

Вектор

$$-\nabla F(\overline{x}) = \left\| -\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_1}, -\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_n} \right\|, \qquad (2.14)$$

величина якого дорівнює градієнту, а напрям протилежний, називається антиградієнтом функції $F(\overline{x})$. Очевидно, антиградієнт вказує напрям найбільшого спадання функції.

Антиградієнт функції $L(\overline{x})$ згідно з виразом (2.14) дорівнює

$$-\nabla L_0(\overline{x}) = (-\gamma_1, -\gamma_2). \qquad (2.15)$$

Отже, проекціями антиградієнта є величини γ_1 і γ_2. Вони і визначають положення антиградієнта, а отже, і напрям переміщень основної прямої, що відповідає зменшенню цільової функції.

Якщо $\gamma_1 < 0$ і $\gamma_2 < 0$, проекції антиградієнта матимуть додатні значення, а антиградієнт – розміщуватиметься в першому квадранті. Напрям переміщення основної прямої, що відповідає зменшенню цільової функції, буде зліва направо і знизу вгору. За умовою $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ напрям переміщення змінюється на протилежний (рис. 2.3, а).

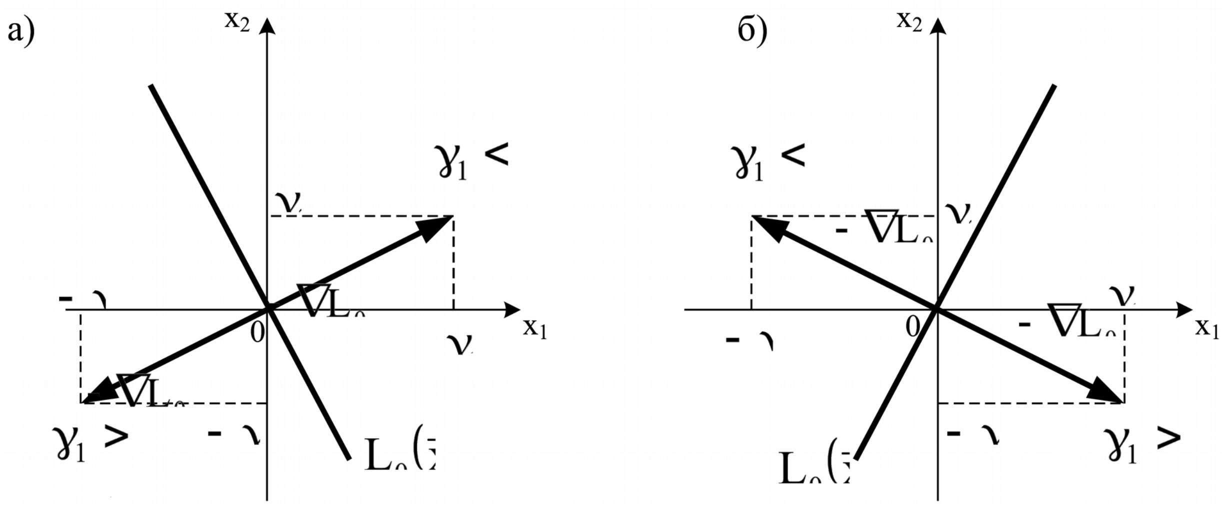

Рис. 2.3

Якщо γ_1 і γ_2 мають різні знаки, антиградієнт розміщується або в другому, або в четвертому квадранті. Графічна ілюстрація цих випадків подана на рис. 2.3, б.

Отже, побудувавши багатокутник області допустимих рішень і основну пряму $L(\overline{x})$, починаємо переміщати її паралельно самій собі у напрямі зменшення цільової функції. Точка $\overline{x}^*$, що належить ОДР і найбільш віддалена від початку координат у напрямі $-\nabla L_0(\overline{x})$, і буде оптимальним розв'язанням задачі лінійного програмування (рис. 2.4).

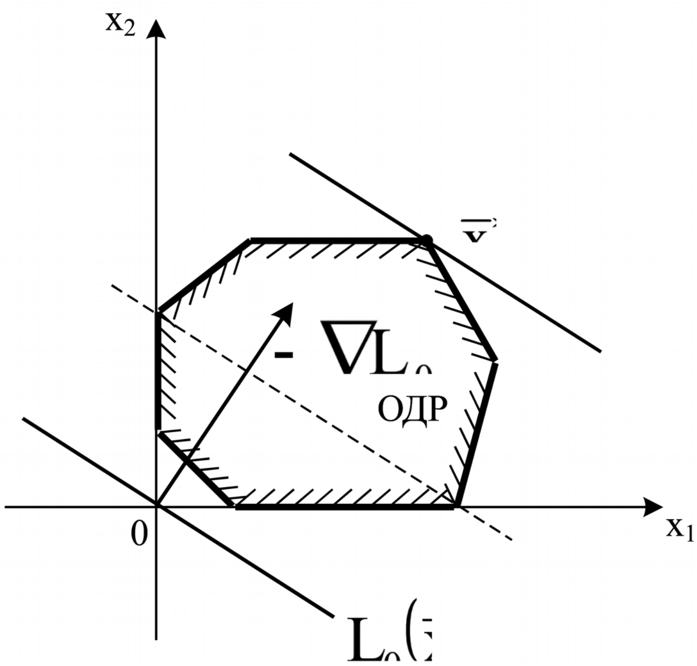

Рис. 2.4

Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування дозволяє наочно зобразити усі випадки, які можуть зустрітися при розв’язанні задач лінійного програмування.

1. Задача лінійного програмування має єдине оптимальне рішення (рис. 2.4). Оптимальне рішення досягається в одній з вершин багатокутника області допустимих рішень. Цей випадок найбільш поширений у практиці розв’язання задач ЛП.

2. Задача лінійного програмування має незліченну безліч оптимальних рішень. Цей випадок має місце, коли пряма $L(\bar{x})$ паралельна одній із сторін багатокутника ОДР, причому ця сторона найбільш видалена від початку координат у напрямі $-\nabla L_0(\bar{x})$ (рис. 2.5). Тоді будь-яка точка, що належить цій стороні багатокутника, і буде оптимальним рішенням.

3. Задача лінійного програмування не має оптимального рішення. У цьому випадку ОДР не обмежена знизу і цільова функція може набувати довільно малих значень (рис. 2.6).

4. Задача лінійного програмування не має допустимих рішень. Це означає, що система рівнянь-обмежень несумісна і області допустимих рішень не існує. Графічна ілюстрація цього випадку наведена на рис. 2.7.

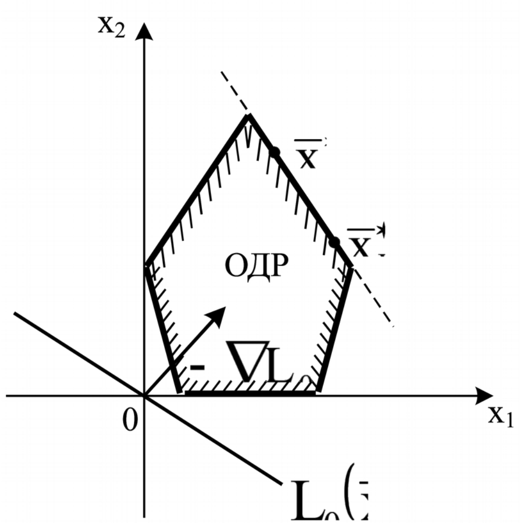

Рис. 2.5

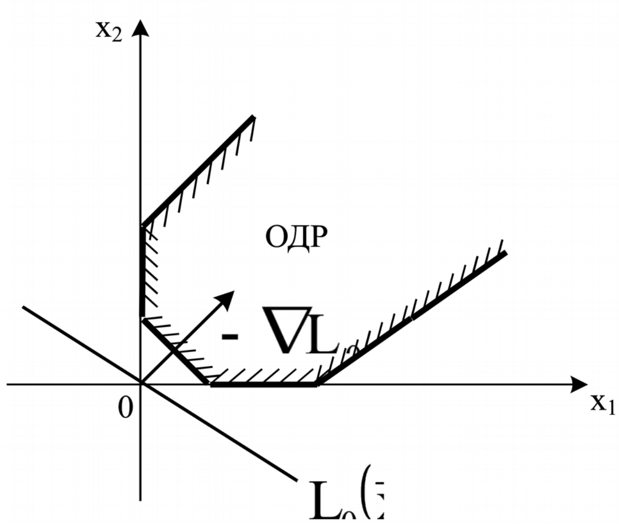

Рис. 2.6

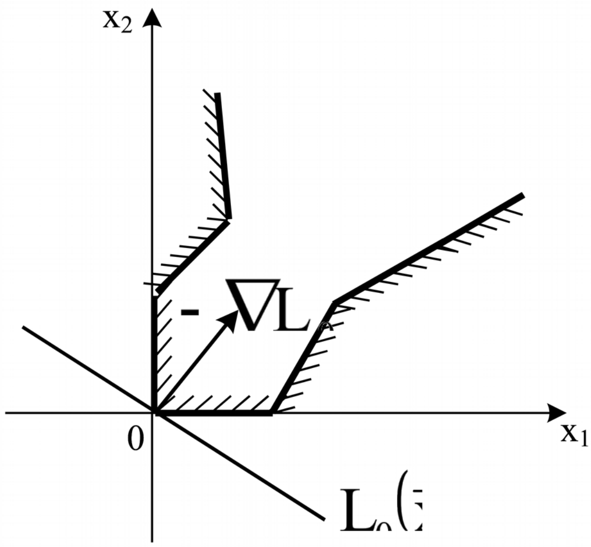

Рис. 2.7

Таким чином, алгоритм розв'язання задачі ЛП графічним методом полягає в такому:

- вибираються $K = n - m = 2$ вільних змінних;
- інші (базисні) змінні і цільова функція виражаються через вільні змінні;
- будується багатокутник області допустимих рішень;
- будується основна пряма $L(\overline{x})$ і визначається вектор $-\nabla L_0(\overline{x})$, що вказує напрям переміщення основної прямої, яка відповідає зменшенню цільової функції;
- шляхом переміщення основної прямої паралельно самій собі в напрямі $-\nabla L_0(\overline{x})$ знаходиться точка (чи безліч точок) ОДР, найбільш видалена від початку координат. Ця точка і буде оптимальним рішенням (якщо воно існує) задачі лінійного програмування. Розглянемо приклад розв'язання задач ЛП графічним методом.

Приклад 2.1. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, що задовольняють систему обмежень

$$x_1 + x_3 = 3,$$
$$-3x_1 - x_2 - x_4 = 4$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4.$$

Ця задача є основною задачею лінійного програмування, оскільки обмеження представлені у вигляді рівнянь. Оскільки кількість змінних $n = 4$, а кількість рівнянь-обмежень $m = 2$, $n - m = 2$, розв'язання задачі можна провести графічним методом.

Виберемо x_1 і x_2 в якості вільних змінних. Тоді базисні змінні x_3 і x_4 можна виразити таким чином:

$$x_3 = -x_1 + 3,$$
$$x_4 = 3x_1 - x_2 - 4.$$

Проведемо координатні осі Ox_1 і Ox_2 (рис. 2.8). Відмітимо штрихуванням ті півосі, на яких вільні змінні x_1 і x_2 набувають невід'ємних значень. Побудуємо пряму x_3=0. З рівняння

$$-x_1 + 3 = 0$$

випливає, що x_1=3. Таким чином, пряма x_3=0 паралельна осі Ox_2 і перетинає вісь Ox_1 в точці x_1=3. Очевидно, додатних значень змінна x_3 набуває в лівій від прямої x_3=0 напівплощині. Відмітимо цю область штрихуванням.

Для побудови прямої x_4=0 необхідно визначити дві точки, що належать цій прямій. Такими точками є точки перетину прямої x_4=0 з осями Ox_1 і Ox_2. Вважаючи в рівнянні

$$3x_1 - x_2 - 4 = 0$$

$x_2 = 0$, знаходимо точку перетину прямої з віссю Ox_1, тобто $x_1 = \frac{4}{3}$, а вважаючи x_1=0 - точку перетину прямої з віссю x_2, тобто $x_2 = -4$. Проведемо через ці точки пряму x_4=0 і відмітимо штрихуванням область, у якій x_4 набуває додатних значень. Трикутник, обмежений прямими x_3=0, x_4=0 і додатною піввіссю Ox_1, є областю допустимих рішень, оскільки будь-яка точка усередині трикутника або на його межі задовольняє вимогу додатності змінних x_1, x_2, x_3, x_4.

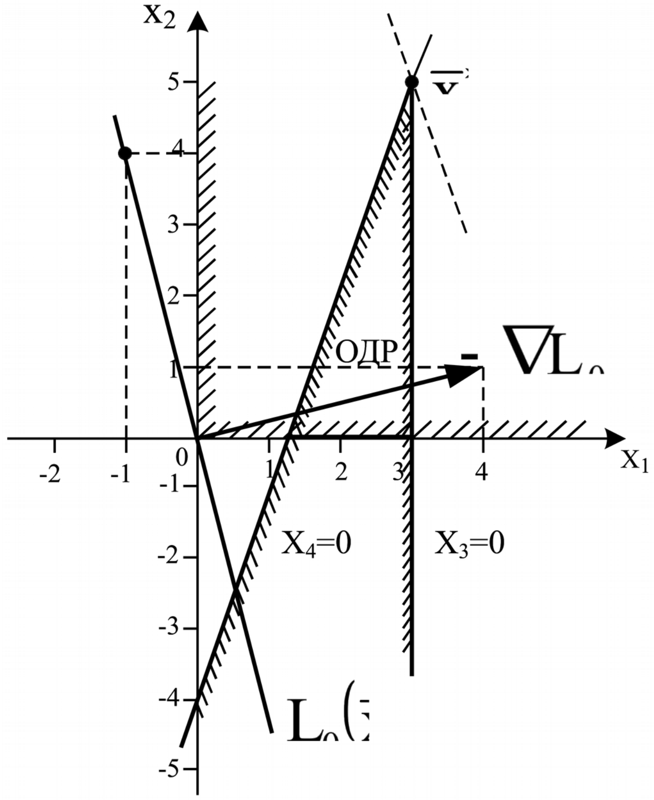

Рис. 2.8

Виразимо цільову функцію $L(\overline{x})$ через вільні змінні x_1 і x_2:

$$L(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 + 2(-x_3 + 3) - (3x_1 - x_2 - 4) = -4x_1 - x_2 + 10.$$

Рівняння основної прямої матиме вигляд

$$L_0(\overline{x}) = -4x_1 - x_2,$$

оскільки тут $\gamma_1 = -4$, а $\gamma_2 = -1$.

Основна пряма проходить через початок координат і точку з координатами (-1;4). Вектор антиградієнта дорівнює $\nabla L_0(\overline{x}) = (4;1)$.

Оскільки проекції вектора додатні, напрям переміщення прямої $L(\overline{x})$ буде зліва направо і знизу вгору. Переміщаючи основну пряму в цьому напрямі, знаходимо точку ОДР, найбільш видалену від початку координат. Такою точкою є вершина трикутника ОДР, утворена перетином прямих x_3=0 і x_4=0. Отже, у точці $\overline{x}^*$ оптимального рішення значення змінних дорівнюють $\overline{x}_3^* = 0$ і $\overline{x}_4^* = 0$.

З рівняння

$$-\bar{x}_1^* + 3 = 0$$

знаходимо, що $-\bar{x}_1^* = 3$, а з рівняння

$$3\bar{x}_1^* - \bar{x}_2^* - 4 = 0$$

знаходимо $\bar{x}_2^* = 5$.

Таким чином, оптимальним рішенням розглянутої задачі ЛП буде

$$\bar{x}^* = (3;5;0;0).$$

При цьому значення цільової функції мінімально і дорівнює

$$L_{min}(\bar{x}) = -4 \cdot 3 - 5 + 10 = -7.$$

З розгляду графічного методу розв'язання задачі лінійного програмування можна зробити такі висновки.

1. Оптимальне розв'язання задачі лінійного програмування, якщо воно існує, досягається на границі багатокутника області допустимих рішень. При цьому задача може мати або єдину, або незліченну безліч оптимальних рішень.

2. Оптимальне рішення, якщо воно єдине, досягається в точці, де $n-m$ змінних перетворюється на нуль. Ця точка є однією з вершин багатокутника ОДР.

3. Для знаходження оптимального рішення необхідно перевірити на оптимальність лише ті точки, де $n-m$ змінних перетворюються на нуль, тобто вершини багатокутника ОДР.

Ці висновки носять універсальний характер і справедливі так само і для тих випадків, коли $(n-m)>2$ і геометрична інтерпретація втрачає свою наочність. Проте при $(n-m)>2$ область допустимих рішень можна представити у вигляді багатогранника в $(n-m)$-мірному просторі. Вершинами цього багатогранника будуть точки, де перетинаються $(n-m)$ гіперплощин. Здійснюючи перебір вершин багатокутника ОДР і перевіряючи їх на оптимальність, можна знайти оптимальне розв'язання ОЗЛП.

2.3. Симплекс-метод

Розглянемо загальний випадок задачі лінійного програмування, коли $K=(n-m)$ набуває довільного значення. Формулювання задачі представлене виразами (2.5) і (2.6).

Виберемо $K=n-m$ вільних змінних і виразимо інші m базисних змінних через вільні. Нехай вільними змінними виступають змінні $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Виражаючи базисні змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+l}, \ldots, x_{k+m}$ через вільні, отримаємо

$$\begin{array}{l} x_{k+1} = \beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k, \\ x_{k+2} = \beta_{k+2} + \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+2,k}x_k, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{k+l} = \beta_{k+l} + \alpha_{k+l,1}x_1 + \alpha_{k+l,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+l,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+l,k}x_k, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{k+m} = \beta_{k+m} + \alpha_{k+m,1}x_1 + \alpha_{k+m,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+m,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+m,k}x_k. \end{array} \tag{2.16}$$

Рівняння

$$\begin{array}{l} \beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k = 0, \\ \beta_{k+2} + \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+2,k}x_k = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \beta_{k+l} + \alpha_{k+l,1}x_1 + \alpha_{k+l,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+l,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+l,k}x_k = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \beta_{k+m} + \alpha_{k+m,1}x_1 + \alpha_{k+m,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+m,j}x_j + \ldots + \alpha_{k+m,k}x_k = 0 \end{array} \tag{2.17}$$

є рівняннями гіперплощин у $(n-m)$-мірному просторі. Очевидно, при $n-m=2$ рівняння (2.17) перетворяться до вигляду рівнянь (2.7).

У свою чергу $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_k=0$ є гіперплощинами, що утворюють $(n-m)$-мірну систему координат. Перетин цих гіперплощин дає точку, у якій

$$\begin{array}{l} x_{k+1} = \beta_{k+1}, \\ x_{k+2} = \beta_{k+2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{k+l} = \beta_{k+l} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{k+m} = \beta_{k+m}. \end{array} \tag{2.18}$$

Якщо $\beta_{k+1} \geq 0,\ \beta_{k+2} \geq 0, \ldots, \beta_{k+l} \geq 0, \ldots, \beta_{k+m} \geq 0$, точка перетину гіперплощин є однією з вершин багатогранника області допустимих рішень.

На рис. 2.9 зображений багатогранник ОДР у тримірному просторі. При $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ координатні площини перетинаються в точці $\overline{x}_1$, яка є вершиною багатогранника ОДР.

Таким чином, для знаходження однієї з вершин ОДР необхідно прирівняти у рівняннях (2.17) до нуля усі вільні змінні. Тоді за умови $\beta_{k+1} \ge 0,\ \beta_{k+2} \ge 0, \ldots, \beta_{k+l} \ge 0, \ldots, \beta_{k+m} \ge 0$ рішення

$$\overline{x}_1 = (0, 0, \ldots, 0, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_{k+l}, \ldots, \beta_{k+m}) \qquad (2.19)$$

буде допустимим розв’язком ОЗЛП.

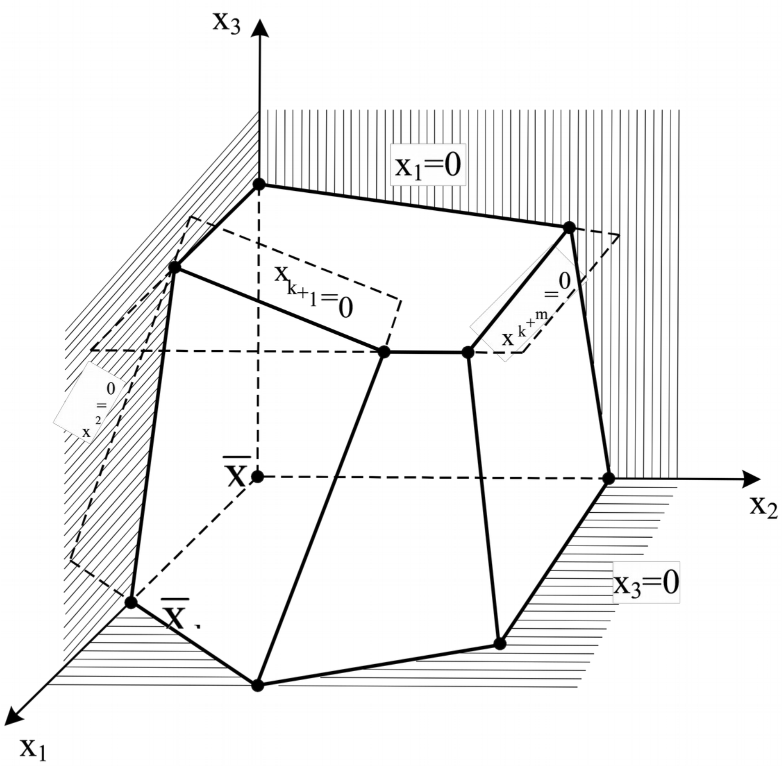

Рис. 2.9

Виразимо цільову функцію через вільні змінні:

$$L(\overline{x}) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_j x_j + \ldots + \gamma_k x_k. \qquad (2.20)$$

Оскільки у вершині $\overline{x}_1$ вільні змінні $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$, значення цільової функції буде

$$L(\overline{x}_1) = \gamma_0. \qquad (2.21)$$

Зміна значення цільової функції досягається переходом до іншої вершини, наприклад $\overline{x}_{11}$ (рис. 2.9). Для цього вибирається інша сукупність вільних змінних (наприклад, $x_2, x_3, \ldots, x_{k+1}$), прирівнювання до нуля яких дозволяє визначити значення базисних змінних і цільової функції в цій вершині. Таким чином, вибираючи різні сукупності $K = (n - m)$ вільних змінних і визначаючи значення цільової функції, можна знайти оптимальне розв'язання задачі лінійного програмування.

Неважко помітити, що метод простого перебору вершин багатогранника ОДР не є ефективним. При збільшенні значень n і m кількість вершин багатогранника ОДР стає таким великим, що операцію простого перебору важко здійснити навіть за допомогою електронних обчислювальних машин. Тому для розв'язання задач лінійного програмування за будь-яких значень n і m був розроблений симплекс-метод або метод послідовного поліпшення плану.

По суті симплекс-метод полягає в тому, що перехід від вершини до вершини багатогранника ОДР здійснюється не довільно, а так, щоб цільова функція в разі переходу, принаймні, не збільшувалася. Отже, за умови використання симплекс-методу розв'язання крок за кроком покращується до тих пір, поки не буде знайдено оптимальне рішення.

Розглянемо процедуру розв'язання задачі ЛП симплекс-методом. Отже, розв'язується задача мінімізації цільової функції (2.6) при обмеженнях (2.5). Відповідно до загальних принципів розв'язання задач ЛП вибираємо $K = n - m$ вільних змінних, наприклад $x_1, x_2, \ldots, x_k$, і виражаємо базисні змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+l}, \ldots, x_{k+m}$ і цільову функцію $L(\overline{x})$ через вільні змінні (див. вирази (2.16) і (2.20)). Вважаючи вільні змінні рівними нулю, отримуємо перше рішення (вирази (2.19) і (2.21)). Нехай $\beta_{k+1} \geq 0,\ \beta_{k+2} \geq 0, \ldots, \beta_{k+l} \geq 0, \ldots, \beta_{k+m} \geq 0$. Тоді рішення (2.19) є допустимим (чи опорним).

Як уже зазначалося раніше, перехід до іншої вершини змінює значення цільової функції. З іншого боку, цей перехід означає, що значення однієї з вільних змінних стає додатним, а значення однієї з базисних змінних стає рівним нулю. Наприклад, перехід з вершини $\overline{x}_1$ у вершину $\overline{x}_{11}$ призводить до збільшення змінної x_1 і зменшення до нуля змінної x_{k+1}.

Розглянемо вираз (2.20) для цільової функції. При $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$, тобто у вершині $\overline{x}_1$, значення цільової функції дорівнює γ_0. Якщо коефіцієнти $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, \ldots, \gamma_k > 0$, то перехід до іншої вершини (збільшення однієї з вільних змінних, наприклад x_1) призведе до зростання цільової функції.

Оскільки в даній задачі проводиться мінімізація цільової функції, при додатних коефіцієнтах γ_k (окрім γ_0) у виразі (2.20) перехід до іншої вершини багатогранника ОДР недоцільний і розв'язок рівняння (2.19) у цьому випадку буде оптимальним рішенням.

Розглянемо інший випадок. Нехай у виразі (2.20) коефіцієнт $\gamma_1 < 0$. Це означає, що, збільшуючи x_1, тобто переходячи до іншої вершини багатокутника ОДР, можна зменшити цільову функцію. Але перехід до іншої вершини відповідає зміні складу вільних і базисних змінних. Іншими словами, при $\gamma_1 < 0$ змінна x_1 має бути переведена в базисні, а одна з базисних змінних - у вільні. З'ясуємо, яка з базисних змінних має бути переведена до складу вільних змінних.

Для цього розглянемо коефіцієнти $\alpha_{k+1,1}, \alpha_{k+2,1}, \ldots, \alpha_{k+1,1}, \ldots, \alpha_{k+m,1}$ при змінній x_1 у виразі (2.16) і визначимо, які з них від'ємні. Нехай від'ємні значення мають коефіцієнти $\alpha_{k+1,1}$ і $\alpha_{k+2,1}$. Оскільки у разі переходу до наступної вершини збільшується тільки змінна x_1, а інші вільні змінні залишаються рівними нулю (див. рис. 2.9, перехід $\overline{x}_1$ в $\overline{x}_{11}$), то з огляду на те, що $\alpha_{k+1,1} < 0$ і $\alpha_{k+2,1} < 0$, змінні x_{k+1} і x_{k+2} зменшуються. При цьому x_{k+1} стає рівним нулю за умови $x_1 = -\dfrac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$, а x_{k+2} – за умови $x_1 = -\dfrac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2,1}}$. Якщо

$$\left|\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}\right| < \left|\frac{\beta_{k+2}}{\alpha_{k+2,1}}\right|, \tag{2.22}$$

то x_{k+1} досягає нульового значення раніше x_{k+2} і подальше збільшення x_1 може привести x_{k+1} в область від'ємних значень, що суперечить обмеженням задачі ЛП. Отже, при виконанні умови (2.22) змінна x_{k+1} має бути з базисних переведена у вільні, а x_1 з вільних - у базисні.

Тепер вільними змінними будуть змінні $x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}$. Виразимо базисні змінні і цільову функцію через нові вільні змінні:

$$
\begin{array}{l}
x_{k+2} = \mu_{k+2} + \lambda_{k+2,2} x_2 + \dots + \lambda_{k+2,j} x_j + \dots + \lambda_{k+2,k} x_k + \lambda_{k+2,k+1} x_{k+1}; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
x_{k+l} = \mu_{k+l} + \lambda_{k+l,2} x_2 + \dots + \lambda_{k+l,j} x_j + \dots + \lambda_{k+l,k} x_k + \lambda_{k+l,k+1} x_{k+1}; \\
x_{k+m} = \mu_{k+m} + \lambda_{k+m,2} x_2 + \dots + \lambda_{k+m,j} x_j + \dots + \lambda_{k+m,k} x_k + \lambda_{k+m,k+1} x_{k+1}; \\
x_1 = \mu_1 + \lambda_{1,2} x_2 + \dots + \lambda_{1,j} x_j + \dots + \lambda_{1,k} x_k + \lambda_{1,k+1} x_{k+1}.
\end{array}
\qquad (2.23)
$$

$$
L(\bar{x}) = \delta_0 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_j x_j + \dots + \delta_k x_k + \delta_{k+1} x_{k+1}. \qquad (2.24)
$$

Вважаючи всі вільні змінні $x_2, \dots, x_j, x_k, x_{k+1}$ рівними нулю, отримаємо

$$
\begin{array}{l}
x_{k+2} = \mu_{k+2}; \\
\dots \quad \dots \\
x_{k+l} = \mu_{k+l}; \\
x_{k+m} = \mu_{k+m}; \\
x_1 = \mu_1
\end{array}
\qquad (2.25)
$$

або

$$
\bar{x}_{11} = (\mu_1, 0, \dots, 0, \mu_{k+2}, \dots, \mu_{k+l}, \dots, \mu_{k+m}).
$$

При цьому значення цільової функції

$$
L(\bar{x}_{11}) = \delta_0 \le \gamma_0. \qquad (2.26)
$$

Якщо всі коефіцієнти δ_j (окрім δ_o) у виразі (2.24) додатні, то розв'язок виразу (2.25) є оптимальним рішенням. Інакше, за наявності хоч би одного від'ємного коефіцієнта δ_j пошук оптимального рішення триває відповідно до викладеного вище алгоритму.

На практиці систему рівнянь (2.16) і вираз для цільової функції (2.20) зручно подавати як

$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - \left(\nu_{k+1,1}x_1 + \nu_{k+1,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+1,j}x_j + \ldots + \nu_{k+1,k}x_k\right);$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$x_{k+1} = \beta_{k+1} - \left(\nu_{k+1,1}x_1 + \nu_{k+1,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+1,j}x_j + \ldots + \nu_{k+1,k}x_k\right); \qquad (2.27)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$x_{k+m} = \beta_{k+m} - \left(\nu_{k+m,1}x_k + \nu_{k+m,2}x_2 + \ldots + \nu_{k+m,j}x_j + \ldots + \nu_{k+m,k}x_k\right);$$

$$L(\bar{x}) = \gamma_0 - \left(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_j x_j + \ldots + \rho_k x_k\right), \qquad 2.28)$$

де $\nu_{ij} = -\alpha_{ij}$, $\rho_j = -\gamma_j$.

Таке зображення базисних змінних і цільової функції дозволяє дещо спростити процедуру обчислень. У першу чергу відмітимо, що від’ємні значення коефіцієнтів у виразі (2.28) свідчать про те, що оптимальне рішення досягнуто. У тому випадку, якщо хоч би один з коефіцієнтів, наприклад ρ_1, додатний, то, як вже відомо, змінна x_1 повинна бути переведена до складу базисних. Для того щоб знайти, яку з базисних змінних перевести у вільні, досить серед коефіцієнтів $\nu_{k+1,i}$ при змінній x_1 у виразі (2.27) знайти коефіцієнти, однакові за знаком з відповідним вільним членом, і визначити відношення (а не модуль, як у виразі (2.22)) кожного вільного члена до відповідного коефіцієнта. Базисна змінна, для якої це відношення мінімальне, має бути переведена до складу вільних.

Таким чином, алгоритм розв’язання задач лінійного програмування симплекс-методом зводиться до виконання таких операцій.

1. Вибираються $K = n - m$ вільних змінних.

2. Базисні змінні і цільова функція виражаються через вільні у вигляді виразів (2.27) і (2.28).

3. Визначається розв’язання задачі ЛП, для чого у виразі (2.27) усі вільні змінні покладаються рівними нулю. Якщо всі вільні члени β_{k+i} додатні, то отримане рішення буде допустимим. (Алгоритм пошуку допустимого рішення, якщо перше рішення не є допустимим, буде розглянутий нижче.)

4. Допустиме рішення перевіряється на оптимальність. Якщо всі коефіцієнти ρ_j у виразі (2.28) від’ємні, то отримане допустиме рішення є оптимальним.

5. Нехай коефіцієнт ρ_j у виразі (2.28) має додатне значення. Серед коефіцієнтів $\nu_{k+i,j}$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k})$ шукаються такі, які мають однаковий знак з вільними членами β_{k+i}. Для всіх таких

коефіцієнтів знаходяться відношення $\frac{\beta_{k+i}}{\nu_{k+i,j}}$ і визначається мінімальне з них, тобто

$$\min \frac{\beta_{k+i}}{\nu_{k+i,j}}. \qquad (2.29)$$

Змінна $x_{k+i,j}$, для якої виконується умова (2.29), переводиться до складу вільних, а змінна x_j, у якої коефіцієнт ρ_j у виразі (2.28) додатний, - до складу базисних.

6. Далі виконуються операції за п.п. 2-5 до тих пір, поки не буде знайдено оптимальне рішення.

Наведемо приклад розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом. Оскільки симплекс-метод є універсальним методом, придатним для будь-яких $k = n - m$, у даному прикладі зупинимося на випадку $k = 2$. Це дозволить дати і графічне тлумачення симплекс-методу.

Приклад 2.2. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, що задовольняють систему обмежень

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ &-x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ &2x_1 - x_2 + x_5 = 10 \end{aligned}$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Графічне розв'язання цієї задачі наведено на рис. 2.10.

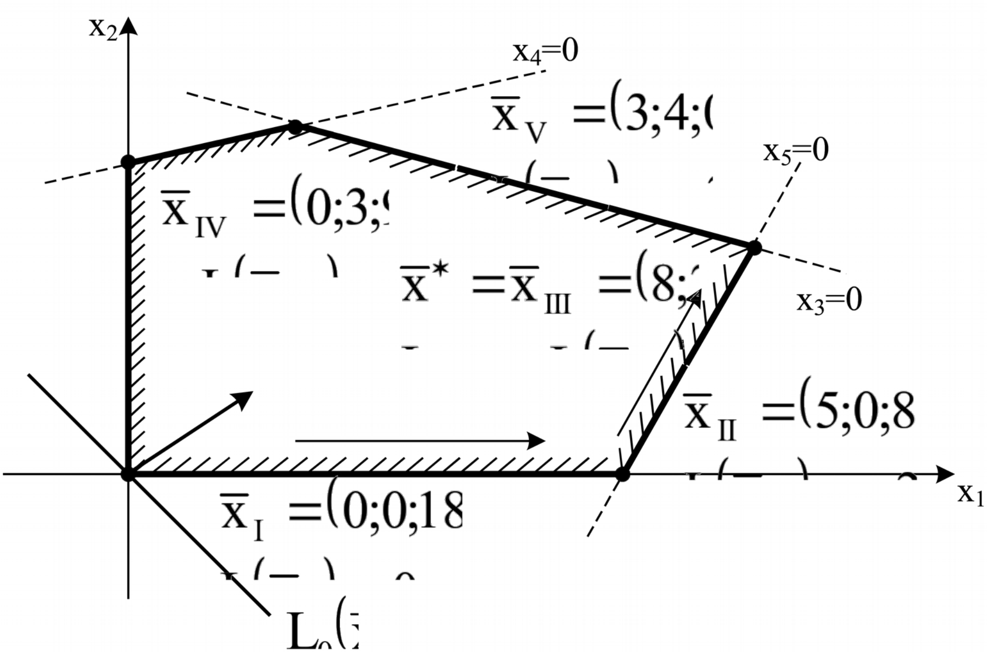

Рис. 2.10

На рисунку показаний багатокутник області допустимих рішень, кожна вершина якого є допустимим рішенням. Біля кожної вершини вказані відповідні рішення і значення цільової функції. Оптимальним рішенням, як це випливає з рисунка, є

$$\overline{x}^{*} = \overline{x}_{II} = (6,2,1,9,0).$$

Мінімальне значення цільової функції дорівнює

$$L_{min} = L(\overline{x}_{111}) = -28.$$

Розв'яжемо цю ж задачу симплекс-методом. Виберемо в якості вільних змінні x_1 і x_2. Тоді відповідно до виразів (2.27) і (2.28) запишемо

$$\begin{aligned} x_3 &= 18 - (2x_1 + 3x_2), \\ x_4 &= 9 - (-x_1 + 3x_2), \\ x_5 &= 10 - (2x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$L(\overline{x}) = 0 - (4x_1 + 2x_2). \tag{2.31}$$

Вважаючи $x_1 = x_2 = 0$, отримаємо $x_3 = 18$, $x_4 = 9$. Усі значення змінних невід'ємні, отже, рішення

$$\bar{x}_I = (0,0,18,9,10)$$

є допустимим (вершина $\bar{x}_I$ на рисунку). У той же час це рішення неоптимальне, оскільки коефіцієнти при x_1 і x_2 у виразі для цільової функції додатні. Отже, будь-яку з цих змінних можна збільшити до деякого додатного значення, тобто перевести зі складу вільних до складу базисних змінних. Переведемо в базисні змінну x_1. Цим починається перший крок розв'язання задачі симплекс-методом.

З'ясуємо, яку зі змінних x_3, x_4 або x_5 слід перевести з базисних у вільні. Коефіцієнти при x_1 однакові за знаком з вільними членами у виразах для x_3 і x_5. Визначимо відношення відповідного вільного члена до кожного з цих коефіцієнтів. Ці відношення відповідно дорівнюють $\frac{18}{2} = 9$ і $\frac{10}{2} = 5$. Оскільки відношення вільного члена до коефіцієнта при x_1 для x_5 менше, ніж для змінної x_3, змінну x_5 переводимо з базисних у вільні.

Тепер вільними виступають змінні x_2 і x_5. Виразимо базисні змінні x_1, x_3 і x_4 і цільову функцію через x_2 і x_5. З третього рівняння системи (2.30) визначимо

$$x_1 = 5 - (0{,}5x_5 - 0{,}5x_2). \tag{2.32}$$

Підставляючи цей вираз у вирази для $x_3, x_4, L(\bar{x})$, отримаємо

$$\begin{aligned} x_3 &= 8 - (-x_5 + 4x_2); \\ x_4 &= 14 - (0{,}5x_5 + 2{,}5x_2). \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$L(\bar{x}) = -20 - (-2x_5 + 4x_2). \tag{2.34}$$

Вважаючи вільні змінні $x_5 = x_2 = 0$, отримаємо $x_1 = 5,\ x_3 = 8,\ x_4 = 14$. Усі змінні невід'ємні, отже, рішення $\bar{x}_{II} = (5,0,8,14,0)$ є допустимим. Воно відповідає вершині $\bar{x}_{II}$ на рисунку. Таким чином, у результаті першого кроку ми перейшли від вершини $\bar{x}_I$ до вершини $\bar{x}_{II}$, при цьому цільова функція зменшилася до величини

$$L(\bar{x}_{II}) = -20.$$

Проаналізуємо, чи є рішення $\overline{x}_{11}$ оптимальним. Оскільки у рівнянні (2.34) коефіцієнт при x_2 додатний, оптимальне рішення ще не досягнуто. Очевидно, змінну x_2 можна збільшити, переводячи її до складу базисних. Визначимо, яку з базисних змінних необхідно перевести у вільні.

Коефіцієнти при x_2 мають однакові знаки з вільними членами у виразах для x_3 і x_4 (вирази (2.33)). Оскільки відношення вільного члена до коефіцієнта при x_2, однакове з ним за знаком, для x_3 менше, ніж для x_4,

$$\frac{8}{4} < \frac{14}{2,5},$$

змінну x_4 переводимо до складу вільних. Таким чином, на другому кроці вільними будуть змінні x_5 і x_3, а базисними - x_1, x_2 і x_4.

Виразимо базисні змінні і цільову функцію через вільні змінні:

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - (0,125x_3 + 0,375x_5); \\ x_2 &= 2 - (0,25x_3 - 0,25x_5); \\ x_4 &= 9 - (-0,625x_3 + 1,125x_5). \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$L(\overline{x}) = -28 - (-x_3 - x_5). \tag{2.36}$$

Вважаючи вільні змінні x_3 і x_5 рівними нулю, отримаємо

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 2; \quad x_4 = 9.$$

Рішення $\overline{x}_{111} = (6, 2, 0, 9, 0)$ є допустимим, оскільки всі змінні невід'ємні. Отже, у результаті другого кроку здійснений перехід з вершини $\overline{x}_1$ у вершину $\overline{x}_{111}$ багатокутника ОДР. При цьому значення цільової функції зменшилося і дорівнює $L(\overline{x}_{111}) = -28$. Перевіримо рішення $\overline{x}_{111}$ на оптимальність. З огляду на те, що всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі (2.36) від'ємні, рішення $\overline{x}_{111}$ буде оптимальним рішенням $\overline{x}^*$. У цьому неважко переконатися, аналізуючи рис. 2.10.

З розглянутого прикладу випливає, що перехід від однієї вершини багатокутника ОДР до іншої відповідно до алгоритму симплекс-методу супроводжується зменшенням цільової функції до тих пір, поки не буде знайдена вершина, у якій цільова функція досягає мінімуму. Тим самим розглянутий приклад підтверджує основну ідею симплекс-методу.

Повернемося до виразу (2.31). Оскільки і за умовою x_1, і за умовою x_2 коефіцієнти додатні, для переведення в базисні можна вибрати будь-яку з цих змінних. При виборі x_1, як це випливає з розглянутого прикладу, оптимальне рішення досягається за два кроки. Неважко показати, що, перекладаючи на першому кроці до складу базисних змінну x_2, оптимального рішення можна досягти лише за три кроки за умови послідовності переходів від вершини до вершини: $\bar{x}_I \to \bar{x}_{IV} \to \bar{x}_V \to \bar{x}_{III}$. Але коефіцієнт при x_1 у виразі (2.31) більше, ніж коефіцієнт при x_2. Звідси доходимо загального висновку, що для скорішого досягнення оптимального рішення до складу базисних на першому кроці необхідно переводити ту вільну змінну x_j, за умовою якої коефіцієнт ρ_j у виразі (2.28) додатний і має найбільше значення серед інших додатних коефіцієнтів.

2.4. Табличний алгоритм симплекс-методу

Розв’язання задачі лінійного програмування можна істотно спростити, якщо скористатися заповненням спеціальних таблиць, званих симплекс-таблицями. Кожен крок розв’язання задачі характеризується своєю симплекс-таблицею, а перехід від однієї таблиці до іншої на черговому кроці здійснюється за певними правилами симплекс-перетворення. Форма симплекс-таблиць також може бути різною.

Вихідними даними заповнення першої симплекс-таблиці служать вільні члени і коефіцієнти при змінних у виразах (2.27) і (2.28). Симплекс-таблиця (табл. 2.2) містить m+1 рядків і k+1 стовпців. У першому рядку записуються коефіцієнти, що містяться у виразі (2.28) для цільової функції $L(\bar{x})$.

Інші рядки служать для запису відповідних коефіцієнтів у виразах для базисних змінних виразу (2.29).

Перший стовпець симплекс-таблиці містить вільні члени виразів (2.28) і (2.29), а інші стовпці - коефіцієнти при вільних змінних. Для зручності використання симплекс-таблиці до неї ліворуч доданий інформаційний стовпець з позначенням базисних змінних, а згори - інформаційний рядок з позначенням вільних змінних.

На основі виразів (2.28) і (2.29) заповнимо першу (початкову) симплекс-таблицю (табл. 2.2). Відповідно до розглянутого вище алгоритму симплекс-методу для отримання першого розв'язку всі вільні змінні необхідно покласти рівними нулю. Тоді перетин першого стовпця і першого рядка дає значення цільової функції, а інші елементи першого стовпця - значення базисних змінних. Якщо всі значення базисних змінних невід'ємні, то отримане рішення є допустимим.

Для перевірки цього рішення на оптимальність звернемося до елементів першого рядка симплекс-таблиці. Якщо всі елементи цього рядка (за винятком вільного члена) від'ємні, отримане рішення є оптимальним.

Таблиця 2.2

БП	СП				
	СЧ	x_1	x_2	…	x_k
$L(\overline{x})$	γ_0	ρ_1	ρ_2	…	ρ_k
x_{k+1}	β_{k+1}	$\nu_{k+1,1}$	$\nu_{k+1,2}$	…	$\nu_{k+1,k}$
x_{k+2}	β_{k+2}	$\nu_{k+2,1}$	$\nu_{k+2,2}$	…	$\nu_{k+2,k}$
…	…	…	…	…	…
x_{k+m}	$\beta_{k+m,1}$	$\nu_{k+m,1}$	$\nu_{k+m,2}$	…	$\nu_{k+m,k}$

У тому випадку, коли один або декілька елементів у першому рядку додатні, рішення не буде оптимальним і його можна поліпшити.

Для цього необхідно здійснити обмін між вільними і базисними змінними відповідно до правил симплекс-перетворення.

1. Серед додатних елементів першого рядка симплекс-таблиці вибирається той, який має найбільше значення. Нехай це буде коефіцієнт ρ_1 при змінній x_1. Це означає, що змінна x_1 повинна бути переведена з вільних у базисні. Стовпець, у якому

знаходиться найбільший додатний коефіцієнт, назвемо дозвільним стовпцем.

2. У дозвільному стовпці визначаються ті елементи, які мають однаковий знак з відповідними вільними членами. Нехай це будуть коефіцієнти $\nu_{k+1,1}$ і $\nu_{k+2,1}$.

3. Розраховуються відношення відповідних вільних членів до коефіцієнтів $\nu_{k+1,1}$ і $\nu_{k+2,1}$.

Нехай виконується така нерівність:

$$\frac{\beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}} < \frac{\beta_{k+2}}{\nu_{k+2,1}}.$$

Тоді рядок, що відповідає базисній змінній x_{k+1}, для якої виконується наведена вище нерівність, назвемо дозвільним рядком. Елемент $\nu_{k+1,1}$, що лежить на перетині дозвільного рядка і дозвільного стовпця, називається дозвільним елементом. Базисна змінна $x_{k+1,1}$ має бути переведена до складу вільних змінних.

4. Будується нова симплекс-таблиця для нової системи вільних $(x_{k+1,1}, x_2, \dots, x_k)$ і базисних $(x_1, x_{k+2}, \dots, x_{k+m})$ змінних (табл. 2.3). Елементи нової симплекс-таблиці заповнюються таким чином.

5. Обчислюється зворотна величина $\frac{1}{\nu_{k+1,1}}$ дозвільного елемента вихідної симплекс-таблиці і це значення записується у відповідній клітинці нової симплекс-таблиці.

6. Усі елементи дозвільного стовпця вихідної симплекс-таблиці діляться на дозвільний елемент. Отримані значення зі зворотним знаком записуються у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

7. Елементи дозвільного рядка вихідної симплекс-таблиці діляться на дозвільний елемент. Отримані значення записуються у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

8. Інші елементи нової симплекс-таблиці розраховуються відповідно до правила прямокутника. Правило прямокутника полягає в наступному. Нехай необхідно розрахувати значення елемента нової симплекс-таблиці, що стоїть на перетині i-го рядка і j-го стовпця, тобто $\nu'_{i,j}$. Складемо з елементів вихідної симплекс-таблиці прямокутну матрицю 2×2:

$$\begin{vmatrix} \nu_{ij} & \nu_{ik} \\ \nu_{lj} & \nu_{lk} \end{vmatrix},$$

де ν_{lk} - дозвільний елемент.

Тоді

$$\nu'_{ij} = \frac{\nu_{ij}\nu_{lk} - \nu_{lj}\nu_{ik}}{\nu_{lk}} = \nu_{ij} - \frac{\nu_{lj}\nu_{ik}}{\nu_{lk}}. \qquad (2.37)$$

У загальному вигляді нова симплекс-таблиця виглядає як табл. 2.3.

Таблиця 2.3

БП	СП				
	СЧ	x_{k+1}	x_2	…	x_k
$L(\overline{x})$	$\gamma_0 - \frac{\rho_1 - \beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}}$	$-\frac{\rho_1}{\nu_{k+1,1}}$	$\rho_2 - \frac{\rho_1 - \nu_{k+1,2}}{\nu_{k+1,1}}$	…	$\rho_k - \frac{\rho_1 - \nu_{k+1,k}}{\nu_{k+1,1}}$
x_1	$\frac{\beta_{k+1}}{\nu_{k+1,1}}$	$\frac{1}{\nu_{k+1,1}}$	$\frac{\nu_{k+1,2}}{\nu_{k+1,1}}$	…	$\frac{\nu_{k+1,k}}{\nu_{k+1,1}}$
x_{k+2}		$-\frac{\nu_{k+2,1}}{\nu_{k+1,1}}$			$\nu_{k+2,k}$
…					
x_{k+m}		$-\frac{\nu_{k+m,1}}{\nu_{k+1,1}}$			

Вважаючи значення вільних змінних рівними нулю, з першого стовпця знаходимо значення цільової функції і базисних змінних. За елементами першого рядка перевіряємо отримане рішення на оптимальність. Якщо рішення неоптимальне, необхідно перейти до наступної симплекс-таблиці згідно з п.п. 1-8 табличного алгоритму.

Розглянемо декілька прикладів розв’язання задач ЛП табличним симплекс-методом.

Приклад 2.3. Розв’язати задачу лінійного програмування, сформульовану в прикладі 2.2, табличним симплекс-методом.

Складемо вихідну симплекс-таблицю (табл. 2.4). Оскільки дана задача містить k=2 вільних і m=3 базисних змінних, у вихідній симплекс-таблиці буде 4 рядки і 3 стовпці. Окрім того, до симплекс-таблиці додані інформаційні рядок і стовпець.

Використовуючи вирази (2.30) і (2.31), заповнимо симплекс-таблицю. Вважаючи вільні змінні $x_1 = x_2 = 0$, з першого стовпця знаходимо $x_3 = 18;\ x_4 = 9;\ x_5 = 10;\ L(\overline{x}) = 0$.

Це рішення є допустимим, але не оптимальним, оскільки елементи першого рядка додатні. Оскільки коефіцієнт при x_1 в першому рядку більше від коефіцієнта при x_2, у якості дозвільного стовпця вибираємо стовпець, що відповідає змінній x_1. Отже, змінна x_1 має бути переведена до складу базисних, що схематично позначено стрілкою над дозвільним стовпцем.

Таблиця 2.4

	БП	СП		
		СЧ	x_1 ←	x_2
	$L(\overline{x})$	0	4	2
	x_3	18	2	3
	x_4	9	-1	3
↑	x_5	10	2	-1

У дозвільному стовпці елементи другого і четвертого рядків, що відповідають базисним змінним x_3 і x_5, мають знаки, однакові з вільними членами. Визначаємо відношення вільних членів до цих коефіцієнтів. Оскільки

$$\frac{10}{2} < \frac{18}{2},$$

рядок, що відповідає базисній змінній x_5 (четвертий рядок симплекс-таблиці), буде дозвільним рядком. Таким чином, змінна x_5 переводиться до складу вільних (на таблиці це позначено стрілкою зліва від дозвільного рядка). Дозвільний елемент (елемент, обведений кільцем) у цій симплекс-таблиці має значення, яке дорівнює 2.

Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 2.5). У цій симплекс-таблиці другий стовпець тепер відповідатиме вільній змінній x_5, а четвертий рядок - базисній змінній x_1.

Відповідно до правил симплекс-перетворення елемент нової симплекс-таблиці, що відповідає дозвільному елементу вихідної симплекс-таблиці, буде дорівнювати $\frac{1}{2}=0{,}5$.

Для отримання елементів стовпця при змінній x_5 кожен елемент дозвільного стовпця вихідної симплекс-таблиці поділимо на дозвільний елемент. Результат ділення зі зворотним знаком запишемо у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

Таблиця 2.5

	БП	СП		←
		СЧ	x_5	x_2
	$L(\overline{x})$	-20	-2	4
↑	x_3	8	-1	4
	x_4	14	0,5	2,5
	x_1	5	0,5	-0,5

Елементи рядка при змінній x_1 виходять шляхом ділення кожного елемента дозвільного рядка вихідної симплекс-таблиці на дозвільний елемент. Результат ділення з тим самим знаком записується у відповідних клітинках нової симплекс-таблиці.

Інші елементи знаходимо за правилом прямокутника. Нехай необхідно знайти значення елемента, що знаходиться на перетині першого рядка і першого стовпця нової симплекс-таблиці. Тоді, звернувшись до вихідної симплекс-таблиці, будуємо матрицю 2×2:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 2 \end{Vmatrix},$$

елементами головної діагоналі якої служать дозвільний елемент і елемент, що знаходиться на перетині першого стовпця і першого рядка. Елементи другої діагоналі належать дозвільному рядку і дозвільному стовпцю. Відповідно до виразу (2.37) значення елемента нової симплекс-таблиці буде дорівнювати

$$\frac{0\cdot 2-10\cdot 4}{2}=-20.$$

Аналогічно розраховуються інші елементи нової симплекс-таблиці.

Проаналізуємо нову симплекс-таблицю. Вважаючи вільні змінні $x_5 = x_2 = 0$, знаходимо:

$$x_3 = 8;\ x_4 = 14;\ x_1 = 5;\ L(\overline{x}_{II}) = -20.$$

Оскільки всі змінні є невід'ємними, отримане рішення є допустимим. У той же час елемент першого рядка і третього стовпця додатний. Отже, оптимальне рішення задачі ще не досягнуто.

Виберемо в якості дозвільного стовпця стовпець при змінній x_2. У цьому стовпці елементи, однакові за знаком з вільними членами, відповідають змінним x_3 і x_4. З огляду на те, що

$$\frac{8}{4} < \frac{14}{2{,}5},$$

у якості дозвільного рядка вибираємо рядок, що відповідає базисній змінній x_3.

Таким чином, на черговому кроці розв'язання задачі ЛП змінна x_2 переводиться в базисні, а змінна x_3 - у вільні.

Будуємо чергову симплекс-таблицю (табл. 2.6) і, користуючись правилами симплекс-перетворення, заповнюємо її.

Таблиця 2.6

БП	СП		
	СЧ	x_5	x_3
$L(\overline{x})$	28	-1	-1
x_2	2	-0,25	0,25
x_4	9	1,125	-0,625
x_1	6	0,375	0,125

Вважаючи вільні змінні $x_5 = x_3 = 0$, отримуємо значення базисних змінних і цільової функції: $x_2 = 2;\ x_4 = 9;\ x_1 = 6;\ L(\overline{x}_{III}) = -28$.

Усі змінні мають невід’ємні значення, а елементи першого рядка від’ємні. Отже, рішення

$$\bar{x}^*_{III} = (6, 2, 0, 9, 0)$$

є оптимальним, а мінімальне значення цільової функції дорівнює -28.

Якщо провести аналогію з графічним розв’язанням цієї задачі, то можна помітити, що кожна симплекс-таблиця відповідає певній вершині багатокутника області допустимих рішень. Очевидно, симплекс-перетворення на кожному кроці є переходом від однієї вершини ОДР до іншої.

Розглянемо на прикладах деякі окремі випадки розв’язання задач лінійного програмування, після чого узагальнимо результати.

Приклад 2.4. Знайти невід’ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, що задовольняють систему обмежень

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 10 \end{aligned}$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Оскільки в цій задачі $n = 5, m = 3, k = n - m = 2$, то її можна розв’язати графічним методом. Графічне розв’язання задачі наведено на рис. 2.11.

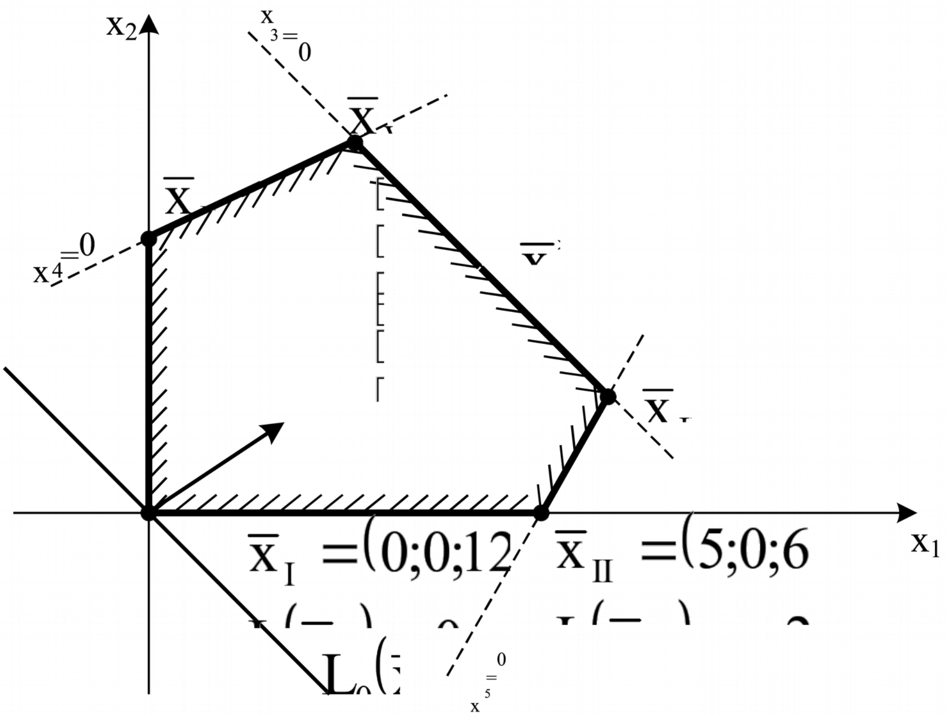

Рис. 2.11

З наведеного рисунка випливає, що пряма $L(\overline{x})$ паралельна прямій $x_3 = 0$, а пряма $x_3 = 0$ найбільш видалена від початку координат у напрямі зменшення цільової функції. Отже, будь-яка точка відрізка прямої $x_3 = 0$ між вершинами $\overline{x}_{III}$ і $\overline{x}_V$ є оптимальним рішенням. Іншими словами, дана задача лінійного програмування має незліченну безліч оптимальних розв'язків.

Розв'яжемо цю саму задачу табличним симплекс-методом. Представимо рівняння-обмеження і цільову функцію у вигляді виразів (2.27) і (2.28):

$$x_3 = 12 - (2x_1 + x_2);$$
$$x_4 = 9 - (-x_1 + 3x_2);$$
$$x_5 = 10 - (2x_1 - x_2);$$
$$L(\overline{x}) = 0 - (4x_1 + 2x_2).$$

Послідовність симплекс-перетворень при розв'язанні задачі подана у вигляді послідовності симплекс-таблиць 2.7÷2.9.

Таблиця 2.7 Таблиця 2.8 Таблиця 2.9

← ←

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\bar{x})$	0	4	2
x_3	12	2	1
x_4	9	-1	3
x_5	10	2	-1

БП	СП		
	СЧ	x_5	x_2
$L(\bar{x})$	-20	-2	4
x_3	2	-1	2
x_4	14	0,5	2,5
x_1	-5	0,5	-0,5

БП	СП		
	СЧ	x_5	x_3
$L(\bar{x})$	-32	0	-2
x_2	1	-0,5	0,5
x_4	11,5	1,75	-1,25
x_1	5,5	0,25	0,25

Проаналізуємо кінцеву симплекс-таблицю. Вважаючи $x_5 = x_3 = 0$, отримаємо $x_2 = 1;\ x_4 = 11{,}5;\ x_1 = 5{,}5;\ L(\bar{x}_{III}) = -32$. Отримане рішення є допустимим (вершина $\bar{x}_{III}$ багатокутника області допустимих рішень).

З'ясуємо, що означає наявність у першому рядку разом з від'ємними елементами елемента, рівного нулю. Оскільки перший рядок визначає цільову функцію, запишемо її аналітичний вираз:

$$L(\bar{x}) = -32 - (0x_5 - 2x_3).$$

У вершині $\bar{x}_{III}$ значення $x_5 = 0$. Оскільки коефіцієнт при x_5 у виразі для цільової функцій дорівнює нулю, то збільшення x_5 не призводить до зміни цільової функції, значення якої залишається рівним -32. Графічно збільшення x_5 відповідає переміщенню точки по відрізку прямої $x_3 = 0$ від вершини $\bar{x}_{III}$ до вершини $\bar{x}_V$. Але, як зазначалося вище, будь-яка точка цього відрізка є оптимальним рішенням. Отже, наявність у першому рядку симплекс-таблиці серед від'ємних одного або декількох нульових елементів (при додатних елементах першого стовпця) є ознакою того, що задача лінійного програмування має незліченну безліч оптимальних розв'язків.

Повернемося до рис. 2.11. Очевидно, переміщати точку оптимального рішення по відрізку прямої $x_3 = 0$ або, що те саме, збільшувати x_5 можна до певних меж. Граничне значення x_5 визначається вершиною $\bar{x}_V$. У цій вершині $x_3 = 0$ і $x_4 = 0$. Але з симплекс-таблиці випливає, що

$$x_4 = 11{,}5 - (1{,}75x_5 - 1{,}25x_3).$$

Підставляючи в це рівняння значення $x_3 = 0$ і $x_4 = 0$, отримаємо граничне значення x_5:

$$x_{5\max} = \frac{11,5}{1,75} \approx 6,57\,.$$

Граничне значення x_5 можна визначити за симплекс-таблицею. Для цього розглянемо стовпець, що відповідає змінній x_5, тобто той стовпець, на перетині якого з першим рядком знаходиться нульовий елемент. Знайдемо в стовпці елементи, однакові за знаком з вільними членами. У даному випадку це елементи 1,75 і 0,25. Мінімальне відношення вільного члена до відповідного коефіцієнта і дасть граничне значення змінної x_5.

Приклад 2.5. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, що задовольняють систему обмежень

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6, \\ -9x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 &= 10 \end{aligned}$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2\,.$$

На рис. 2.12 подано графічне розв'язання цієї задачі.

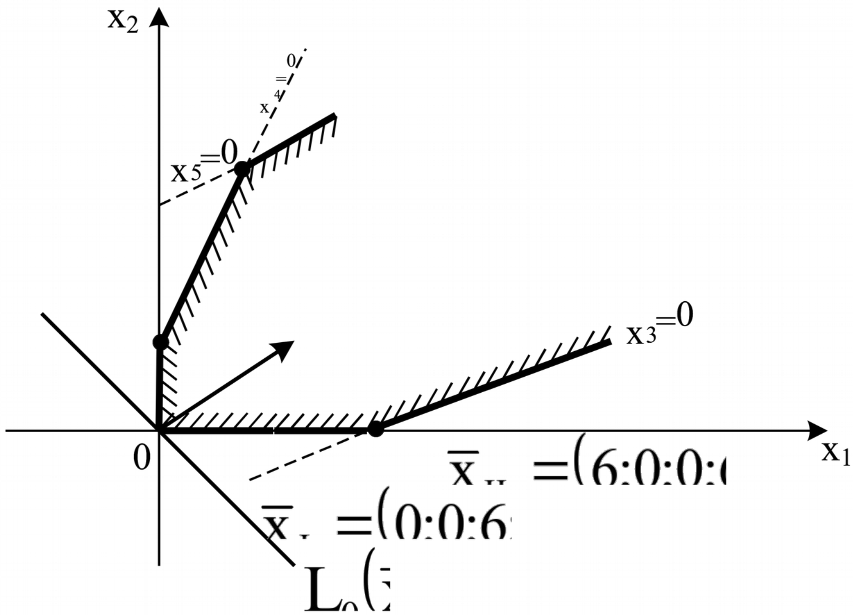

Рис. 2.12

Область допустимих рішень відкрита знизу, отже, ця задача не має оптимального рішення.

Розв'яжемо задачу табличним симплекс-методом.

Для цього представимо рівняння-обмеження і цільову функцію як

$$x_3 = 6 - (x_1 - 3x_2);$$
$$x_4 = 9 - (-9x_1 + 3x_2);$$
$$x_5 = 10 - (-2x_1 + 2x_2);$$
$$L(\overline{x}) = 0 - (4x_1 + 2x_2).$$

Симплекс-таблиці, що відповідають різним крокам розв'язання задачі, мають вигляд табл. 2.10, 2.11.

Таблиця 2.10

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\overline{x})$	0	4	2
↑ x_3	6	1	-3
x_4	9	-9	3
x_5	10	-2	2

⇒

Таблиця 2.11

БП	СП		
	СЧ	x_3	x_2
$L(\overline{x})$	-24	-4	14
x_1	6	1	-3
x_4	63	9	-24
x_5	22	2	-4

У відповідності з алгоритмом розв'язання задачі табличним симплекс-методом у табл. 2.11 в якості дозвільного стовпця на черговому кроці слід було б вибрати стовпець при змінній x_2. Але в цьому стовпці не існує жодного елемента, що має однаковий знак з відповідним вільним членом. Ця ознака і є ознакою того, що задача ЛП не має оптимального розв'язання.

Розглянуті приклади дозволяють зробити такі висновки.

1. Якщо в кінцевій симплекс-таблиці елементи першого стовпця додатні, а елементи першого рядка (окрім елемента, що відповідає вільному члену $L(\overline{x})$) - від'ємні, задача лінійного програмування має єдине оптимальне рішення.

2. Якщо в кінцевій симплекс-таблиці елементи першого стовпця додатні, а серед від'ємних елементів першого рядка є один або декілька нульових елементів, задача лінійного програмування має незліченну безліч оптимальних рішень.

3. Якщо в кінцевій симплекс-таблиці елементи першого стовпця додатні і серед від'ємних елементів першого рядка є хоч би один додатний елемент, а в стовпці, що відповідає цьому додатному елементу, інші елементи від'ємні, задача лінійного програмування не має оптимального рішення.

2.5. Знаходження допустимих рішень задачі лінійного програмування

При розв'язанні задачі лінійного програмування табличним симплекс-методом передбачалося, що на початку першого кроку буде відоме яке-небудь допустиме рішення, тобто всі базисні змінні додатні. Проте в загальному випадку задача лінійного програмування, приведена до початкового вигляду виразів (2.27) і (2.28), разом з додатними містить і від'ємні значення β_{k+i}. Це означає, що одна або декілька базисних змінних у початковому розв'язанні набувають від'ємних значень. Оскільки за умовою задачі ЛП усі змінні мають бути невід'ємними, наявність від'ємних базисних змінних свідчить про те, що вихідне рішення не є допустимим (не належить області допустимих рішень).

Для знаходження допустимого рішення, яке буде вихідним при пошуку оптимального рішення, можна використати ту саму процедуру симплекс-методу. У той же час алгоритм пошуку допустимого рішення дещо відрізнятиметься від алгоритму пошуку оптимального рішення.

Нехай у вихідній симплекс-таблиці (табл. 2.12) елементи $-\beta_{k+2}$ і $-\beta_{k+l}$ першого стовпця мають від'ємне значення. Це означає, що рішення

$$\overline{x}_I = (0,0,\ldots,0,\beta_{k+1},-\beta_{k+2},\ldots,-\beta_{k+l},\ldots,\beta_{k+m}).$$

не є допустимим і допустиме рішення необхідно знайти.

Таблиця 2.12

БП	СП				
	СЧ	x_1	x_2	…	x_k

$L(\overline{x})$	γ_0	ρ_1	ρ_2	...	ρ_k
x_{k+1}	β_{k+1}	$\nu_{k+1,1}$	$\nu_{k+1,2}$	...	$\nu_{k+1,m}$
x_{k+2}	$-\beta_{k+2}$	$-\nu_{k+2,1}$	$\nu_{k+2,2}$		$-\nu_{k+2,m}$
...	...	...	...	...	...
x_{k+l}	$-\beta_{k+l}$	$\nu_{k+l,1}$	$-\nu_{k+l,2}$		$\nu_{k+l,m}$
...	...	...	...	...	...
x_{k+m}	β_{k+m}	$\nu_{k+m,1}$	$\nu_{k+m,2}$		$\nu_{k+m,k}$

Алгоритм пошуку допустимого рішення полягає в такому.

1. Серед елементів першого стовпця вибираємо будь-який від'ємний елемент. Нехай цим елементом є $-\beta_{k+2}$.

2. У рядку з вибраним від'ємним елементом знаходимо елементи, однакові з ним за знаком. Нехай це будуть елементи $-\nu_{k+2,1}$ і $-\nu_{k+2,m}$.

3. Визначаємо відношення від'ємного вільного члена до кожного від'ємного елемента рядка і знаходимо найменше з цих відношень. Нехай

$$\frac{-\beta_{k+2}}{-\nu_{k+2,1}} < \frac{-\beta_{k+2}}{-\nu_{k+2,m}}.$$

Тоді стовпець, у якому розташовується елемент $-\nu_{k+2,1}$, вибираємо в якості дозвільного стовпця.

4. У дозвільному стовпці знаходимо елементи, однакові за знаком з відповідними вільними членами (це можуть бути і від'ємні елементи, якщо відповідні вільні члени від'ємні).

5. Визначаємо відношення кожного вільного члена до відповідного елемента дозвільного стовпця. Той елемент дозвільного стовпця, для якого це відношення мінімальне, буде дозвільним елементом, а рядок, у якому він розташований, - дозвільним рядком.

6. Використовуючи правила симплекс-перетворення, переходимо до нової симплекс-таблиці, у якій аналізуємо елементи першого стовпця. За наявності серед них одного або декількох від'ємних елементів повторюємо операції за п.п. 1÷5. Процедура триває, поки не буде знайдено допустиме рішення. Як тільки допустиме рішення знайдено, переходимо до пошуку

оптимального рішення, використовуючи раніше описаний табличний алгоритм симплекс-методу.

Відмінність описаного алгоритму від алгоритму пошуку оптимального рішення полягає в тому, що при пошуку допустимого рішення аналізується не перший рядок, а перший стовпець симплекс-таблиці. В усьому ж іншому обидва алгоритми ідентичні.

Розглянемо послідовність операцій пошуку допустимого рішення на прикладі.

Приклад 2.6. Знайти невід’ємні значення змінних $x_1, \ldots, x_8$, що задовольняють систему обмежень

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + x_3 &= 4; \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 10; \\
2x_1 - x_2 + x_5 &= 2; \\
5x_1 + 2x_2 - x_6 &= 10; \\
x_1 + 2x_2 - x_7 &= 8; \\
-x_1 + 2x_2 - x_8 &= 4
\end{aligned}
$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

Графічне розв’язання задачі подано на рис. 2.13.

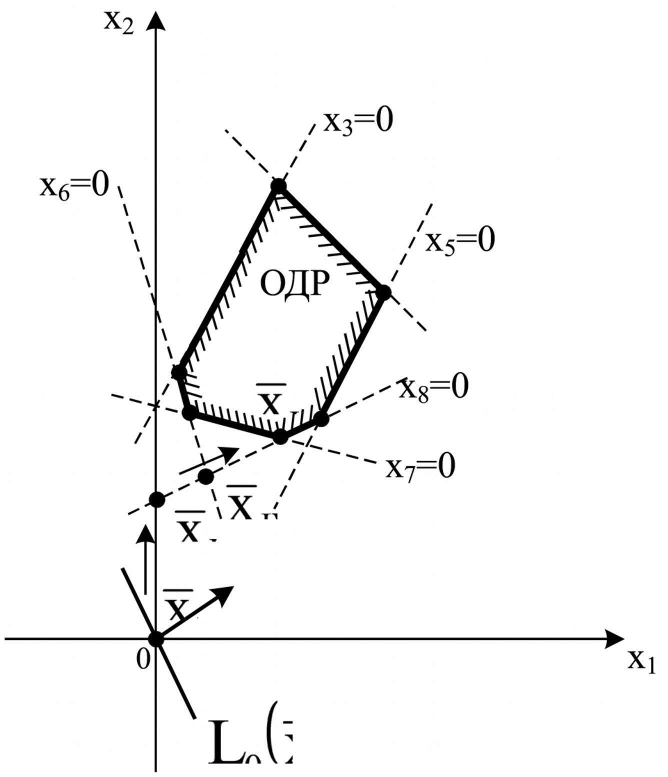

Рис. 2.13

Для розв’язання цієї задачі симплекс-методом представимо рівняння-обмеження і цільову функцію як

$$
\begin{aligned}
&x_3 = 4 - (-2x_1 + x_2);\\
&x_4 = 10 - (x_1 + x_2);\\
&x_5 = 2 - (2x_1 - x_2);\\
&x_6 = -10 - (-5x_1 - 2x_2);\\
&x_7 = -8 - (-x_1 - 2x_2);\\
&x_8 = -4 - (x_1 - 2x_2);\\
&L(\overline{x}) = 0 - (4x_1 + 2x_2),
\end{aligned}
$$

де x_1, x_2 - вільні змінні;

$x_3, \ldots, x_8$ - базисні змінні.

Заповнимо вихідну симплекс-таблицю (табл. 2.13).

Таблиця 2.13

$\leftarrow$

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2

$L(\overline{x})$	0	4	2
x_3	4	-2	1
x_4	10	1	1
x_5	2	2	-1
x_6	-10	-5	-2
x_7	-8	-1	-2
↑ x_8	-4	1	-2

Вважаючи вільні змінні $x_1 = x_2 = 0$, отримаємо

$$x_3 = 4;\ x_4 = 10;\ x_5 = 2;\ x_6 = -10;\ x_7 = -8;\ x_8 = -4.$$

Оскільки серед базисних змінних є від'ємні, очевидно, рішення

$$\overline{x}_I = (0;\ 0;\ 4;\ 10; 2; -10; -8;\ -4)$$

не є допустимим. Це підтверджує і рис. 2.13 (точка $\overline{x}_I$ знаходиться поза межами ОДР). Серед елементів першого стовпця від'ємними є $x_6 = -10;\ x_7 = -8;\ x_8 = -4$. Для пошуку допустимого рішення можна вибрати будь-який з них. Проте з метою швидкого досягнення допустимого рішення доцільно вибрати той, який має найменше абсолютне значення, тобто -4.

Розглянемо рядок при змінній x_8. Елемент, що знаходиться на перетині цього рядка і стовпця при x_2, має однаковий знак з вільними членами. Тому стовпець при змінній x_2 буде дозвільним стовпцем.

У дозвільному стовпці визначаємо елементи, однакові за знаком з вільними членами. Такими елементами є елементи, що знаходяться на перетині дозвільного стовпця і рядків при змінних x_3, x_4, x_6, x_7, x_8. Мінімальне відношення вільного члена до елемента дозвільного стовпця, однакового з ним за знаком, буде для останнього рядка. Отже, рядок при змінній x_8 буде дозвільним рядком, а елемент -2, обведений кружком, - дозвільним елементом. Таким чином, на першому кроці змінна x_2 має бути переведена в базисні, а x_8 - у вільні. Користуючись правилами симплекс-перетворення, заповнимо другу симплекс-таблицю (табл. 2.14).

Таблиця 2.14

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_8
$L(\bar{x})$	-4	5	1
x_3	2	-1,5	0,5
x_4	8	1,5	0,5
x_5	4	1,5	-0,5
x_6	-6	-6	-1
↑ x_7	-4	-2	-1
x_2	2	-0,5	-0,5

У результаті першого кроку отримуємо рішення

$$\bar{x}_{II} = (0;\ 2;\ 2; 8; 4; -6; -4; -2),$$

яке також поки що не є допустимим (рис. 2.13). Серед від'ємних елементів першого стовпця вибираємо елемент, що дорівнює -4, у рядку при змінній x_7. У цьому рядку всі елементи від'ємні. Оскільки

$$\frac{-4}{-2} < \frac{-4}{-1},$$

стовпець при змінній x_1 буде дозвільним стовпцем. Відношення вільного члена до елемента дозвільного стовпця, однакового з ним за знаком, буде мінімальним для рядка при x_7. Отже, рядок при x_7 є дозвільним рядком. На другому кроці пошуку допустимого рішення змінну x_1 слід перевести в базисні, а змінну x_7 - у вільні.

У результаті виконання симплекс-перетворень на другому кроці приходимо до наступної симплекс-таблиці (табл. 2.15).

Таблиця 2.15

БП	СП		
	СЧ	x_7	x_8
$L(\overline{x})$	-14	2,5	-1,5
x_3	5	-0,75	1,25
x_4	5	0,75	-0,25
x_5	1	0,75	-1,25
x_6	6	-3	2
x_1	2	-0,5	0,5
x_2	3	-0,25	-0,25

Рішення, отримане на другому кроці,

$$\overline{x}_{III} = (2;3;5;5;1;6;0;0)$$

є допустимим рішенням, що випливає також і з рис. 2.13. Подальший пошук оптимального рішення здійснюється відповідно до алгоритму, описаного в п. 2.4.

Зазначимо, що якби на початку другого кроку серед від’ємних елементів першого стовпця (табл. 2.14) був вибраний елемент з великим абсолютним значенням, тобто елемент -6, то в результаті другого кроку було б отримано рішення $\overline{x}_{IV}$, яке не є допустимим. Для досягнення допустимого рішення необхідно було б зробити ще один крок, тобто перейти від $\overline{x}_{IV}$ до рішення $\overline{x}_{III}$. Таким чином, як зазначалося раніше, вибір меншого за абсолютним значенням від’ємного елемента першого стовпця сприяє швидкому досягненню допустимого рішення.

На закінчення розглянемо випадок, коли задача лінійного програмування не має допустимих рішень. Це означає, що система рівнянь-обмежень неспільна, тобто не існує невід’ємних змінних, які задовольняли б цю систему. З'ясуємо, які ознаки має кінцева симплекс-таблиця за відсутності допустимих рішень.

Приклад 2.7. Знайти невід’ємні значення змінних x_1, що задовольняють систему обмежень

$$\begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 10; \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= 8; \\ x_1 - x_2 - x_5 &= 2; \\ x_1 + x_2 + x_6 &= 10 \end{aligned}$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -4x_1 - 2x_2.$$

У якості вільних змінних виберемо змінні x_1 і x_2. Тоді базисними змінними будуть x_3, x_4, x_5 і x_6. Графічні побудови для цієї задачі в координатах x_1Ox_2 наведено на рис. 2.14. З рисунка випливає, що області допустимих рішень не існує і, отже, задача ЛП не має допустимих розв'язків.

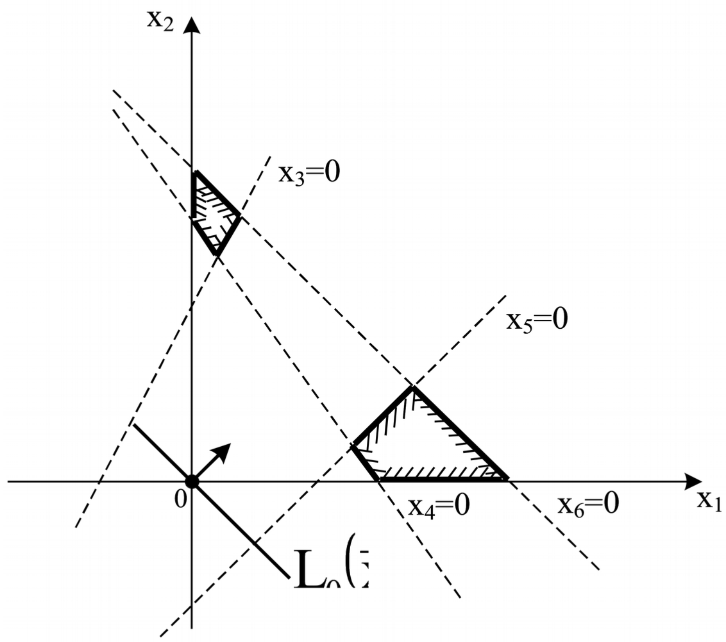

Рис. 2.14

Приведемо систему рівнянь-обмежень і цільову функцію до вигляду, зручного для заповнення симплекс-таблиці:

$$\begin{aligned}
x_3 &= -10 - (5x_1 - 2x_2);\\
x_4 &= -8 - (-2x_1 - x_2);\\
x_5 &= -2 - (-x_1 + x_2);\\
x_6 &= 10 - (x_1 + x_2);\\
L(\overline{x}) &= 0 - (4x_1 + 2x_2).
\end{aligned}$$

Пошук допустимого рішення відповідно до вищеописаного алгоритму призводить до послідовності симплекс-таблиць 2.16-2.18.

Таблиця 2.16

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\bar{x})$	0	4	2
x_3	-10	5	-2
x_4	-8	-2	-1
x_5	-2	-1	1
x_6	10	1	1

Таблиця 2.17

БП	СП		
	СЧ	x_5	x_2
$L(\bar{x})$	-8	4	6
x_3	-20	5	3
x_4	-4	-2	-3
x_1	2	-1	-1
x_6	8	1	2

Таблиця 2.18

БП	СП		
	СЧ	x_5	x_4
$L(\bar{x})$	-16	0	2
x_3	-24	3	1
x_2	4/3	2/3	-1/3
x_1	10/3	-1/3	-1/3
x_6	16/3	-1/3	2/3

У рядку при змінній x_3 (табл. 2.18) вільний член від'ємний. Згідно з п. 2 алгоритму пошуку допустимого рішення в цьому рядку необхідно знайти елементи, однакові за знаком з вільним членом. Але такі елементи в рядку відсутні. Запишемо аналітичний вираз базисної змінної:

$$x_3 = -24 - x_4 - 3x_5. \qquad (2.38)$$

Очевидно, не знайдеться таких невід'ємних значень змінних x_3, x_4 і x_5, за умовою яких рівняння (2.38) було б справедливим. А це означає, що задача лінійного програмування не має допустимих розв'язань.

Таким чином, якщо в кінцевій симплекс-таблиці один або декілька елементів першого стовпця від'ємні, і хоч би в одному рядку, що відповідає одному з цих елементів, інші елементи додатні, задача лінійного програмування не має допустимих розв'язань.

Підводячи підсумок вищевикладеному, зазначимо, що в загальному випадку розв'язання задачі лінійного програмування розпочинається з пошуку допустимого рішення. Після того як знайдено одно з допустимих рішень, можна приступити до пошуку оптимального рішення. У процесі пошуку необхідно ретельно проаналізувати кожну симплекс-таблицю з метою виявлення ознак, що відповідають різним випадкам задачі ЛП. При виявленні однієї з цих ознак процедуру пошуку слід перервати і за кінцевою симплекс-таблицею зробити відповідні висновки.

2.6. Розв'язання задач лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями

Розглянуті вище методи можуть бути використані для розв'язання тільки тих задач лінійного програмування, у яких обмеження представлені у вигляді лінійних рівнянь. Нагадаємо, що задача ЛП з обмеженнями-рівняннями називається основною задачею лінійного програмування.

Проте в більшості практичних випадків обмеженнями задач ЛП є лінійні нерівності. Для того щоб розв'язати задачу ЛП з обмеженнями-нерівностями, її заздалегідь необхідно привести до канонічної форми. Розглянемо порядок переходу від задач ЛП з обмеженнями-нерівностями до задачі ЛП з обмеженнями-рівняннями.

Сформулюємо задачі лінійного програмування таким чином: знайти невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють систему обмежень

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \qquad (2.39$$

і обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = C_1x_1 - C_2x_2 + \ldots + C_jx_j + \ldots + C_nx_n. \qquad (2.40)$$

Обмеження приведеної задачі лінійного програмування задані у вигляді нерівностей. Розглянемо першу нерівність системи (2.39). Оскільки ліва частина нерівності більша за праву, віднімемо з лівої частини таку невід'ємну величину x_{n+1}, щоб нерівність перетворилася на рівняння

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1.$$

Аналогічно поступимо і з іншими нерівностями системи (2.39). Тоді обмеження набудуть вигляду

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n-x_{n+1}=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n-x_{n+2}=b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n-x_{n+i}=b_i; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n-x_{n+m}=b_m. \end{array} \qquad (2.41)$$

Змінні $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+i},\ldots,x_{n+m}$ невід'ємні. Тоді задача лінійного програмування перетвориться до виду: знайти невід'ємні значення змінних $x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$, що задовольняють обмеження (2.41) і обертають у мінімум цільову функцію (2.40). Ця задача вже є основною задачею лінійного програмування і її можна розв'язувати будь-яким з розглянутих вище методом.

Таким чином, перехід від задачі лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями до основної задачі ЛП здійснений шляхом додавання m змінних (за кількістю нерівностей у системі обмежень (2.39)). Тепер загальна кількість змінних задачі складе n+m, а кількість рівнянь-обмежень залишиться рівною m. Розширення вихідної задачі є природною "платою" за перехід до основної задачі лінійного програмування.

Якщо в системі обмежень зустрічається нерівність

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n\le b_i,$$

у якої ліва частина менша за праву, то до лівої частини цієї нерівності необхідно додати невід'ємну величину x_{n+i}. Тоді нерівність перетвориться в рівняння вигляду

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i.$$

І, нарешті, відмітимо ще одну обставину. Якщо система обмежень є системою нерівностей, то при переході до основної задачі лінійного програмування змінні $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+i},\ldots,x_{n+m}$ автоматично виражаються через змінні $x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n$. Отже, для подальшого розв'язання змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можна вибрати в якості вільних, а змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+j}, \ldots, x_{n+m}$ в якості базисних змінних. Під час аналізу результату розв'язання задачі ЛП повинні враховуватися тільки змінні $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$.

Приклад 2.8. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, що задовольняють систему обмежень

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \le 10, \\ &x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ &2x_1 + x_2 \le 10 \end{aligned}$$

і обертають у максимум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = x_1 + x_2.$$

Приведемо цю задачу до основної задачі лінійного програмування. Додамо до лівої частини першої і третьої нерівностей невід'ємні змінні x_1 і x_5, а з лівої частини другої нерівності віднімемо невід'ємну змінну x_4. Система обмежень задачі ЛП набуде вигляду

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ &x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ &2x_1 + x_2 + x_5 = 10. \end{aligned} \tag{2.42, а}$$

Згідно з виразом (1.29) задачу пошуку максимуму цільової функції $L(\bar{x})$ можна замінити задачею пошуку мінімуму функції:

$$L'(\bar{x}) = -L(\bar{x}) = -x_1 - x_2. \tag{2.42, б}$$

Тоді задача знаходження невід'ємних значень змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, що задовольняють обмеження (2.42, а) і обертають у мінімум цільову функцію (2.42, б), є вже основною задачею лінійного програмування.

2.7. Принцип двоїстості в задачах лінійного програмування

Повернемося до задачі організації комплексу засобів зв'язку.

У п. 2.1 ця задача була розглянута з точки зору мінімізації експлуатаційних витрат за умови забезпечення заданих об'ємів інформації, що передається в різних варіантах обстановки. Проте експлуатація комплексу пов'язана не лише з витратами, але і з отриманням прибутку. Наприклад, оплата абонентами телефонних переговорів приносить прибуток при експлуатації міжміської автоматичної телефонної мережі. Тому задачу організації комплексу можна розглядати і з точки зору отримання максимального прибутку при обмежених експлуатаційних витратах.

Введемо в розгляд питому вартість інформації. Такий показник широко використовується на практиці, зокрема він є вартістю одного слова при передачі телеграми. Питомою вартістю можна оцінювати і експлуатаційні витрати, і прибуток, одержаний при експлуатації комплексу засобів зв'язку. З урахуванням цього показника і розглянемо задачі організації комплексу.

Отже, організовується комплекс з n типів засобів зв'язку, призначений для роботи в різних варіантах обстановки. Значення показника ефективності одного комплекту j-го типу в i-му варіанті обстановки (об'єм інформації, що передається) складає v_{ij}. Допустимі витрати на експлуатацію комплекту j-го засобу дорівнюють c_j. Загальний об'єм інформації, необхідної для виконання задачі управління в i-му варіанті обстановки має бути не менше v_i.

Вимагається організувати такий комплекс засобів зв'язку, який би за заданими витратами на його експлуатацію забезпечував би отримання максимального прибутку.

Формалізуємо вказану задачу. Організувати комплекс з даної точки зору - це встановити питому вартість передачі інформації для j-го засобу.

Позначимо через y_1 питому вартість передачі інформації в першому варіанті обстановки, через y_2 - у другому варіанті обстановки і так далі. Тоді витрати, пов'язані з експлуатацією одного комплекту першого типу зв'язку, у будь-яких умовах обстановки дорівнюють

$$S_1 = v_{11}y_1 + v_{21}y_2 + \ldots + v_{i1}y_i + \ldots + v_{m1}y_m .$$

Але за умови витрати на експлуатацію комплекту першого типу засобів зв'язку не повинні перевищувати C_1. З урахуванням цієї обставини можна записати:

$$v_{11}y_1 + v_{21}y_2 + \ldots + v_{i1}y_i + \ldots + v_{m1}y_m \le C_1.$$

Аналогічно встановлюються обмеження на експлуатаційні витрати одного комплекту інших типів засобів зв'язку.

Якщо в першому варіанті обстановки вимагається передати інформацію об'ємом V_1, то прибуток складе V_1y_1, у другому варіанті прибуток складе V_2y_2 і так далі. Сумарний прибуток під час експлуатування комплексу дорівнюватиме

$$L(\bar{y}) = V_1y_1 + V_2y_2 + \ldots + V_iy_i + \ldots + V_my_m. \qquad (2.43)$$

Тоді задачу організації комплексу засобів зв'язку можна сформулювати таким чином: знайти такі невід'ємні значення змінних $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_m$, які задовольняли б систему обмежень

$$\begin{array}{l} v_{11}y_1 + v_{21}y_2 + \ldots + v_{i1}y_i + \ldots + v_{m1}y_m \le C_1; \\ v_{12}y_1 + v_{22}y_2 + \ldots + v_{i2}y_i + \ldots + v_{m2}y_m \le C_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ v_{1j}y_1 + v_{2j}y_2 + \ldots + v_{ij}y_i + \ldots + v_{mj}y_m \le C_j; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ v_{1n}y_1 + v_{2n}y_2 + \ldots + v_{in}y_i + \ldots + v_{mn}y_m \le C_n \end{array} \qquad (2.44)$$

і обертали в максимум цільову функцію (2.43).

Оскільки обмеженнями системи (2.44) є лінійні нерівності, а цільова функція (2.43) - лінійна функція змінних y_i, ця задача належить до класу задач лінійного програмування.

Неважко помітити, що задачі (2.3)-(2.4) і (2.43)-(2.44) взаємопов'язані. Назвемо задачу (2.3)-(2.4) вихідною задачею, а задачу (2.43)-(2.44) - двоїстою задачею лінійного програмування. Порівняння вихідної і двоїстої задач дозволяє зробити такі висновки.

1. Матриця коефіцієнтів при змінних в обмеженнях двоїстої задачі виходить транспонуванням, тобто заміною рядків стовпцям зі збереженням їх порядку, матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях вихідної задачі.

2. Кількість змінних і кількість обмежень-нерівностей у вихідній задачі дорівнюють відповідно n і m, а у двоїстій - відповідно m і n.

3. У правих частинах обмежень вихідної задачі розташовуються коефіцієнти при змінних цільової функції двоїстої задачі і навпаки.

4. Якщо в систему обмежень вихідної задачі входять нерівності вигляду "≥", то в систему обмежень двоїстої задачі - нерівності вигляду "≤".

5. Якщо у вихідній задачі вимагається мінімізувати цільову функцію, то у двоїстій задачі - максимізувати її.

Вихідна і двоїста їй задача утворюють пару задач, що називаються в лінійному програмуванні двоїстою парою. У загальному вигляді двоїста пара може бути представлена табл. 2.19.

Якщо в систему обмежень вихідної і двоїстої задачі входять тільки нерівності, ці задачі утворюють двоїсту пару симетричних задач. За наявності обмежень-рівнянь двоїста пара називається несиметричною. Істотною особливістю несиметричної пари є те, що змінна двоїстої задачі, яка відповідає рівності системи обмежень вихідної задачі, може набувати і від'ємних значень. Надалі основна увага буде зосереджена на розгляді симетричних задач, як найбільш поширених на практиці.

Таблиця 2.19

Вихідна	Двоїста
Знайти мінімум $L(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n$ при обмеженнях $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1,$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2,$ $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i,$ $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$	Знайти максимум $L(\overline{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_iy_i + \ldots + b_my_m$ п ри обмеженнях $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{i1}y_i + a_{m1}y_m \leq c_1,$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{i2}y_i + a_{m2}x_m \leq c_2,$ $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{ij}y_i + a_{mj}y_m \leq c_j,$ $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{in}y_i + a_{mn}y_m \leq c_n,$ $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$

Підкреслимо одну важливу обставину. Взаємозв'язок вихідної і двоїстої задач дозволяє встановити цілком певну відповідність між змінними цих задач. Правильна відповідність матиме місце тільки в тому випадку, якщо вихідна задача буде впорядкована, а саме: якщо у вихідній задачі цільова функція мінімізується, то обмеження-нерівності мають бути записані зі знаком "≥", і навпаки.

Для переходу від вихідної задачі до двоїстої зручно скористатися табл. 2.20. У верхньому рядку цієї таблиці записуються всі змінні вихідної задачі, у першому стовпці - змінні двоїстої задачі. Нижній рядок призначений для запису коефіцієнтів при змінних цільової функції, а останній стовпець - коефіцієнтів правої частини обмежень-нерівностей вихідної задачі. В інших клітинках таблиці записуються відповідні коефіцієнти при змінних системи обмежень вихідної задачі.

Таблиця 2.20

ДЗ	НЗ							
	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	…	b_i
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1y}	…	a_{1n}	≥	b_1
y_2			…	a_{2j}	…	a_{2n}	≥	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	≥	b_i
…			…		…			…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	≥	b_m
…	∧|	∧|	…	∧|	…	∧|	…	||
c_j	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	=	$L(\bar{y}$ / $L(\bar{x}$

Обмеження двоїстої задачі складаються таким чином. У лівій частині нерівності записується сума добутків змінних двоїстої задачі на елементи відповідного стовпця, а в правій частині - елемент на перетині останнього рядка і відповідного стовпця. Наприклад, для складання першого обмеження-нерівності (табл. 2.20) використовується перший і другий стовпець:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{i1}y_i + \ldots + a_{m1}y_m \le C_1.$$

Цільова функція двоїстої задачі записується як сума добутків елементів першого і останнього стовпця таблиці:

$$L(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_iy_i + \ldots + b_my_m.$$

Розглянемо приклад складання двоїстої задачі.

Приклад 2.9. Скласти задачу, двоїсту такій задачі лінійного програмування: знайти невід'ємні значення змінних x_1 і x_2, що задовольняють обмеження

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 \ge -6, \\ &x_1 + x_2 \le 9, \\ &3x_1 - x_2 \le 15 \end{aligned}$$

і обертають у максимум цільову функцію

$$L(\bar{x}) = 4x_1 + 2x_2. \qquad (2.45)$$

Передусім упорядкуємо вихідну задачу. Оскільки у вихідній задачі проводиться максимізація цільової функції, усі обмеження-нерівності мають бути записані зі знаком "≤". Тому для зміни знака обидві частини першої нерівності помножимо на -1. Тоді система обмежень набуде вигляду

$$\begin{aligned} &-x_1 + 2x_2 \le 8, \\ &x_1 + x_2 \le 9, \\ &3x_1 - x_2 \le 15. \end{aligned} \qquad (2.46)$$

Для переходу від вихідної до двоїстої задачі складемо табл. 2.21. Оскільки вихідна задача містить дві змінні і три обмеження-нерівності, у двоїстій задачі будуть три змінні і два обмеження-нерівності. При цьому обмеження-нерівності двоїстої задачі повинні записуватися зі знаком "≥".

Таблиця 2.21

ДЗ	ПЗ

	x_1	x_2	b_i
y_1	-1	2	6
y_2	1	1	9
y_3	3	-1	15
c_j	4	2	$L(\bar{y})$ / $L(\bar{x})$

Складемо перше обмеження двоїстої задачі. Для цього скористаємося першим і другим стовпцем табл. 2.21. Перемножуючи відповідні елементи стовпців і підсумовуючи, отримаємо

$$-1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \geq 4. \qquad (2.47, а)$$

Аналогічно складається друге обмеження двоїстої задачі, причому в складанні другого обмеження бере участь перший і третій стовпці таблиці:

$$2y_1 + y_2 - y_3 \geq 2. \qquad (2.47, б)$$

Цільова функція двоїстої задачі записується як сума добутків відповідних елементів першого і останнього стовпців:

$$L(\bar{y}) = 6y_1 + 9y_2 + 15y_3. \qquad (2.48)$$

Тоді двоїсту задачу можна сформулювати так: знайти невід’ємні значення змінних y_1, y_2, y_3, що задовольняють обмеження (2.47) і обертають у мінімум цільову функцію (2.48).

Існування двоїстої пари дозволяє в ряді випадків істотно спростити процедуру розв’язання задачі лінійного програмування. Справа в тому, що складність обчислень зазвичай зростає зі збільшенням кількості обмежень. Але з розглянутого прикладу 2.9 випливає, що перехід до двоїстої задачі супроводжується зменшенням кількості нерівностей, що становлять систему обмежень двоїстої задачі. Тому, якщо кількість обмежень вихідної задачі велика, доцільно перейти до двоїстої задачі, розв’язати її і, використовуючи відповідність між змінними двоїстої пари, знайти розв’язок вихідної задачі.

В інших випадках початкове рішення вихідної задачі не є допустимим. Щоб уникнути зайвих обчислень при пошуку допустимого рішення, тут доцільно перейти до двоїстої задачі.

Для того щоб встановити зв'язок між розв’язаннями вихідної і двоїстої задач лінійного програмування, розглянемо такий приклад.

Приклад 2.10. Розв’язати вихідну (2.45)-(2.46) і двоїсту (2.47)-(2.48) задачі лінійного програмування.

Спочатку розв’яжемо вихідну задачу. Від задачі ЛП з обмеженнями-нерівностями перейдемо до основної задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3&=6,\\ x_1-x_2+x_4&=9,\\ 3x_1-x_2+x_5&=15, \end{aligned}$$

$$\max_{\{x\}} L(\bar{x}) = \min_{\{x\}} L'(\bar{x}) = \min_{\{x\}}(-4x_1-2x_2).$$

У якості вільних змінних виберемо змінні x_1 і x_2. Тоді базисні змінні x_3, x_4, x_5 і цільову функцію $L'(\bar{x})$ можна записати так:

$$\begin{aligned} x_3&=6-(-x_1+2x_2);\\ x_4&=9-(-x_1+x_2);\\ x_5&=15-(3x_1-x_2);\\ L'(\bar{x})&=0-(4x_1-2x_2). \end{aligned}$$

Послідовність симплекс-таблиць, що відповідають етапам розв’язання задачі, має вигляд табл. 2.22-2.24.

Таблиця 2.22

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\bar{x})$	0	4	2
x_3	6	-1	2
x_4	9	1	1
x_5	15	3	-1

Таблиця 2.23

БП	СП		
	СЧ	x_5	x_2
$L(\bar{x})$	-20	-4/3	10/3
x_3	11	1/3	5/3
x_4	4	-1/3	4/3
x_1	5	1/3	-1/3

Таблиця 2.24

БП	СП		
	СЧ	x_5	x_4
$L(\bar{x})$	-30	-1/2	-5/2
x_3	6	3/4	-5/4
x_2	3	-1/4	3/4
x_1	6	1/4	1/4

Оптимальним рішенням двоїстої задачі є рішення (з урахуванням додаткових змінних)

$$\overline{x}^{*} = (6;3;6;0;0).$$

При цьому

$$L_{min}(\overline{x}^{*}) = -30; \quad L_{max}(\overline{x}^{*}) = 30.$$

Приступимо до розв'язання двоїстої задачі. Перейдемо в обмеженнях двоїстої задачі від нерівностей до рівності

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 &= 4, \\ 2y_1 + y_2 - y_3 - y_5 &= 2. \end{aligned}$$

У якості вільних змінних виберемо змінні y_1, y_2, y_3 і виразимо базисні змінні і цільову функцію через вільні:

$$\begin{aligned} x_3 &= -10 - (5x_1 - 2x_2); \\ y_4 &= -4 - (y_1 - y_2 - 3y_3); \\ y_5 &= -2 - (-2y_1 - y_2 + y_3); \\ L(\overline{y}) &= 0 - (-6y_1 - 9y_2 - 15y_3). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Етапи розв'язання двоїстої задачі представлені послідовністю симплекс-таблиць (табл. 2.25-2.27).

Оптимальне рішення двоїстої задачі

$$\overline{y}^{*} = \left(0; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0\right)$$

доставляє цільовій функції $L(\overline{y})$ мінімальне значення

$$L_{min}(y^{*}) = 30.$$

Таблиця 2.25 Таблиця 2.26 Таблиця 2.27

← ←

БП	СП			
	СЧ	y_1	y_2	y_3
$L(\bar{y})$	0	-6	-9	-15
↑ y_4	-4	1	-1	-3
y_5	-2	-2	-1	1

⇒

БП	СП			
	СЧ	y_1	y_5	y_3
$L(\bar{y})$	18	12	-9	-24
↑ y_4	-2	3	-1	-4
y_2	2	2	-1	-1

⇒

БП	СП			
	СЧ	y_1	y_5	y_4
$L(\bar{y})$	30	-6	-3	-6
y_3	1/2	-3/4	1/4	-1/4
y_2	5/2	5/4	-3/4	-1/4

Порівняємо кінцеві симплекс-таблиці (табл. 2.24 і 2.27) вихідної і двоїстої задач. У першому стовпці кінцевої симплекс-таблиці двоїстої задачі записані елементи верхнього рядка кінцевої симплекс-таблиці вихідної задачі, але зі зворотним знаком, і навпаки. Це означає, що базисні змінні двоїстої задачі відповідають вільним змінним вихідної задачі, і навпаки, вільні змінні двоїстої задачі - базисним змінним вихідної. Оскільки змінна y_1 відповідає змінній x_3, змінна y_5 - змінній x_2 і так далі, у загальному вигляді відповідність можна виразити так:

$$y_i \leftrightarrow x_{n+i};$$
$$y_{m+j} \leftrightarrow x_j,$$

де $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

Відповідність між змінними вихідної і двоїстої задач зручно визначати за допомогою графа відповідності, зображеного на рис. 2.15.

Для побудови графа використовуються початкові вирази для обмежень вихідної і двоїстої задач, приведених до канонічної форми. У верхньому рядку графа записуються вільні змінні, а в правому стовпці - базисні змінні початкової задачі. Лівий стовпець містить вільні змінні, а нижній рядок - базисні змінні двоїстої задачі. Стрілки вказують, якій змінній вихідної задачі відповідає та або інша змінна двоїстої задачі і навпаки.

Пояснимо, яким чином знаходиться розв'язок вихідної задачі, якщо відомо розв'язання двоїстої, за допомогою наступного прикладу.

Приклад 2.11. Знайти оптимальне розв'язок вихідної задачі, використовуючи розв'язання двоїстої (2.47)-(2.48), табличним симплекс-методом.

Розв'язання двоїстої задачі табличним симплекс-методом розглянуто у прикладі 2.10. Кінцева симплекс-таблиця представлена табл. 2.27. Для встановлення відповідності між змінними вихідної і двоїстої задач побудуємо граф відповідності (рис. 2.16).

Оскільки двоїста задача містить три вільні і дві базисні змінні, вихідна задача міститиме дві вільні і три базисні змінні.

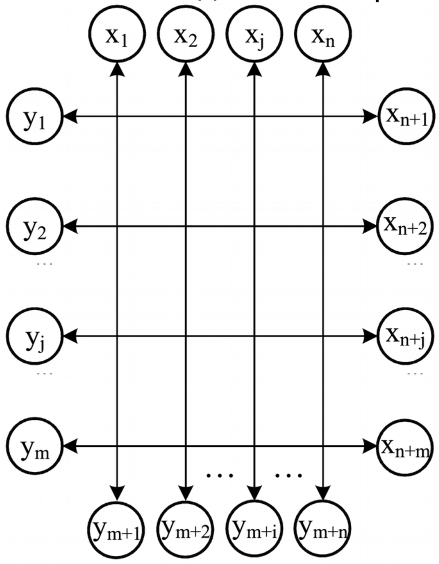

Рис. 2.15

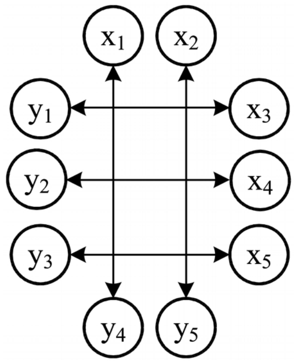

Рис. 2.16

Звернемося до табл. 2.27. Базисні змінні y_2 і y_3 двоїстої задачі відповідають вільним змінним вихідної задачі. З графа відповідності випливає, що

$$y_2 \leftrightarrow x_4;$$
$$y_3 \leftrightarrow x_5.$$

Отже, в оптимальному розв'язанні вихідної задачі змінні x_4^* і x_5^* дорівнюватимуть нулю, як вільні змінні.

Вільні змінні y_1, y_4 і y_5 двоїстої задачі відповідають базисним змінним вихідної задачі.

Користуючись графом відповідності, встановлюємо, що

$$y_1 \leftrightarrow x_3,$$
$$y_4 \leftrightarrow x_1,$$
$$y_5 \leftrightarrow x_2.$$

Значення базисних змінних вихідної задачі визначаємо, аналізуючи верхній рядок кінцевої симплекс-таблиці двоїстої задачі. Оскільки елемент верхнього рядка табл. 2.27, який відповідає змінній y_1^*, дорівнює -6, значення змінної x_3^* вихідної задачі дорівнюватиме 6. Аналогічно визначаються $x_2^* = 3, x_1^* = 6$.

Таким чином, оптимальним розв'язком вихідної задачі є рішення

$$\overline{x}^* = (6;3;6;0;0).$$

При цьому

$$L_{min}(\overline{y}^*) = L_{max}(\overline{x}^*) = 30.$$

Порівнюючи цей результат з результатом розв'язання вихідної задачі симплекс-методом, переконуємося в повній їх ідентичності.

На закінчення сформулюємо деякі загальні висновки, які випливають з так званої теореми двоїстості.

1. Якщо одна з задач двоїстої пари має оптимальне рішення, то і двоїста їй задача має оптимальне рішення, причому мінімум цільової функції вихідної задачі дорівнює максимуму цільової функції двоїстої задачі і навпаки.

2. Якщо одна з задач двоїстої пари не має оптимального рішення (ОДР не обмежена), то двоїста їй задача не має допустимих рішень (система обмежень неспільна) і навпаки.

Таким чином, при будь-якому результаті розв'язання задачі лінійного програмування висновки теореми двоїстості дозволяють відповісти на питання, чи має розв'язок двоїста задача, а якщо має, то знайти його, не вдаючись до процедури симплекс-методу. У цьому полягає велика практична значущість сформульованих висновків.

3. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Особливості задач цілочислового програмування

При більш уважному розгляді задачі організації комплексу засобів зв'язку, наведеного вище, можна помітити, що змінні x_j можуть набувати тільки цілочислових значень. Це обмеження випливає з фізичної суті змінних, оскільки до складу комплексу не може входити, наприклад, дробове число радіостанцій або комплектів інших засобів зв'язку. Задачі математичного програмування, у яких на всі змінні або їх частину накладається вимога цілочисловості, належать до задач цілочислового програмування (ЦП).

При лінійній цільовій функцій і лінійних обмеженнях (а саме такі задачі ЦП розглядатимуться надалі) задачі цілочислового програмування формулюється так: знайти такі невід'ємні значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, x_n$, які задовольняли б обмеження

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \ge b_i; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{array} \tag{3.1}$$

де $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ – цілі числа,
і обертали в мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_jx_j + \dots + C_nx_n. \tag{3.2}$$

У такій постановці (усі змінні повинні задовольняти вимоги цілочисловості) задача (3.1)-(3.2) належить до повністю цілочислових задач. Якщо ж вимоги цілочисловості накладаються не на всі, а на частину змінних, задача є частково цілочисловою задачею.

Строго кажучи, вимога цілочисловості змінних призводить до того, що, незважаючи на лінійний характер обмежень і цільової функції, задача переходить у клас нелінійних задач. На рис. 3.1 зображена область допустимих рішень задачі лінійного програмування (заштрихований багатокутник). Якщо накласти вимогу цілочисловості змінних, то область допустимих рішень перетворюється на систему точок.

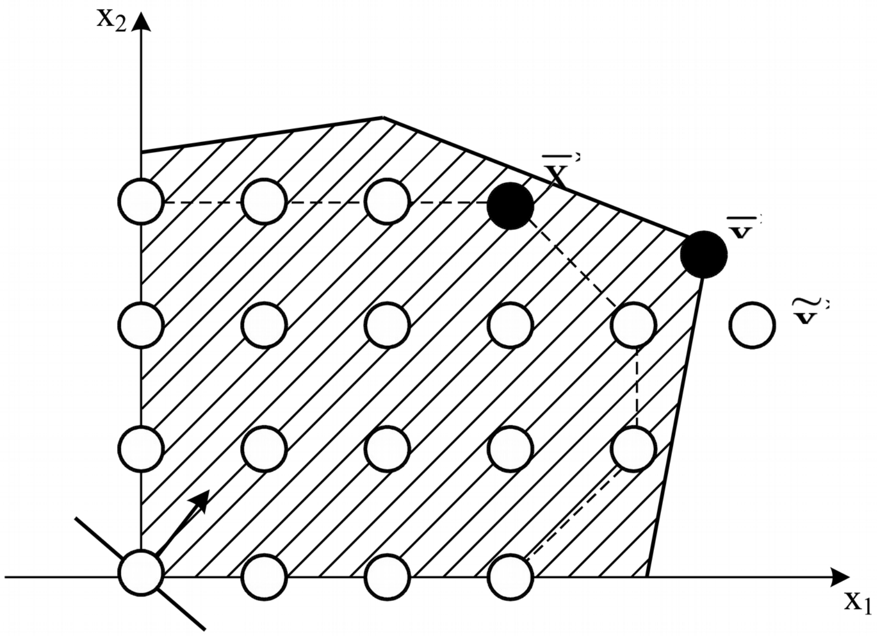

Рис. 3.1

Здавалося б, задачу цілочислового програмування можна розв’язати досить просто. Для цього, не звертаючи уваги на вимогу цілочисловості змінних, необхідно знайти оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування, а потім дробові значення змінних округлити до найближчих цілих чисел. Проте, незважаючи на певну логіку приведених міркувань, подібний шлях розв’язання задачі цілочислового програмування може привести до далеко не оптимального рішення. На рис. 3.1 показано оптимальне рішення $\bar{x}^*$, округлене значення $\tilde{x}^*$ оптимального рішення $\bar{x}^*$ задачі лінійного програмування і оптимальне рішення $\bar{x}^*_{ц}$ задачі цілочислового програмування. З рисунка видно, що округлене значення оптимального рішення задачі ЛП і оптимальне рішення задачі ЦП істотно відрізняються один від одного.

Таким чином, для розв'язання задачі ЦП необхідно застосовувати специфічні методи, що враховують вимоги цілочисловості змінних. До таких методів належать метод відсічних площин і метод гілок і меж.

3.2. Метод відсічних площин

Метод відсічних площин полягає в тому, що в систему обмежень задачі, яка не враховує вимоги цілочисловості, вводяться додаткові обмеження. Кожне додаткове обмеження зв'язує частину зовнішніх цілочислових точок і ніби відсікає ту частину ОДР, яка не містить цілочислових значень змінних (звідси і назва методу). Додаткові обмеження спільно з основними утворюють нову область допустимих рішень (на рис. 3.1 позначена пунктиром), межі якої проходять через цілочислові точки. Очевидно, будь-яка вершина багатокутника нової області допустимих рішень відповідає тільки цілочисловим значенням змінних. Якщо тепер знайти вершину, найбільш віддалену від початку координат у напрямі спадання цільової функції, то ця вершина і буде оптимальним рішенням задачі цілочислового програмування.

Розглянемо процедуру розв'язання задачі цілочислового програмування методом відсічних площин. Не враховуватимемо вимоги цілочисловості змінних. Тоді задача (3.1)-(3.2) буде зображати собою звичайну задачу лінійного програмування. Розв'язуючи цю задачу симплекс-методом, знайдемо її оптимальне рішення. Якщо змінні, що становлять оптимальне рішення задачі ЛП, цілочислові, отримане рішення є оптимальним і для задачі ЦП.

Нехай у результаті розв'язання задачі ЛП отримано оптимальне рішення $\overline{x}^*$. Для визначеності приймемо змінні $\overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*, \ldots, \overline{x}_k^*$ вільними, а $\overline{x}_{k+1}^*, \overline{x}_{k+2}^*, \ldots, \overline{x}_{k+m}^*$ - базисними.

Тоді відповідно до кінцевої симплекс-таблиці можна записати:

$$
\begin{aligned}
&x^*_{k+1} = \beta_{k+1} - (\alpha_{k+1,1}x^*_1 + \alpha_{k+1,2}x^*_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x^*_k),\\
&x^*_{k+2} = \beta_{k+2} - (\alpha_{k+2,1}x^*_1 + \alpha_{k+2,2}x^*_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k}x^*_k),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&x^*_{k+l} = \beta_{k+l} - (\alpha_{k+l,1}x^*_1 + \alpha_{k+l,2}x^*_2 + \ldots + \alpha_{k+l,k}x^*_k),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&x^*_{k+m} = \beta_{k+m} - (\alpha_{k+m,1}x^*_1 + \alpha_{k+m,2}x^*_2 + \ldots + \alpha_{k+m,k}x^*_k).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Оскільки вільні змінні у складі рішення $\bar{x}^*$ дорівнюють нулю, то

$$\bar{x}^*_1 = (0;0;0;\beta_{k+1};\beta_{k+2};\ldots,\beta_{k+m}).$$

Нехай в оптимальному рішенні $x^*_{k+l} = \beta^*_{k+l}$ - дробове число.

Розглянемо рівняння

$$x^*_{k+l} = \beta_{k+l} - (\alpha_{k+l,1}x^*_1 + \alpha_{k+l,2}x^*_2 + \ldots + \alpha_{k+l,k}x^*_k),$$

яке перетворимо так:

$$\alpha_{k+l,1}x^*_1 + \alpha_{k+l,2}x^*_2 + \ldots + \alpha_{k+l,k}x^*_k + x^*_{k+l} = \beta_{k+l}. \tag{3.4}$$

Позначимо через $\lfloor\alpha_{ij}\rfloor$ найбільше ціле число, яке не є більшим від α_{ij}. Оскільки $\lfloor\alpha_{ij}\rfloor \le \alpha_{ij}$, можна записати

$$\lfloor\alpha_{k+l,1}\rfloor x^*_1 + \lfloor\alpha_{k+l,2}\rfloor x^*_2 + \ldots + \lfloor\alpha_{k+l,k}\rfloor x^*_k + x^*_{k+l} \le \beta_{k+l}. \tag{3.5}$$

Якщо до змінних пред'явити вимогу цілочисловості, то в лівій частині виразу (3.5) буде записано ціле число. Але тоді стає справедливою така нерівність:

$$\lfloor\alpha_{k+l,1}\rfloor x^*_1 + \lfloor\alpha_{k+l,2}\rfloor x^*_2 + \ldots + \lfloor\alpha_{k+l,k}\rfloor x^*_k + x^*_{k+l} \le \lfloor\beta_{k+l}\rfloor. \tag{3.6}$$

Віднімемо з виразу (3.6) вираз (3.4). Позначаючи

$$\lfloor\alpha_{ij}\rfloor - \alpha_{ij} = \gamma_{ij}; \ \lfloor\beta_i\rfloor - \beta_i = \rho_i, \tag{3.7}$$

отримаємо

$$\gamma_{k+l,1}x^*_1 + \gamma_{k+l,2}x^*_2 + \ldots + \gamma_{k+l,k}x^*_k \le \rho_{k+l}. \tag{3.8}$$

Нерівність (3.8) і є додатковим обмеженням, що враховує цілочисловість, принаймні змінної x_{k+1}. Перейдемо у вираз (3.8) від нерівності до рівняння. Для цього до лівої частини (3.8) додамо невід'ємну змінну y_1:

$$\gamma_{k+1,1}x_1^* + \gamma_{k+1,2}x_2^* + \ldots + \gamma_{k+1,k}x_k^* + y_1 = \rho_{k+1}. \qquad (3.9)$$

Якщо представити вираз (3.9) у вигляді

$$y_1 = \rho_{k+1} - \left(\gamma_{k+1,1}x_1^* + \gamma_{k+1,2}x_2^* + \ldots + \gamma_{k+1,k}x_k^*\right), \qquad (3.10)$$

то вираз (3.3) спільно з виразом (3.10) складає систему обмежень нової задачі ЛП, у якій вже врахована вимога цілочисловості змінної x_{k+1}. Для розв'язання нової задачі ЛП до кінцевої симплекс-таблиці задачі (3.1)-(3.2) додамо рядок, у якому запишемо значення коефіцієнтів при змінних $x_{k+1,i}$ і вільного члена ρ_{k+1} у виразі (3.10). Симплекс-таблиця, що вийшла, містить вже m+1 базисних змінних. Застосовуючи симплекс-перетворення, знайдемо оптимальний розв'язок нової задачі ЛП. Якщо змінні, що становлять оптимальний розв'язок нової задачі ЛП, цілочислові, процес обчислень завершується. За наявності хоч би однієї дробової змінної вводиться ще одно обмеження і так далі. Процедура повторюється до тих пір, поки не буде знайдено оптимальне цілочислове рішення.

Розглянемо приклад розв'язання задачі цілочислового програмування методом відсічних площин. Для наочності супроводимо розв'язання графічними побудовами.

Приклад 3.1. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, що задовольняють обмеження

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 6, \end{aligned} \qquad (3.11)$$

де x_1, x_2 - цілі числа, що обертають у мінімум цільову функцію

$$L(\overline{x}) = -x_1 - 4x_2. \qquad (3.12)$$

Знайдемо розв’язок задачі ЛП без урахування вимоги цілочисловості змінних. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь:

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3&=2,\\ 3x_1+2x_2+x_4&=6. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Задача (3.12)-(3.13) є основною задачею лінійного програмування. Виберемо змінні x_1 і x_2 в якості вільних змінних. Тоді базисні змінні і цільову функцію запишемо як

$$\begin{aligned} x_3&=2-(-x_1+2x_2),\\ x_4&=6-(3x_1+2x_2), \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$L(\overline{x})=0-(x_1+4x_2). \tag{3.15}$$

На рис. 3.2 зображена область допустимих рішень даної задачі ЛП (багатокутник, утворений осями координат і прямими $x_3=0$ і $x_4=0$). Тут же світлими кільцями показані цілочислові рішення, що задовольняють обмеженням (3.11). Оптимальне рішення задачі ЛП (вершина $\overline{x}_1^*$, позначена темним кільцем) містить, як це випливає з рисунка, змінну x_2, яка набуває дробового значення.

Переконаємося в цьому, розв’язавши задачу симплекс-методом (табл. 3.1-3.3).

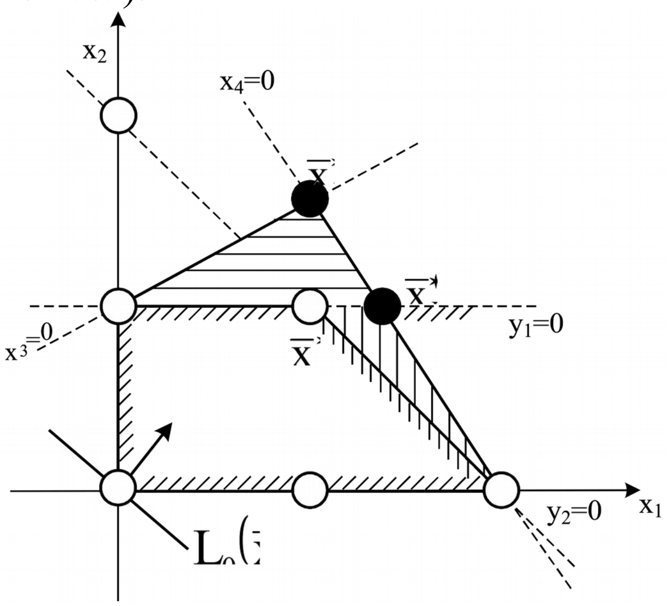

Рис. 3.2

Таблиця 3.1

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\overline{x})$	0	1	4
x_3	2	-1	2
x_4	6	3	2

$\Rightarrow$

Таблиця 3.2

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_3
$L(\overline{x})$	-4	3	-2
x_2	1	-1/2	1/2
x_4	4	4	-1

$\Rightarrow$

Таблиця 3.3

БП	СП		
	СЧ	x_4	x_3
$L(\overline{x})$	-7	-3/4	-5/4
x_2	3/2	1/8	3/8
x_1	1	1/4	-1/4

Насправді $x_2^* = 3/2$, тому рішення

$$\overline{x}_1^* = (1; 3/2; 0; 0)$$

не є оптимальним рішенням задачі цілочислового програмування.

Запишемо вираз для $\overline{x}_2^*$:

$$x_2^* = 3/2 - (1/8 x_4^* + 3/8 x_3^*) \tag{3.16}$$

і відповідно до виразу (3.4) перетворимо його до такого вигляду:

$$1/8 x_4^* + 3/8 x_3^* + x_2^* = 3/2. \tag{3.17}$$

Визначимо цілі частини коефіцієнтів при змінних $\overline{x}_4^*$ і $\overline{x}_3^*$ і вільного члена у виразі (3.17):

$$\lfloor 1/8 \rfloor = 0; \quad \lfloor 3/8 \rfloor = 0; \quad \lfloor 3/2 \rfloor = 1.$$

Тоді відповідно до виразу (3.6) можна записати:

$$0 \cdot x_4^* + 0 \cdot x_3^* + x_2^* \le 1. \tag{3.18}$$

Віднімемо з виразу (3.18) вираз (3.17):

$$-1/8 \cdot x_4^* - 3/8 \cdot x_3^* \le -1/2 \tag{3.19}$$

Переведемо нерівність (3.19) у рівняння

$$-1/8 \cdot x_4^* - 3/8 \cdot x_3^* + y_1 = -1/2$$

і виразимо змінну y_1 так:

$$y_1 = -1/2 - \left(-1/8 \cdot x_4^* - 3/8 \cdot x_3^*\right). \qquad (3.20)$$

Додамо до кінцевої симплекс-таблиці (табл. 3.3) задачі ЛП ще один рядок і розв'яжемо задачу з додатковим обмеженням (3.20). Розв'язання задачі з додатковим обмеженням представлене симплекс-таблицями (табл. 3.4-3.5).

Таблиця 3.4

БП	СП		
	СЧ	x_4	x_3 ←
$L(\bar{x})$	-7	-3/4	-5/4
x_2	3/2	1/8	3/8
x_1	1	1/4	-1/4
↑ y_1	-1/2	-1/8	-3/8

⇒

Таблиця 3.5

БП	СП		
	СЧ	x_4	y_1
$L(\bar{x})$	-16/3	-1/3	-10/3
x_2	1	0	1
x_1	4/3	1/3	-2/3
x_3	4/3	1/3	-8/3

Рішення $\bar{x}_2^* = (4/3; 1; 4/9; 0; 0)$ вже містить цілочислову змінну $\bar{x}_2^*$. Для того щоб з'ясувати, як додаткове обмеження забезпечує цілочислове значення змінної $\bar{x}_2^*$, проаналізуємо вираз (3.20). Підставимо у вираз (3.20) вирази змінних x_3 і x_4 з виразу (3.14). Тоді після нескладних перетворень отримаємо

$$y_1 = 1 - x_2. \qquad (3.21)$$

Якщо покласти $y_1 = 0$, то

$$y_1 = 1 - x_2$$

є рівнянням прямої, паралельної осі Ox_1 і яка перетинає вісь Ox_2 в точці $x_2 = 1$. Пряма $y_1 = 0$ відсікає ту частину багатокутника ОДР разом з рішенням $\bar{x}_1^*$ вихідної задачі ЛП, яке не містить цілочислових значень змінної x_2 (на рис. 3.2 ця частина ОДР відмічена горизонтальним штрихуванням). Таким чином, будь-яка точка $y_1 = 0$ нової ОДР відповідає цілочисловому значенню змінної x_2.

Повернемося до табл. 3.5. Оскільки змінна $\overline{x}_1^*$ в рішенні $\overline{x}_{II}^*$ не цілочислова, продовжимо процедуру відсікання.

Запишемо вираз для $\overline{x}_1^*$:

$$x_1^* = 4/3 - \left(1/3 x_4^* - 2/3 y_1^*\right)$$

або відповідно до виразу (3.4):

$$1/3 \cdot x_4^* - 2/3 \cdot y_1^* + x_1^* = 4/3. \qquad (3.22)$$

Цілі числа коефіцієнтів при змінних і вільного члена у виразі (3.22) дорівнюватимуть

$$\lfloor 1/3 \rfloor = 0; \ \lfloor -2/3 \rfloor = -1; \ \lfloor 4/3 \rfloor = 1.$$

Тоді відповідно до виразу (3.6) запишемо:

$$0 \cdot x_4^* - 1 \cdot y_1^* + x_1^* \le 1. \qquad (3.23)$$

Віднімаючи з виразу (3.23) вираз (3.22), отримаємо

$$-1/3 \cdot x_4^* - 1/3 \cdot y_1^* \le -1/3.$$

Вводячи додаткову змінну y_2, отримаємо таке обмеження:

$$y_2 = -1/3 - \left(-1/3 x_4^* - 1/3 y_1^*\right). \qquad (3.24)$$

Додамо до симплекс-таблиці (табл. 3.5) додатковий рядок, який заповнимо коефіцієнтами з виразу (3.24), і розв'яжемо задачу лінійного програмування (табл. 3.6.-3.7).

Таблиця 3.6

←

БП	СП

Таблиця 3.7

БП	СП

	СЧ	x_4	y_1
$L(\bar{x})$	-16/3	-1/3	-10/3
x_2	1	0	1
x_1	4/3	1/3	-2/3
x_3	4/3	1/3	-8/3
↑ y_2	-1/3	-1/3	-1/3

$\Rightarrow$

	СЧ	y_2	y_1
$L(\bar{x})$	-5	-1	-3
x_2	1	0	1
x_1	1	1	-1
x_3	1	1	-3
x_4	1	-3	1

Оптимальне рішення цієї задачі ЛП

$$\bar{x}^*_{III} = (1;1;1;1;0;0)$$

містить цілочислові значення змінних x_1 і x_2 і, отже, є оптимальним рішенням $\bar{x}^*_ц$ задачі ЦП.

Підставляючи у вираз (3.24) вирази для x_4 і y_1, отримаємо

$$y_2 = 2 - x_1 - x_2.$$

Пряма $y_2 = 0$ відсікає ще одну частину ОДР, що не містить цілочислових рішень, у тому числі і рішення $\bar{x}^*_{II}$ (на рис. 3.2 відмічена вертикальним штрихуванням). Нова ОДР, утворена осями Ox_1 і Ox_2, а також прямими $y_1 = 0$ і $y_2 = 0$, має межі, що проходять через цілочислові точки, і будь-яка вершина області відповідає одному з цілочислових рішень. Як випливає з рис. 3.2, вершина $\bar{x}^*_ц$ найбільш віддалена від початку координат у напрямі спадання цільової функції. Оскільки вершина $\bar{x}^*_ц$ відповідає цілочисловому рішенню, вона і є оптимальним рішенням задачі ЦП.

На закінчення наведемо загальний алгоритм розв'язання задачі ЦП методом відсічних площин.

1. Без урахування вимоги цілочисловості розв'язується задача лінійного програмування з обмеженнями (3.1). Якщо всі змінні отриманого оптимального рішення цілочислові, то це рішення буде оптимальним і для задачі ЦП.

2. У тому випадку, якщо одна або декілька базисних змінних нецілочислові, вибирається та з них, яка має найбільше значення. Для цієї змінної складається додаткове обмеження вигляду виразу (3.10).

3. Розв’язується нова задача ЛП з додатковим обмеженням. Якщо одна або декілька базисних змінних оптимального рішення нової задачі нецілочислові, слід перейти до п. 2. Процедура обчислень триває до тих пір, поки не буде знайдено цілочислове рішення, або буде доведено, що задача ЦП не має рішення.

3.3. Метод гілок і меж

Розглянутий вище метод відсічних площин дозволяє розв’язувати як повністю, так і частково цілочислові задачі. Проте зі зростанням розмірності задачі ЦП швидко збільшується і об'єм обчислень. Скоротити об'єм обчислень у ряді випадків допомагає метод гілок і меж.

Розглянемо суть методу. Нехай необхідно знайти оптимальне рішення задачі цілочислового програмування (3.1)-(3.2).

Позначимо через X безліч невід’ємних чисел x_j, що задовольняють обмеження (3.1). Припустимо, що безліч X можна розбити на підмножини $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_\eta$ з урахуванням цілочисловості якої-небудь змінної і для кожної підмножини знайти рішення $\overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*, \ldots, \overline{x}_k^*, \ldots, \overline{x}_\eta^*$. Кожному рішенню, очевидно, відповідатиме своє мінімальне значення цільової функції $L_{\min 1}, L_{\min 2}, \ldots, L_{\min k}, \ldots, L_{\min \eta}$. Виберемо серед підмножин X_k, де $k = \overline{1, \eta}$, таку підмножину X_l, для якої $L_{\min l}$ буде меншим, тобто

$$L_{\min l} = \min_k L_{\min k}. \tag{3.24}$$

Інші підмножини $X_{k, k \neq l}$ виключимо з подальшого розгляду як неперспективні.

З урахуванням цілочисловості іншої змінної розіб'ємо підмножину X_l на дрібніші підмножини $X_{l1}, X_{l2}, \ldots, X_{l\rho}, \ldots, X_{l\mu}$ і для кожної з неї знайдемо рішення $\overline{x}_{l1}^*, \overline{x}_{l2}^*, \ldots, \overline{x}_{l\rho}^*, \ldots, \overline{x}_{l\mu}^*$ і значення цільової функції $L_{\min l1}, L_{\min l2}, \ldots, L_{\min l\rho}, \ldots, L_{\min l\mu}$. Для подальшого розбиття виберемо ту підмножину $L_{\min lq}$, для якої

$$L_{\min lq} = \min_\rho L_{\min l\rho}. \tag{3.25}$$

Процес розбиття безлічі X на все дрібніші підмножини триває до тих пір, поки не буде знайдено оптимальне рішення задачі ЦП або буде доведено, що рішення не існує.

Описаний процес є розгалужуванням безлічі X на дерево підмножин (рис. 3.3). Ідея галуження безлічі X на дерево підмножин з подальшим вибором на основі оцінки $L_{\min q}$ для кожної підмножини перспективних гілок і лежить в основі методу гілок і меж.

Слід зазначити, що метод гілок і меж застосовується не лише для розв’язання задач цілочислового програмування, а і цілого ряду інших задач. При цьому основним ускладненням за умови його практичного використання є визначення способу розбиття множин на підмножини і обчислення оцінки $L_{\min q}$ кожної з підмножин. Проте для задач цілочислового програмування спосіб розбиття визначається порівняно легко, що і дозволяє ефективно використати метод гілок і меж при розв’язанні вказаного класу задач.

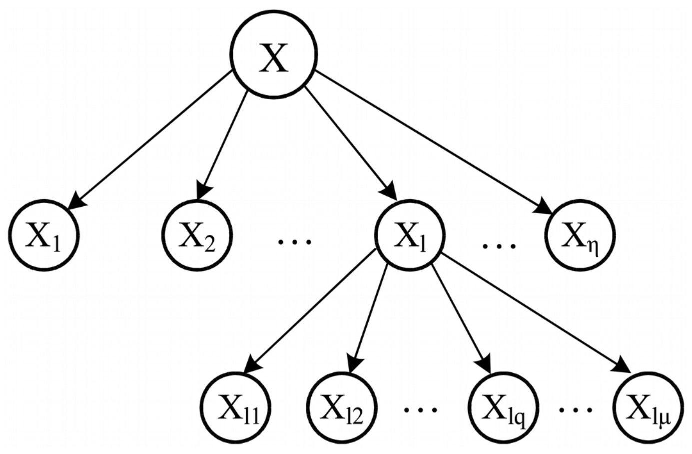

Рис. 3.3

Перейдемо до розгляду алгоритму розв’язання задачі ЦП методом гілок і меж. Як і за умови використання методу відсічних площин, спочатку розв’язується задача лінійного програмування при обмеженнях (3.1) без урахування вимоги цілочисловості змінних. Приймемо для визначеності, що в рішенні $\overline{x}^*$ задачі лінійного програмування змінні $\overline{x}_1^*, \overline{x}_2^*, \ldots, \overline{x}_k^*$ є вільними, а

$\overline{x}^*_{k+1}, \overline{x}^*_{k+2}, \ldots, \overline{x}^*_{k+l}, \ldots, \overline{x}^*_{k+m}$ - базисними, при цьому базисні змінні визначаються виразами (3.3).

Якщо всі змінні $\overline{x}^*_{k+1}, \overline{x}^*_{k+2}, \ldots, \overline{x}^*_{k+l}, \ldots, \overline{x}^*_{k+m}$ (чи задана їх частина) цілочислові, рішення $\overline{x}^*$ є оптимальним розв’язком також і задачі цілочислового програмування.

Припустимо, що змінна

$$\overline{x}^*_{k+1} = \beta_{k+1}$$

набуває дробового значення. Відповідно до ідеї методу гілок і меж проведемо розбиття області допустимих рішень на дві підобласті, кожна з яких утримувала б на своїй межі тільки цілочислові значення x_{k+1}. Очевидно межі підобластей з урахуванням цілочисловості змінної x_{k+1} визначатимуться додатковими обмеженнями:

$$x_{k+1} \le [\beta_{k+1}] \qquad (3.26)$$

для першої підобласті і

$$x_{k+1} \ge [\beta_{k+1}] + 1 \qquad (3.27)$$

для другої підобласті.

Введення обмежень (3.26) і (3.27) означає перше розгалуження безлічі допустимих рішень на підмножини.

Розв’яжемо задачі ЛП при обмеженнях (3.1) і (3.26). У результаті отримаємо оптимальне рішення $\overline{x}^*_1$ і значення цільової функції $L_{\min 1}$. Розв’язання задачі ЛП при обмеженнях (3.1) і (3.27) (для другої підобласті) дає значення $\overline{x}^*_2$ і $L_{\min 2}$.

Порівняємо між собою оцінки $L_{\min 1}$ і $L_{\min 2}$. Нехай $L_{\min 2} > L_{\min 1}$. Отже, друга підобласть виключається з подальшого розгляду.

Проаналізуємо рішення $\overline{x}^*_1$. Якщо всі змінні в $\overline{x}^*_1$ цілочислові, то це рішення є оптимальним розв’язком задачі ЦП.

Нехай $\overline{x}^*_{1j} = \gamma_{1j}$ в рішенні $\overline{x}^*_1$ має дробове значення. Приступимо до другого розгалуження. Вводячи додаткові обмеження

$$\overline{x}^*_{1j} \le [\gamma_{1j}], \qquad (3.28)$$

$$\bar{x}_{1j}^{*} \geq [\gamma_{1j}] + 1, \tag{3.29}$$

розбиваємо першу підобласть на дрібніші підобласті. Знову розв'язуємо дві задачі ЛП: першу - з обмеженнями (3.1), (3.26), (3.28) і другу - з обмеженнями (3.1), (3.26) і (3.29). У результаті отримаємо оптимальне рішення $\bar{x}_{11}^{*}$ і $\bar{x}_{12}^{*}$ і значення $L_{\min 11}$ і $L_{\min 12}$. Порівнюючи між собою значення $L_{\min 11}$ і $L_{\min 12}$, виключаємо з подальшого розгляду одну з підобластей, наприклад першу, якщо

$$L_{\min 11} > L_{\min 12}.$$

Аналізуючи рішення $\bar{x}_{12}^{*}$, приходимо або до оптимального рішення задачі ЦП, або до необхідності продовження подальшого розгалуження.

Розглянемо обчислювальну процедуру методу гілок і меж і її геометричну інтерпретацію на прикладі.

Приклад 3.2. Знайти рішення задачі (3.11) і (3.12) методом гілок і меж.

Як вже підкреслювалося вище, при використанні методу гілок і меж спочатку розв'язується задача ЛП без урахування вимоги цілочисловості змінних. Така задача при обмеженнях (3.11) розв'язана в прикладі 3.1, а результат її розв'язання представлений кінцевою симплекс-таблицею (табл. 3.3). З огляду на те, що змінна $\bar{x}_2^{*}$ в рішенні $\bar{x}^{*} = (1; 3/2; 0; 0)$ набуває дробового значення, проведемо перше розбиття області допустимих рішень на дві підобласті. Для цього відповідно до виразів (3.26) і (3.27) введемо додаткові обмеження

$$x_2 \leq 1 \text{ та } \quad x_2 \geq 2.$$

Розв'яжемо для першої підобласті, межі якої визначаються нерівностями

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_2 &\leq 1, \end{aligned}$$

задачі лінійного програмування.

Перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2,\\
3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6,\\
x_2 + y_1 &= 1
\end{aligned}
$$

і, представивши обмеження і цільову функцію у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&x_3 = 2 - (-x_1 + 2x_2);\\
&x_4 = 6 - (3x_1 + 2x_2);\\
&y_1 = 1 - (x_2);\\
&L(\overline{x}) = 0 - (x_1 + 4x_2),
\end{aligned}
$$

проведемо послідовність симплекс-перетворень (табл. 3.8-3.10).

Таблиця 3.8

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2 ←
$L(\overline{x})$	1	1	4
x_3	2	-1	2
x_4	6	3	2
↑ y_1	1	0	1

⇒

Таблиця 3.9

БП	СП		
	СЧ	x_1 ←	y_1
$L(\overline{x})$	-4	1	-4
x_3	0	-1	-2
↑ x_4	4	3	-2
x_2	1	0	1

⇒

Таблиця 3.10

БП	СП		
	СЧ	x_4	y_1
$L(\overline{x})$	-16/3	-1/3	-10/3
x_3	4/3	1/3	-8/3
x_1	4/3	1/3	-2/3
x_2	1	0	1

Оптимальне рішення для першої підобласті

$$\overline{x}_1^* = (4/3; 1; 4/3; 0; 0)$$

містить цілочислове значення змінної x_2. Цільова функція при цьому дорівнює

$$L_{\min 1} = -\frac{16}{3}.$$

Для другої підобласті, визначуваної обмеженнями

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 &\le 2,\\
3x_1 + 2x_2 &\le 6,\\
x_2 &\ge 2
\end{aligned}
$$

або

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2,\\
3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6,\\
x_2 - y_2 &= 2,
\end{aligned}
$$

рішення задачі ЛП представлено симплекс-таблицями (табл. 3.11-3.12).

Таблиця 3.11

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\overline{x})$	0	1	4
x_3	2	-1	2
x_4	6	3	2
y_2	-2	0	-1

Таблиця 3.12

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_3
$L(\overline{x})$	-4	3	-2
x_2	1	-1/2	1/2
x_4	4	4	-1
y_2	-1	1/2	1/2

Оскільки в останньому рядку кінцевої симплекс-таблиці (табл. 3.12) вільний член від'ємний, а інші елементи додатні, задача ЛП не має допустимих рішень і можна формально покласти $L_{\min 2} = \infty$. Через те що

$$L_{\min 1} < L_{\min 2},$$

друга підобласть з подальшого розгляду виключається.

На рис. 3.4 показано розбиття області допустимих рішень на дві підобласті X_1 і X_2 прямими $y_1 = 0$ і $y_2 = 0$.

Повернемося до першої підобласті. В оптимальному рішенні $\overline{x}_1^*$ змінна $\overline{x}_1^* = 4/3$ - дробова величина. Тому піддамо підобласть X_1 подальшому розбиттю на підобласті X_{11} і X_{12}. Оскільки $\left[\frac{4}{3}\right] = 1$

, то відповідно до виразів (3.28) і (3.29) введемо додаткові обмеження

$x_1 \le 1$ для підобласті X_{11},
$x_1 \ge 2$ для підобласті X_{12}.

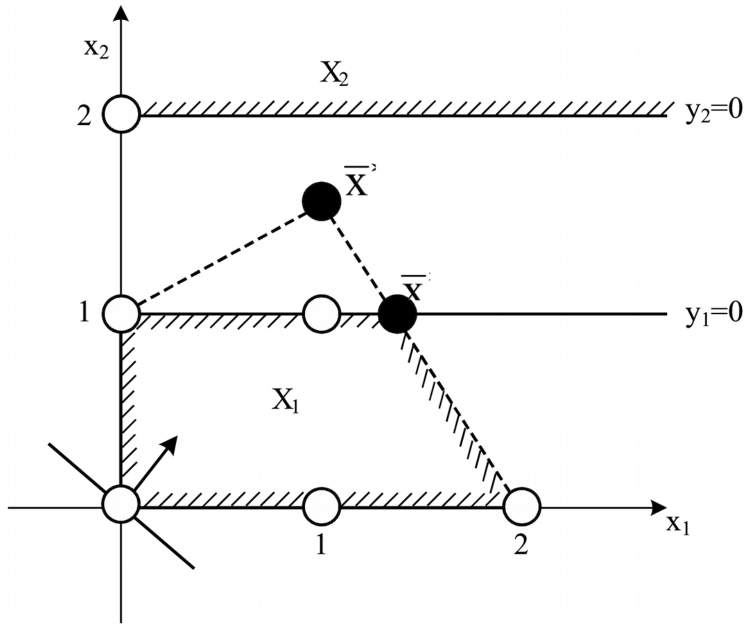

Рис. 3.4

Розв’яжемо задачі ЛП для підобласті X_{11}.
Ця підобласть визначається обмеженнями

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 &\le 2,\\
3x_1 + 2x_2 &\le 6,\\
x_2 &\le 1,\\
x_1 &\le 1.
\end{aligned}
$$

Переходячи від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2,\\
3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6,\\
x_2 + y_1 &= 1,\\
x_1 + y_3 &= 1
\end{aligned}
$$

і застосовуючи табличний симплекс-метод, отримаємо послідовність симплекс-таблиць (табл. 3.13-3.15).

Рішення $\bar{x}^*_{11} = (1;1;1;1;0;0)$ є цілочисловим, при цьому $L_{\min 11} = -5$.

Таблиця 3.13

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\bar{x})$	0	1	4
x_3	2	-1	2
x_4	6	3	2
y_1	1	0	1
y_3	1	1	0

Таблиця 3.14

БП	СП		
	СЧ	x_1	y_1
$L(\bar{x})$	-4	1	-4
x_3	0	-1	-2
x_4	4	3	-2
x_2	1	0	1
y_3	1	1	0

Таблиця 3.15

БП	СП		
	СЧ	y_3	y_1
$L(\bar{x})$	-5	-1	-4
x_3	1	1	-2
x_4	1	-3	-2
x_2	1	0	1
x_1	1	1	0

Для підобласті X_{12} система обмежень має вигляд

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ x_2 &\le 1, \\ x_1 &\ge 2, \end{aligned}$$

чи в канонічній формі

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\ x_2 + y_1 &= 1, \\ x_1 - y_1 &= 2. \end{aligned}$$

Розв’язуючи задачу ЛП табличним симплекс-методом, отримаємо послідовність симплекс-таблиць (табл. 3.16-3.18).

Таблиця 3.16

БП	СП		
	СЧ	x_1	x_2
$L(\bar{x})$	0	1	4
x_3	2	-1	2
x_4	6	3	2
y_1	1	0	1
y_4	-2	-1	0

Таблиця 3.17

БП	СП		
	СЧ	y_4	x_2
$L(\bar{x})$	-2	1	4
x_3	4	-1	2
x_4	0	3	2
y_1	1	0	1
x_1	2	-1	0

Таблиця 3.18

БП	СП		
	СЧ	y_4	x_4
$L(\bar{x})$	-2	-5	-2
x_3	4	-4	-1
x_2	0	3/2	1/2
y_1	1	-3/2	-1/2
x_1	1	-1	0

Рішення $\overline{x}_{12}^{*}=(1;0;4;0;1;0)$ також є цілочисловим, проте $L_{\min 12}=-2$. Так,

$$L_{\min 11} < L_{\min 12},$$

оптимальним розв'язанням задачі цілочислового програмування буде рішення

$$\overline{x}_{11}^{*}=(1;1;1;1;0;0),$$

що співпадає з результатом, отриманим методом відсічних площин. На рис. 3.5 показані підобласті X_{11} і X_{12}, отримані розбиттям підобласті X_1 прямими $y_3=0$ і $y_4=0$. Характерно, що підобласть X_{12} містить тільки одну точку $\overline{x}_{12}^{*}$, що належить області допустимих рішень задачі цілочислового програмування.

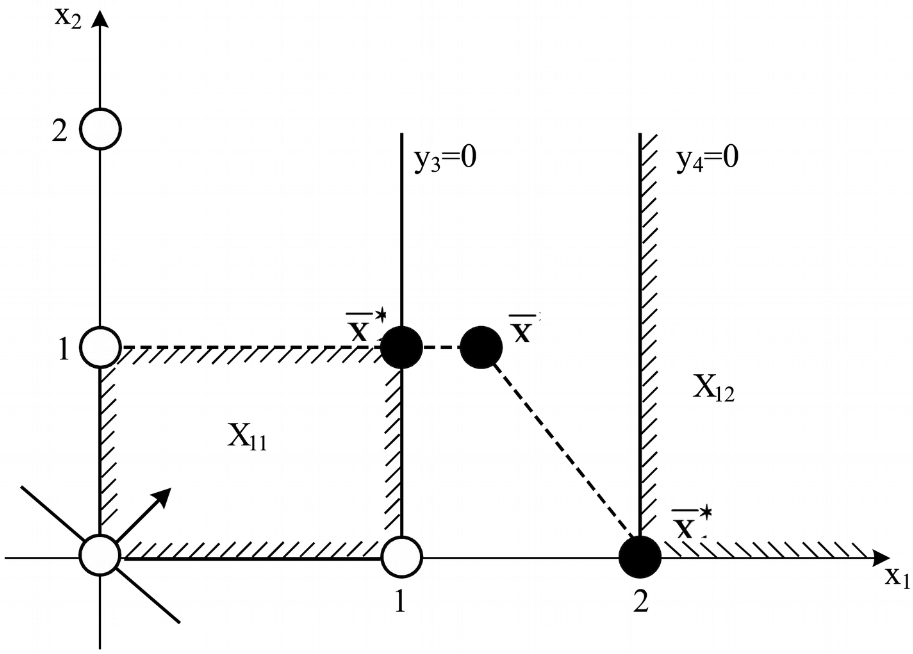

Рис. 3.5

Дерево підмножин для розглянутої задачі наведено на рис. 3.6.

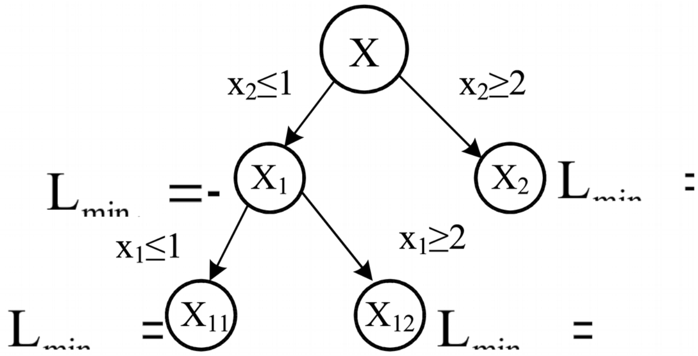

Рис. 3.6

Таким чином, в обчислювальному відношенні алгоритм розв’язання задачі цілочислового програмування методом гілок і меж є послідовністю задач лінійного програмування. При цьому на кожному кроці розгалуження кількість обмежень відповідної задачі ЛП збільшується на одиницю. Для задач цілочислового програмування кількість розгалужень кінцева, якщо кінцева область допустимих рішень. Отже, якщо область допустимих рішень обмежена, завжди можна знайти цілочислове рішення задачі за кінцеву кількість кроків.

Бібліографічний список

1. Стеклов, В.К. Проектування телекомунікаційних мереж [Текст]: підруч. для студ. вищ. навч. закл. за напрямком «Телекомунікації» / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман; за ред. В.К. Стеклова. – К.: Техніка, 2002. - 792 с.
2. Стеклов, В.К. Телекомунікаційні мережі [Текст] / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман. – К.: Техніка, 2002. - 792 с.
3. Гостев, В.И. Системы автоматического управления с цифровыми регуляторами [Текст] / В.И. Гостев, В.К. Стеклов. – К.: Радіоаматор, 1998. - 704 с.
4. Выбор обобщенного критерия оптимальности систем управления информационными сетями [Текст] / В.К. Стеклов, Н.М. Стародуб, Л.Н. Беркман // Зв'язок. – 2000. - №5. – С. 48-50.
5. Стеклов, В.К. Проектування систем автоматичного керування [Текст] / В.К. Стеклов. – К.: Вища шк., 1995. - 232 с.
6. Дегтярев, Ю.И. Методы оптимизации [Текст] / Ю.И. Дегтярев. – М.: Сов. радио, 1980. - 272 с.
7. Беркман, Л.Н. Багатокритеріальна оптимізація систем управління телекомунікаційними мережами [Текст] / Л.Н. Беркман, Є.В. Кільчицький, Н.М. Скоблилова. –К.: ДП УНДІЗ, 2002. - 42 с.
8. Князева, Н.А. Функциональная структура системы управления коммуникационными слоями [Текст] / Н.А. Князева // Информационные сети и системы. – С-Пб., 1993. – С. 75-76.
9. Молчанов, А.А. Моделирование и проектирование сложных систем [Текст] / А.А. Молчанов. – К.: Вища шк., 1988. - 360 с.
10. Волкова, В.Н. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи [Текст] / В.Н. Волкова, В.А. Воронков, А.А. Денисов. – М.: Радио и связь, 1983. - 248 с.
11. Стеклов, В.К. Объединение векторных критериев оптимальности систем управления телекоммуникационными сетями [Текст] / В.К. Стеклов, Н.М. Стародуб, Л.Н. Беркман // Матеріали доп. учасників Ювілейної Міжнар. наук.-практ. конф. – К.: Тов. «Знання України», 2000. –С. 90-92.