



**УКРАЇНСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

Е.Д. ЧИХЛАДЗЕ, Ю.П. КІТОВ

**ВИБРАНІ ЗАДАЧІ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ
З РОЗВ'ЯЗАННЯМИ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Будівництво»

Харків 2011

УДК 620.17
ББК 30.121
Ч 713

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Будівництво» (№1/11-10716 від 23.11.2010 р.)

Рецензенти:

професор О.Ф. Яременко (ОДАБА),
професор В.О. Гришин (ОНМУ)

Видання друге, перероблене і доповнене

Чихладзе Е.Д., Кітов Ю.П.
Ч 713 Вибрані задачі з опору матеріалів з розв'язаннями: Навч. посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 231 с., рис. 210.
ISBN 978-966-2033-62-5

Даний посібник містить задачі підвищеної складності і різноманітні підходи до їх розв'язання, що сприяє більш поглибленому вивченню курсу опору матеріалів.

У другому виданні виправлено погрішності першого видання і уведено ряд нових цікавих задач.

Призначений для студентів будівельних і механічних спеціальностей.

УДК 620.17
ББК 30.121

ISBN 978-966-2033-62-5

©Українська державна академія
залізничного транспорту, 2011

Навчальний посібник

Чихладзе Елгуджа Давидович,
Кітов Юрій Петрович

ВИБРАНІ ЗАДАЧІ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ З РОЗВ'ЯЗАННЯМИ

Відповідальний за випуск Ватуля Г.Л.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 10.01.11 р.

Формат паперу 60x84 1/8 . Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 5,25. Тираж 300. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту
61050, Харків - 50, майдан Фейербаха, 7

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р.

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

Від часу першого видання посібника пройшло близько 6 років. Назрів ряд необхідних переробок і доповнень. У другому виданні виправлено деякі погрішності першого видання, включено певну кількість нових цікавих задач, збільшено число варіантів розв'язання задач з аналізом і виявленням найкращого, уведено задачі із досвіду минулих студентських олімпіад.

У розділі, присвяченому згину, для визначення прогинів, крім методів безпосереднього інтегрування, початкових параметрів і фіктивного навантаження, додатково уведений метод Мора з обчисленням інтегралів способами Верещагіна та Сімпсона-Корноухова, і у розв'язках задач дається порівняння ефективності їхнього застосування.

На основі багаторічного досвіду педагогічної діяльності, гурткової роботи і підготовки студентів до олімпіад у додатку наводяться деякі міркування зі стратегії і тактики розв'язання задач, в яких аналізуються різноманітні особливості, наприклад, симетрії, одержання несподіваних рішень та ін., які можуть бути корисними при вдосконалюванні вміння більш просто розв'язувати задачі різної складності.

Посібник містить 12 розділів, що охоплюють відповідні розділи курсу «Опір матеріалів». Кожний розділ складається з чотирьох частин: основні поняття і формули, умови задач, відповіді до задач і розв'язки задач. Наявність додатків з необхідними таблицями для розв'язання специфічних задач забезпечує в деякій мірі автономність видання.

Цей посібник призначений для студентів будівельних, машинобудівельних і транспортних спеціальностей. Він може служити посібником для самостійних студентських наукових розробок.

Автори висловлюють вдячність проф. О.Ф. Яременку і колективу кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, яку він очолює, а також проф. В.О. Гришину і колективу кафедри теоретичної і прикладної механіки Одеського національного морського університету, яку він очолює, за цінні зауваження, зроблені при рецензуванні рукопису. Автори висловлюють щире подяку інженеру кафедри Р.Г. Павленко за підготовку електронної версії посібника.

ВСТУП

Кожен, хто хоче стати інженером, повинен мати знання, майстерність, наявність власної точки зору і постійне прагнення до підвищення кваліфікації. Усе це взаємозалежне – без одного немає іншого. Це дає уявлення про роботу інженера як єдиний процес творчості, аналізу і прийняття рішень. Тому для якісної підготовки інженера в межах кожної дисципліни повинні даватись не тільки фактичні знання, але й вироблятися вміння розв'язання задач, що є прототипами інженерних. Від звичайних задачників з опору матеріалів даний відрізняється, по-перше, наявністю неординарних задач; по-друге, прикладами розв'язання декількох задач, оснований на різноманітних підходах, і, по-третє, невеликою кількістю задач і тому можливістю їхнього розв'язання за доступний для огляду період часу, відведений для вивчення відповідних розділів опору матеріалів. Природно, цей задачник служить для більш поглибленого вивчення курсу опору матеріалів, у тому числі і проведення роботи гуртка, а також підготовки до олімпіади з опору матеріалів. До всіх задач дано відповіді та наведено розв'язки.

Звичайно, простіше за все, коли, прочитавши умову задачі, відразу ж переглянути її розв'язання, але сенсу від цього буде мало. Щоб навчитися думати, як думають інженери, необхідно “поламати” голову. Як це не дивно, багато студентів не розуміють, що мета навчання – не в тому, щоб пізнати якийсь набір фактів і положень, а саме у тому, щоб виробити самостійний підхід до вирішення будь-якої інженерної проблеми, навчитися глибоко розуміти, думати і міркувати, розвивати майстерність.

Цей задачник насамперед розрахований на студента, що одержує задоволення від самого процесу обмірковування і розв'язання задачі. В ідеальному випадку він дивиться у розв'язок, наведений тут, тільки після того, як закінчить свій власний. Особливо важливо, якщо власний розв'язок правильний, але відрізняється підходом. Тоді, проаналізувавши різноманітні підходи, можна вибрати найкращий. Це уже буде вищою оцінкою процесу навчання. Задачі складені викладачами кафедри, а також запозичені з різноманітних джерел, що у міру можливості показані у наведеній літературі.

Посібник відрізняється автономністю використання, тому що до кожного його розділу наведено найголовніші формули і дані.

ЗАДАЧІ

Розділ 1

РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ

1.1. Основні поняття і формули

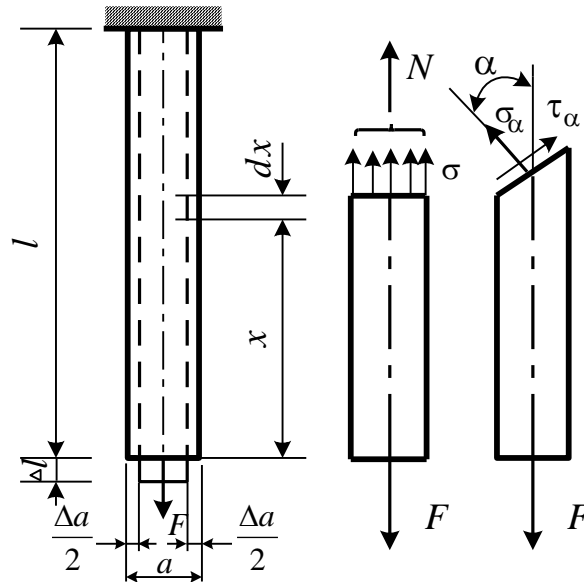


Рис. 1.1. Ілюстрації до основних формул при розтяганні і стисканні

$$\text{Нормальні напруження } \sigma = \frac{N}{A}.$$

$$\text{Умова міцності } \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R\gamma.$$

$$\text{Допустимі напруження } [\sigma] = \frac{\sigma_o}{k}. \text{ Розрахункові опори } R = \frac{R_m}{\gamma_m},$$

γ_m – коефіцієнт надійності за матеріалом;

γ – коефіцієнт умов роботи.

$$\text{Абсолютне подовження } \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

$$\text{Відносне подовження } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

$$\text{Закон Гука } \sigma = E \cdot \varepsilon.$$

$$\text{Відносна поперечна деформація стержня } \varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}.$$

$$\text{Коефіцієнт Пуассона } \nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Напруження по похилій площадці

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

1.2. Задачі

1.2.1. Опора у вигляді усіченого конуса висотою h і з площами основ A_0 і A_1 навантажена силою F (рис. 1.2). Наскільки стане коротшою висота h , якщо дією власної ваги опори знехтувати?

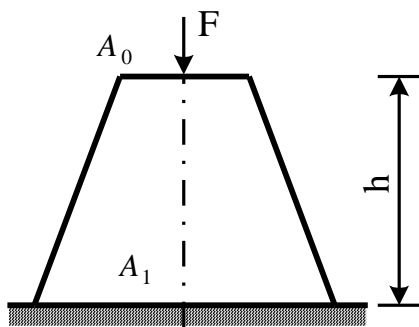


Рис. 1.2. До задачі 1.2.1

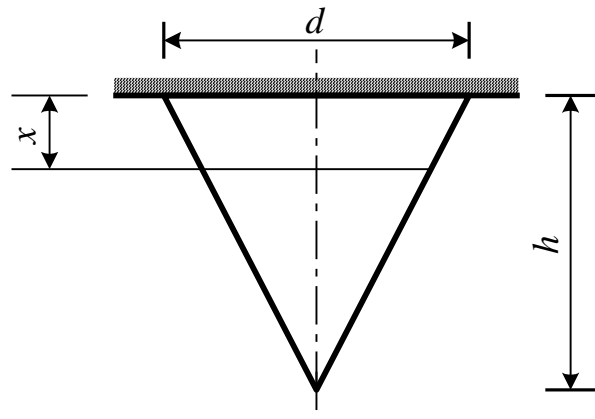


Рис. 1.3. До задачі 1.2.2

1.2.2. Конічний стержень розтягується власною вагою (рис. 1.3). Знайти залежність між переміщенням довільного поперечного перерізу і відстанню від закріпленої основи. Дано: h , d і γ – питома вага матеріалу конуса.

1.2.3. Опора у вигляді усіченого конуса навантажена силою F . Вага одиниці об'єму матеріалу опори γ (рис. 1.4). Знайти радіус r_x перерізу з найменшими напруженнями.

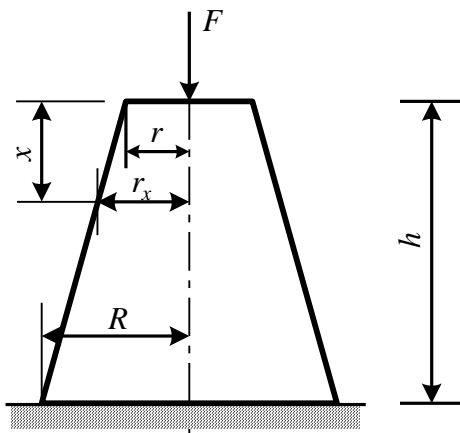


Рис. 1.4. До задачі 1.2.3

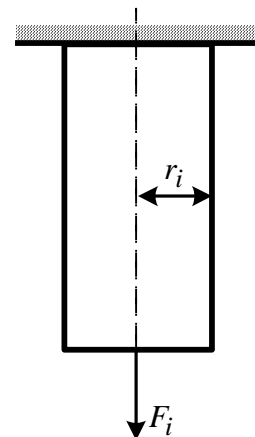


Рис. 1.5. До задачі 1.2.4

1.2.4. Циліндричний зразок розтягувався спочатку силою F_1 , а потім силою F_2 . У першому випадку радіус поперечного перерізу зразка був r_1 , а в другому – r_2 . Вважаючи модуль пружності E відомим, знайти коефіцієнт Пуассона ν (рис. 1.5).

1.2.5. Прямолінійний брус постійного поперечного перерізу розміщений між абсолютно жорсткими опорами і попередньо стиснутим зусиллям F (рис. 1.6). Яку силу F_1 необхідно прикласти в перерізі С-С, щоб напруження в перерізах I-ї і II-ї ділянок бруса мали б однакові абсолютні значення?

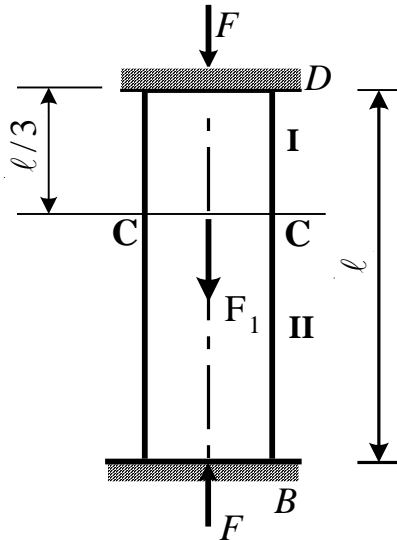


Рис. 1.6. До задачі 1.2.5

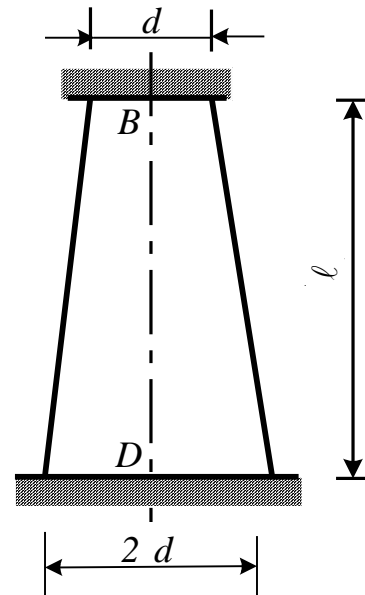


Рис. 1.7. До задачі 1.2.6

1.2.6. Сталевий брус перемінного перерізу (прямий круговий усічений конус) закріплений без зазора або натягу в двох абсолютно жорстких опорах В і D і потім охолоджений на 50°C (рис. 1.7).

Необхідно: 1) визначити подовжню силу, що діє в поперечних перерізах бруса; 2) відстань від опори В до перерізу, переміщення якого буде максимальним. Масою стержня знехтувати.

Дано: $d = 8 \cdot 10^{-2}$ м, $l = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{гр}}$.

1.2.7. Прямолінійний брус змінного перерізу закріплений в абсолютно жорстких опорах С і В. Побудувати епюри N_x , σ_x і δ_x з огляду тільки на власну вагу бруса (рис. 1.8).

Дано:

$l = 1$ м, $d = 10 \cdot 10^{-2}$ м, $D = 20 \cdot 10^{-2}$ м, $\gamma = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³,

$E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

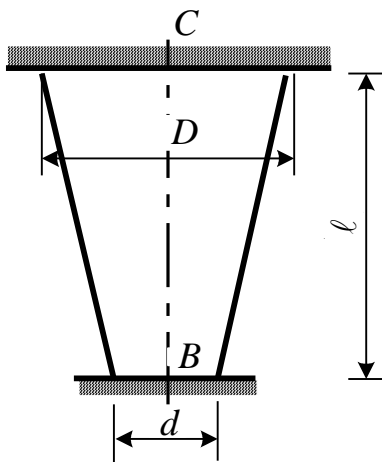


Рис. 1.8. До задачі 1.2.7

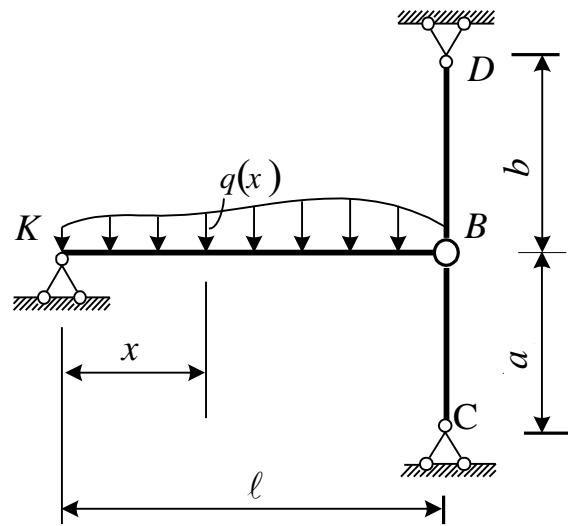


Рис. 1.9. До задачі 1.2.8

1.2.8. Абсолютно жорстка і невагома балка KB знаходиться під дією розподіленого навантаження

$$q(x) = q_0 \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3} \right), \quad \text{де } q_0 = 100 \text{ кН/м}, \ell = 4 \text{ м.}$$

Сталевий стержень BD площею A, $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma]_c = 200$ МПа, $b = 0,6$ м. Стержень BC з алюмінієвого сплаву площею $2A$: $E_{ал} = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma]_{ал} = 80$ МПа, $a = 0,4$ м. Визначити A (рис. 1.9).

1.2.9. Переміщення вузла K за напрямком сили F склало 0,5 мм. Приймаючи $\ell = 1$ м, $A = 10^{-4}$ м², $E = 2 \cdot 10^5$ МПа і вважаючи брус МК таким, що не деформується, знайти величину сили F (рис. 1.10).

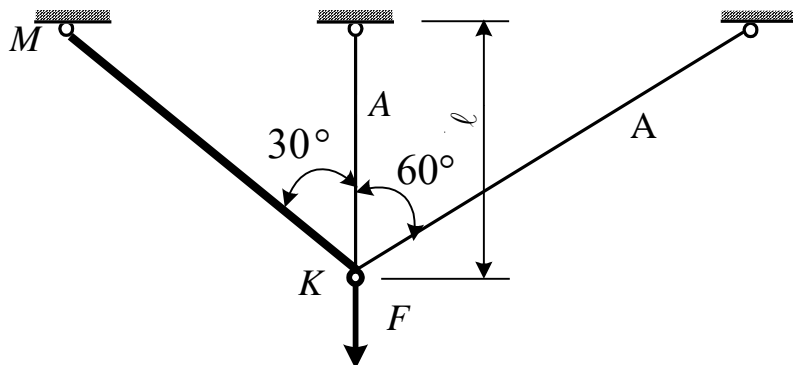


Рис. 1.10. До задачі 1.2.9

Розділ 2

ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕРІЗІВ

2.1. Основні поняття і формули

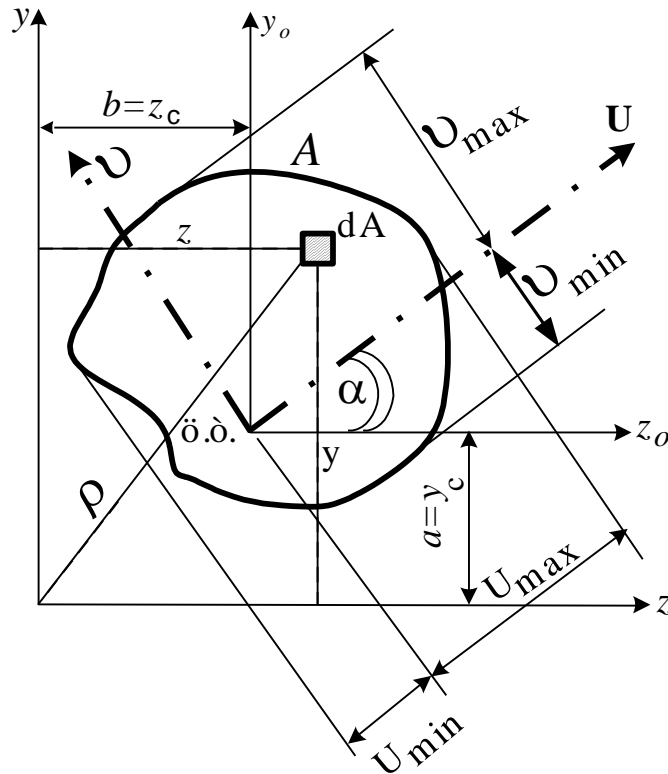


Рис. 2.1. Ілюстрація до геометричних характеристик

Статичні моменти площі

$$S_z = \int_A y \cdot dA = A \cdot y_c, \quad S_y = \int_A z \cdot dA = A \cdot z_c.$$

Осьові моменти інерції

$$J_z = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A z^2 dA.$$

Відцентровий момент інерції $J_{z,y} = \int_A z y dA.$

Полярний момент інерції $J_\rho = \int_A \rho^2 dA = J_z + J_y.$

Формули переходу до осей, які паралельні центральним,

$$J_z = J_{z_0} + a^2 A, \quad J_y = J_{y_0} + b^2 A,$$

$$J_{z,y} = J_{z_0,y_0} + a b A.$$

Формули для моментів інерції при повороті координатних осей

$$J_u = J_{z_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{z_0 y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_v = J_{z_0} \sin^2 \alpha + J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{z_0 y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_{uv} = \frac{J_{z_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha + J_{z_0 y_0} \cos 2\alpha.$$

При повороті осей сума осьових моментів інерції залишається постійною:

$$J_u + J_v = J_{z_0} + J_{y_0}.$$

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові приймають екстремальні значення, називаються головними осями. Якщо осьові моменти інерції відносно двох головних центральних осей перерізу рівні між собою, то для таких перерізів всі осі є головними.

Кут нахилу головних осей $tg 2\alpha = -\frac{2J_{z_0 y_0}}{J_{y_0} - J_{z_0}}.$

Головні моменти інерції

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_{z_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{z_0 y_0}^2}.$$

Моменти інерції і моменти опору для перерізів, що часто зустрічаються:

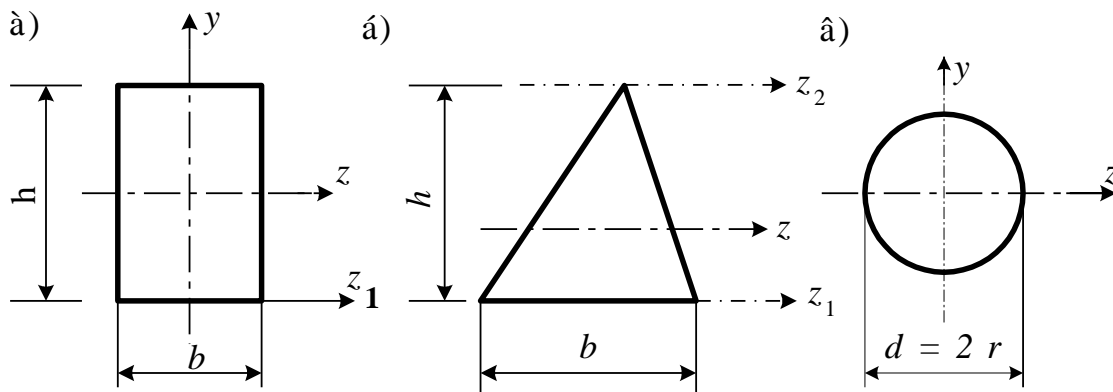


Рис. 2.2. Схеми перерізів

прямокутник (рис. 2.2, а) $J_z = \frac{bh^3}{12}; J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}; W_z = \frac{bh^2}{6};$

трикутник (рис. 2.2, б) $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}; J_{z_2} = \frac{bh^3}{4}; J_z = \frac{bh^3}{36};$

коло (рис. 2.2, в) $J_z = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$; $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}$;

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

Прямокутний переріз при крученні

$$J_{кр} = \alpha h b^3; \quad W_{кр} = \beta h b^2.$$

Значення коефіцієнтів α і β приймаються згідно з табл. 2.1.

Таблиця 2.1

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	10	∞
β	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,312	0,333
α	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,312	0,333
γ_k	1,00	0,573	0,469	0,398	0,307	0,251	0,186	0,074	0

2.2. Задачі

2.2.1. Знайти площу чверті синусоїди і положення її центра ваги (z_c) (рис. 2.3).

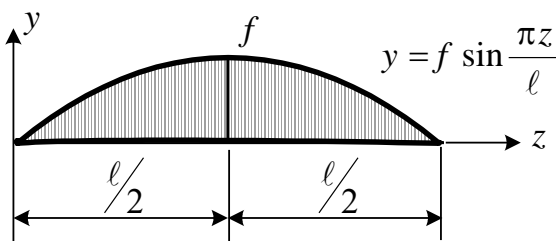


Рис. 2.3. До задачі 2.2.1

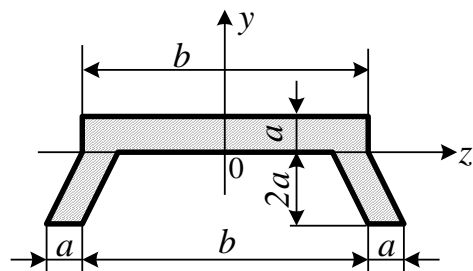


Рис. 2.4. До задачі 2.2.2

2.2.2. Знайти розмір “b” поперечного перерізу балки, зображеного на кресленні, за умови, щоб нейтральна вісь співпала з віссю z , та обрахувати J_y і J_z (рис. 2.4).

2.2.3. При якому співвідношенні розмірів перерізу $\frac{h}{b}$ осьові моменти інерції відносно довільних осей y_i та z_i будуть рівними (рис. 2.5)?

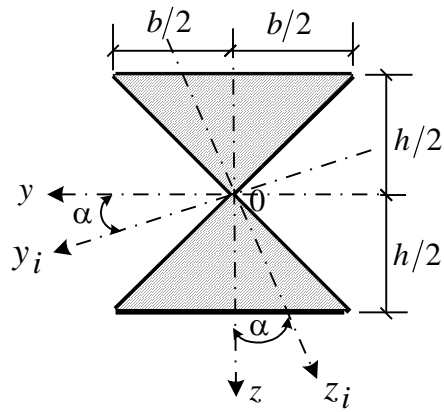


Рис. 2.5. До задачі 2.2.3

2.2.4. У коло з радіусом R вписаний рівнобічний трикутник. Якою повинна бути висота цього трикутника h , щоб момент інерції його відносно осі z був би найбільшим (рис. 2.6)?

2.2.5. Дано трикутний переріз ABC , для якого $J_z = 54 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ (рис. 2.7). Необхідно визначити h і J_{yz} .

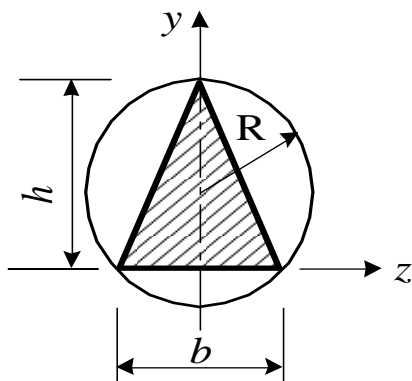


Рис. 2.6. До задачі 2.2.4

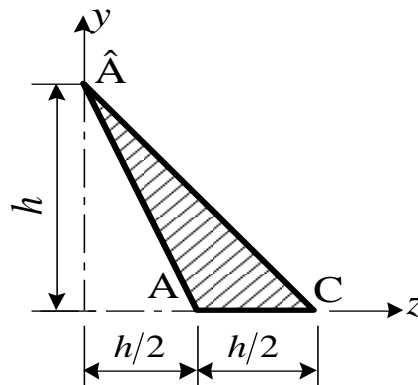


Рис. 2.7. До задачі 2.2.5

2.2.6. Визначити, при якому значенні відношення h/b ($h \cdot b = \text{const}$), осьовий момент інерції відносно осі z буде (рис. 2.8):

- а) мінімальним;
- б) максимальним.

2.2.7. На яку величину необхідно зрізати кути квадратного перерізу, щоб одержати переріз з найбільшим моментом опору W_z (рис. 2.9)?

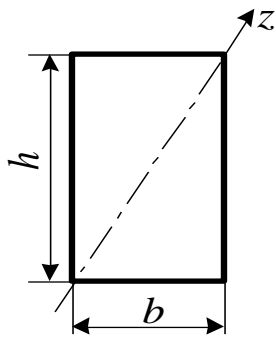


Рис.2.8. До задачі 2.2.6

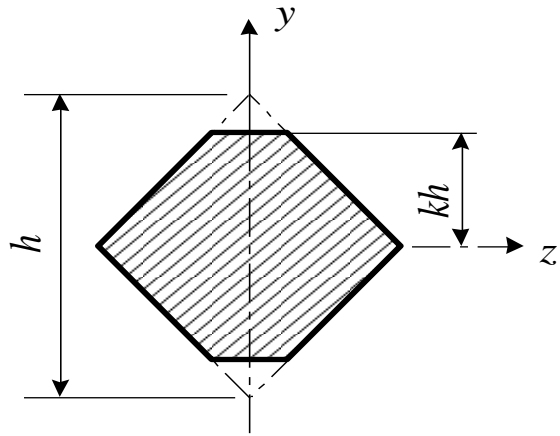
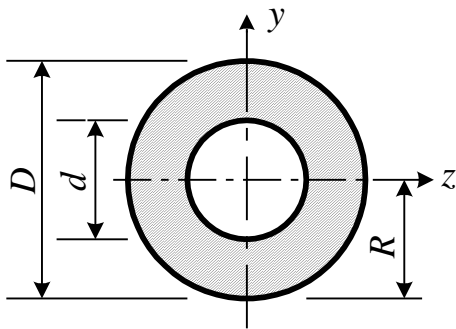


Рис. 2.9. До задачі 2.2.7

2.2.8. Із суцільного круглого перерізу отримані кільцевий (рис. 2.10, а) і прямокутний (рис. 2.10, б) перерізи однакової площі. Як співвідносяться розміри W_z цих перерізів при $b = R$?

à)



á)

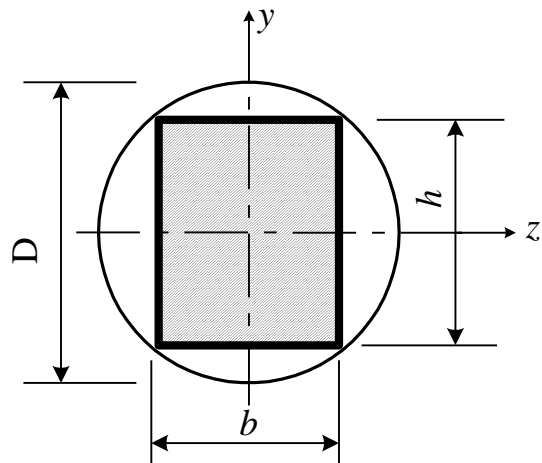


Рис. 2.10. До задачі 2.2.8

2.2.9. Чи є для показаних на рис. 2.11 перерізів будь-яка пара взаємно перпендикулярних центральних осей – головною? Якщо балка має поперечний переріз у вигляді поданих на рисунку фігур, то як варто розташувати нейтральну вісь у кожному з них, щоб максимальні нормальні напруження були б найменшими?

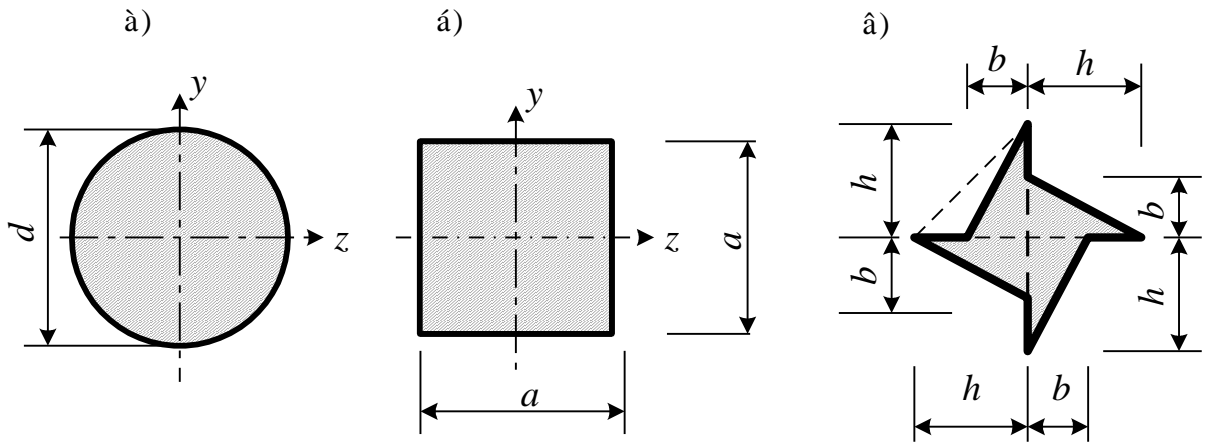


Рис. 2.11. До задачі 2.2.9

2.2.10. Балка прямокутного поперечного перерізу отримана із заготовки круглого перерізу (рис. 2.12). Якими повинні бути співвідношення сторін прямокутного перерізу для одержання:

- а) балки найбільшої міцності;
- б) балки найбільшої жорсткості?

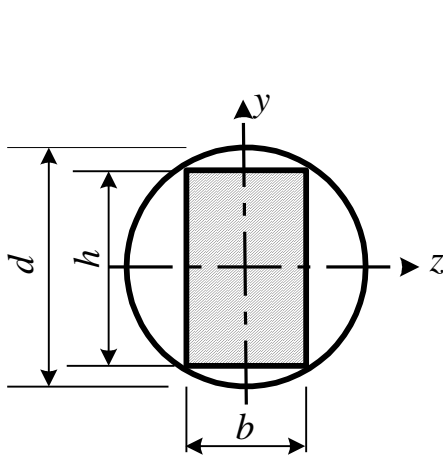


Рис. 2.12. До задачі 2.2.10

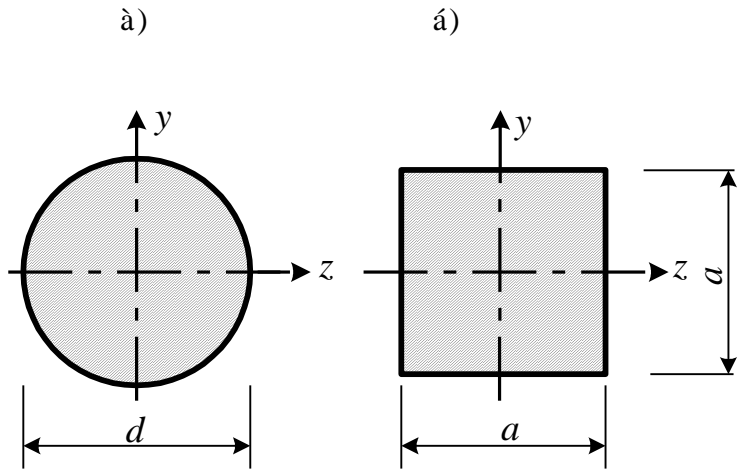


Рис. 2.13. До задачі 2.2.11

2.2.11. На рис. 2.13, а, б показані два рівновеликих перерізи. Який з перерізів раціонально використовувати:

- а) при роботі вала такого перерізу на кручення;
- б) при роботі балки такого перерізу на згин?

Розділ 3

СКЛАДНИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН

3.1. Основні поняття і формули

Плоский напружений стан

Напруження по похилих площадках

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha ;$$

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha ;$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha .$$

Нахил головних площадок

$$tg 2\alpha_0 = - \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} .$$

Головні напруження

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} .$$

Екстремальні дотичні напруження

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} .$$

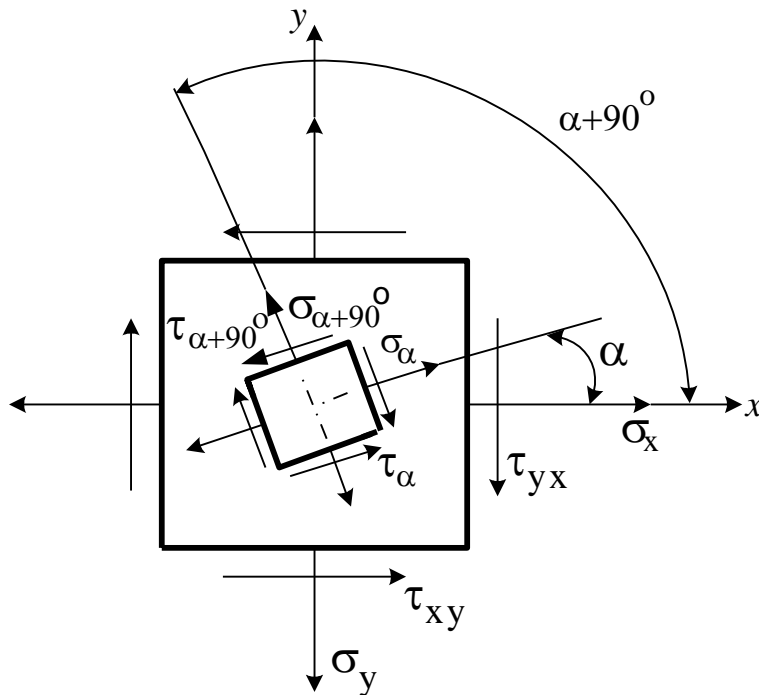


Рис. 3.1. Ілюстрації до плоского напруженого стану

Формула для визначення лінійної деформації відносно довільної осі, поверненої від осі x на кут α ,

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} \ell m,$$

де $\ell = \cos\alpha$; $m = \cos(\alpha + 90^0)$.

Головні деформації

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}.$$

Напрямок головних осей деформацій

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}.$$

Закон Гука при плоскому напруженому стані

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0.$$

Закон Гука при плоскій деформації

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x].$$

Об'ємний напружений стан

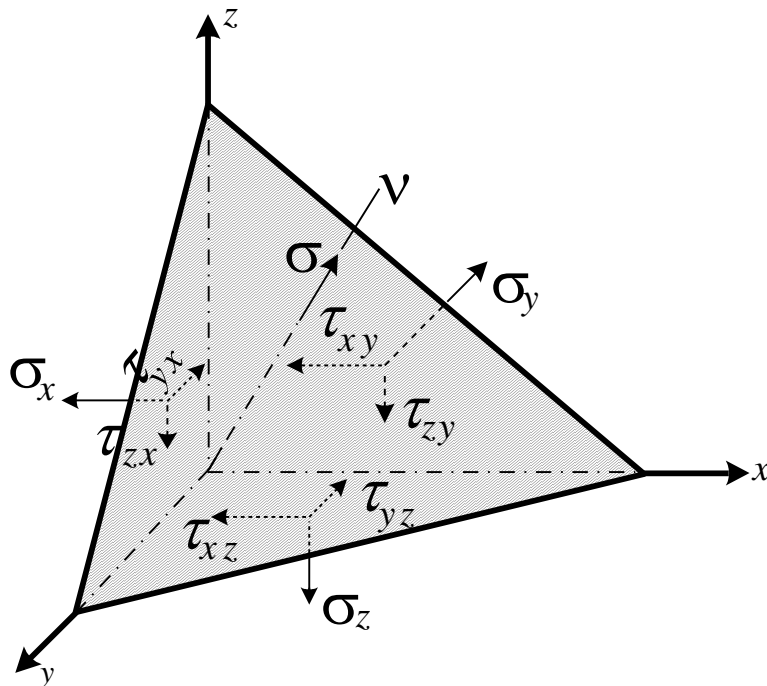


Рис. 3.2. Ілюстрації до об'ємного напруженого стану

Напрявні косинуси

$$\cos(x, \nu) = \ell; \quad \cos(y, \nu) = m; \quad \cos(z, \nu) = n.$$

Рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0; \\ \tau_{yx} \ell + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz} n &= 0; \\ \tau_{zx} \ell + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned}$$

Зв'язок між косинусами

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Визначення головних напружень

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0.$$

Інваріанти напруженого стану

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}.$$

Закон Гука при об'ємному напруженому стані

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{G}.$$

Відносна зміна об'єму

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

3.2. Задачі

3.2.1. Прямолинійний брус постійного перерізу А працює в умовах центрального розтягання силою F. Необхідно визначити величину нормальних напружень на гранях елементарного паралелепіпеда, у якого подовження 2-х із 3-х ребер дорівнює нулю, якщо дані значення F, А і коефіцієнт Пуассона.

3.2.2. Сталевий кубик, довжина ребра якого $a = 0,1$ м, стиснутий тиском $p = 200$ МПа, що діє тільки на його нижню і верхню грані. Знайти коефіцієнт Пуассона матеріалу кубика, якщо площа кожної з бічних граней його зменшилася на 7 мм^2 .

3.2.3. На торці сталеві пластини діє рівномірно розподілений тиск $p = 140$ МПа (рис. 3.3). Необхідно визначити:

- 1) залежність кутових деформацій квадрата ABCD від кута α ;
- 2) залежність відносних лінійних деформацій діагоналей AC і BD від кута α і значення α , при якому ці деформації стають найбільшими.

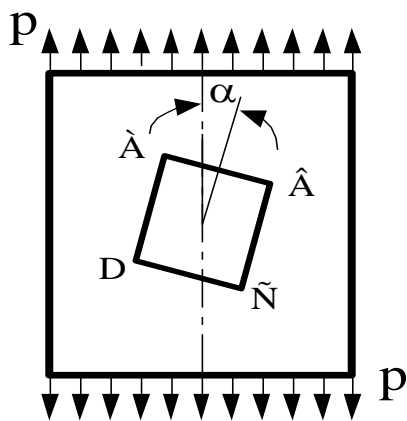


Рис. 3.3. До задачі 3.2.3

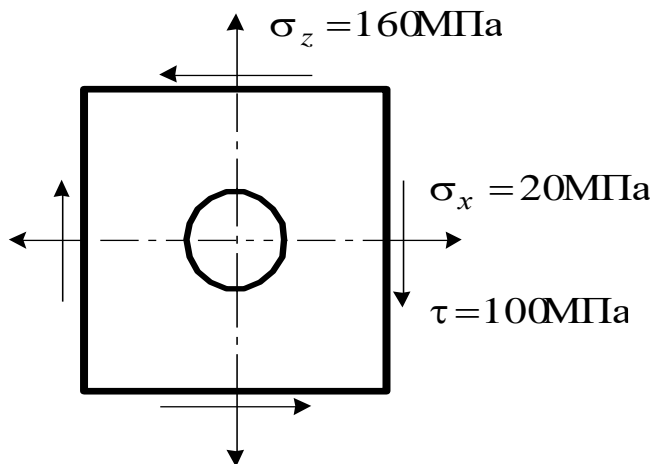


Рис. 3.4. До задачі 3.2.4

3.2.4. На грані сталевого кубика, що співпадає з площиною креслення, нанесено окружність. Визначити положення і відносне подовження великої і малої осей еліпса, у який перетвориться окружність у процесі навантаження. Кінцевому значенню навантаження відповідають показані на рисунку напруження. Вважати для сталі: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$ (рис. 3.4).

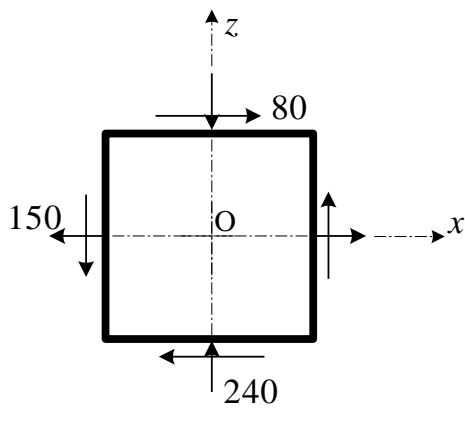


Рис. 3.5. До задачі 3.2.5

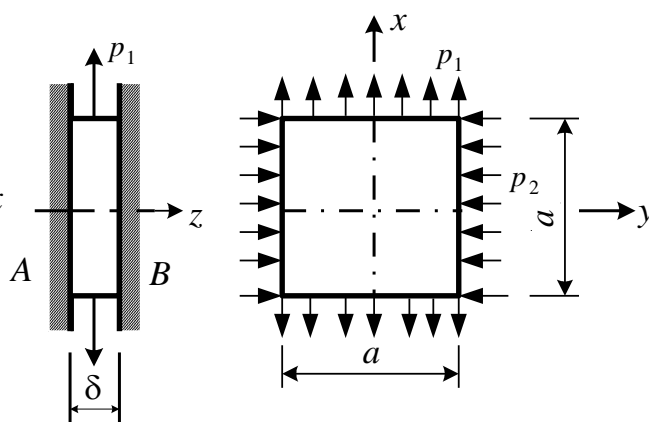


Рис. 3.6. До задачі 3.2.6

3.2.5. Напружений стан у точці “О” показаний на рис. 3.5 (напруження – МПа). Необхідно визначити розміри σ_1 ; σ_2 ; σ_3 і положення головних площадок.

3.2.6. Нехай (рис. 3.6) $\delta = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $a = 10 \cdot 10^{-2}$ м; $p_1 = 80$ МПа; $p_2 = 200$ МПа; $\nu = 0,25$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Плити А і В – абсолютно жорсткі. Необхідно визначити головні напруження, головні деформації і відносну зміну об’єму.

3.2.7. Під дією навантаження у пластині виникає плоский напружений стан: σ_x , σ_y та τ_{xy} . За напрямками a , b і c розетки з дротяних датчиків омичного опору у точці O (рис. 3.7) з напрямними косинусами $l_a = 0,6$; $m_a = 0,8$; $l_b = -0,6$; $m_b = 0,8$; $l_c = -1,0$; $m_c = 0$ одержані деформації $\varepsilon_a = 2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b = -1 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 4 \cdot 10^{-4}$. Визначити головні напруження і положення головних площадок, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$.

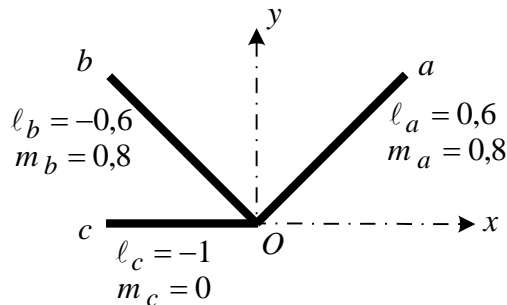


Рис. 3.7. До задачі 3.2.7

Розділ 4

ЗСУВ І КРУТІННЯ

4.1. Основні поняття і формули

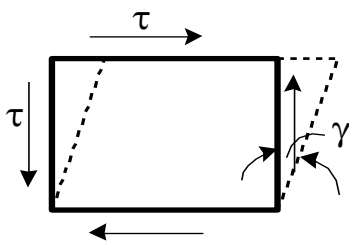


Рис. 4.1. Зсув

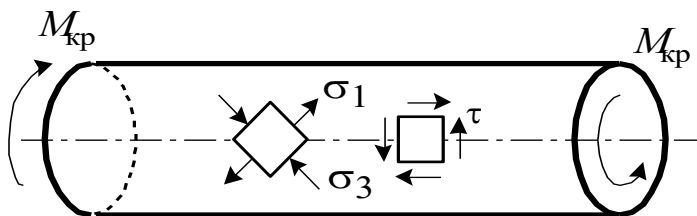


Рис. 4.2. Крутіння

Закон Гука $\tau = \gamma G$.

Залежності між модулями пружності $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Умова міцності заклепок на зріз

$$\tau = \frac{4Q}{\pi d^2 m n_{зр}} \leq [\tau]; \quad \tau = \frac{4Q}{\pi d^2 m n_{зр}} \leq R_{зр}.$$

Умова міцності зварного шва на зріз

$$\tau_e = \frac{Q}{0,7 \ell h_{ш}} \leq [\tau_e]; \quad \tau = \frac{Q}{0,7 \ell h_{ш}} \leq R_{зр}.$$

Напруження при крученні $\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{J_\rho} \rho$.

Кут закручування $\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GJ_\rho}$.

Умова міцності $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} \leq [\tau]$.

Полярний момент інерції $J_\rho = \frac{\pi r^4}{2}$.

Полярний момент опору $W_\rho = \frac{\pi r^3}{2}$.

Крутіння стержнів із прямокутним перерізом

Напруження в середині довгої сторони $\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}$.

Напруження в середині короткої сторони $\tau_2 = \gamma_k \tau_1$.

Кут закручування $\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{GJ_{кр}}$.

Момент опору $W_{кр} = \beta h b^2$. Момент інерції $J_{кр} = \alpha h b^3$;

b – розмір короткої сторони перерізу; коефіцієнти α , β і γ_k (див. табл. 2.1).

4.2. Задачі

4.2.1. Невагомий колінчастий стержень ABC (див. рис. 4.3) утримується в рівновазі за допомогою болта на опорі A та роликів опори B. Записати умову міцності болта при зрізі і визначити діаметр його поперечного перерізу d , якщо F, ℓ і $[\tau]$ відомі.

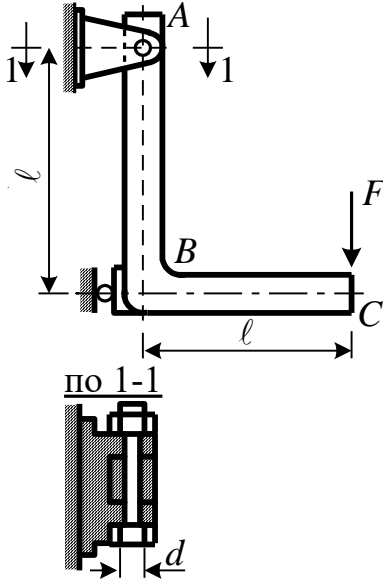


Рис. 4.3. До задачі 4.2.1

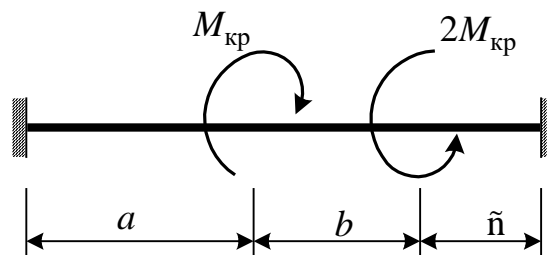


Рис. 4.4. До задачі 4.2.2

4.2.2. При яких співвідношеннях a, b і c виконується умова рівномірності вала на ділянках довжиною b і c ? Матеріал і поперечний переріз вала однакові по всій його довжині (рис. 4.4).

4.2.3. Дано: $d_1 = 0,08$ м; $d_2 = 0,16$ м; $d_3 = 0,2$ м; $M_{кр} = 120$ кНм. Сталева, зовнішня частина вала, і мідна, внутрішня частина, скріплені по поверхні так, що виключається їхній відносний поворот. Необхідно побудувати епюру розподілу напружень по перерізу вала. $G_{ст} = 8 \cdot 10^4$ МПа; $G_{м} = 3,5 \cdot 10^4$ МПа (рис. 4.5).

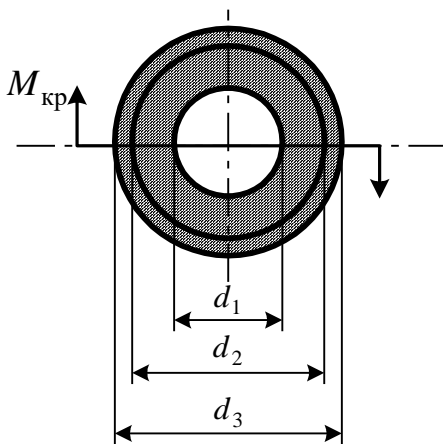


Рис. 4.5. До задачі 4.2.3

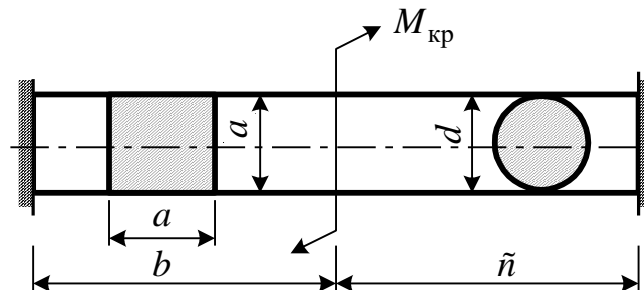


Рис. 4.6. До задачі 4.2.4

4.2.4. При якому співвідношенні між розмірами “b” і “c” обидві ділянки вала будуть рівноміцними (рівнонебезпечними) (рис. 4.6)?

4.2.5. Мідний стержень круглого поперечного перерізу вставлений у сталеву трубку так, що виключено їхнє перекручування один відносно іншого (рис. 4.7). Визначити допустиме значення моменту $[M_{кр}]$, якщо $D = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $d = 3,2 \cdot 10^{-2}$ м; $a = 0,1$ м; $b = 0,15$ м $G_c = 8 \cdot 10^4$ МПа; $G_m = 3,5 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau]_c = 80$ МПа; $[\tau]_m = 40$ МПа.

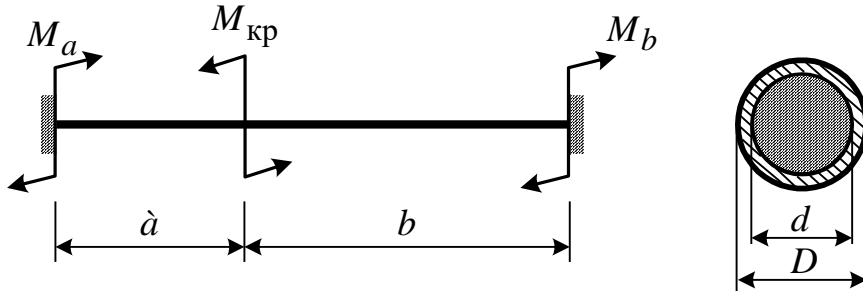


Рис. 4.7. До задачі 4.2.5

4.2.6. Дано: $a = 40$ мм; $l = 200$ мм; $G_2 = 8 \cdot 10^4$ МПа;
 $A_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $l_1 = 400$ мм; $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа;
 $\alpha_1 = 125 \cdot 10^{-7}$ 1/град; $b = 100$ мм.

Стержні 1 нагріваються на $\Delta t = 80^0$ С. Траверса АВС – абсолютно жорстка. Визначити τ_{max} в стержні 2, σ у стержнях 1 і кут повороту перерізу В стержня 2. Моменти інерції і моменти опору при крутінні для квадратного перерізу дорівнюють $J_{кр} = \alpha a^4$; $W_{кр} = \beta a^3$ (рис. 4.8).

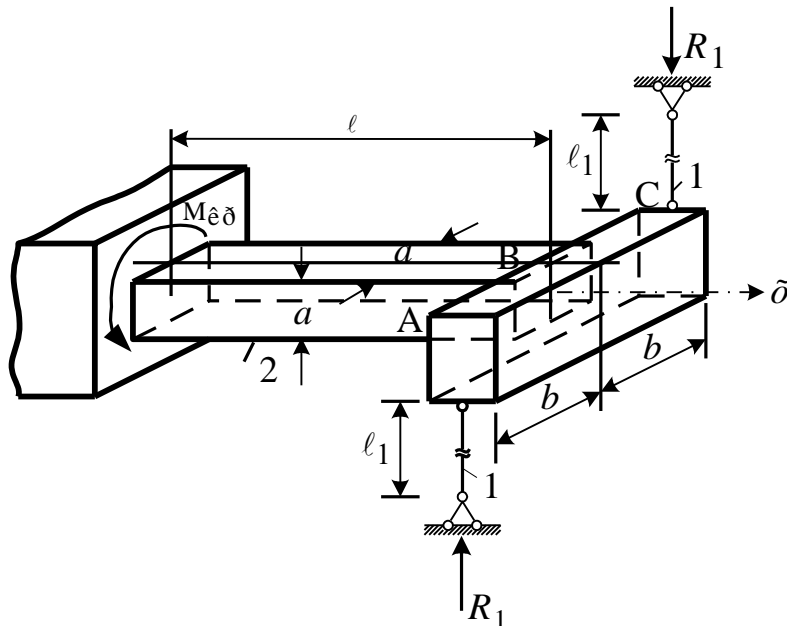


Рис. 4.8. До задачі 4.2.6

Розділ 5

ЗГИН

5.1. Основні поняття і формули

Відносне подовження волокон $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$.

Нормальні напруження $\sigma = E \frac{y}{\rho}$; $\sigma = \frac{M}{J_z} y$.

Кривизна $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}$.

Максимальні напруження $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$.

Дотичні напруження $\tau = \frac{Q S_z^{\text{отс}}}{b J_z}$.

Диференціальні залежності

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

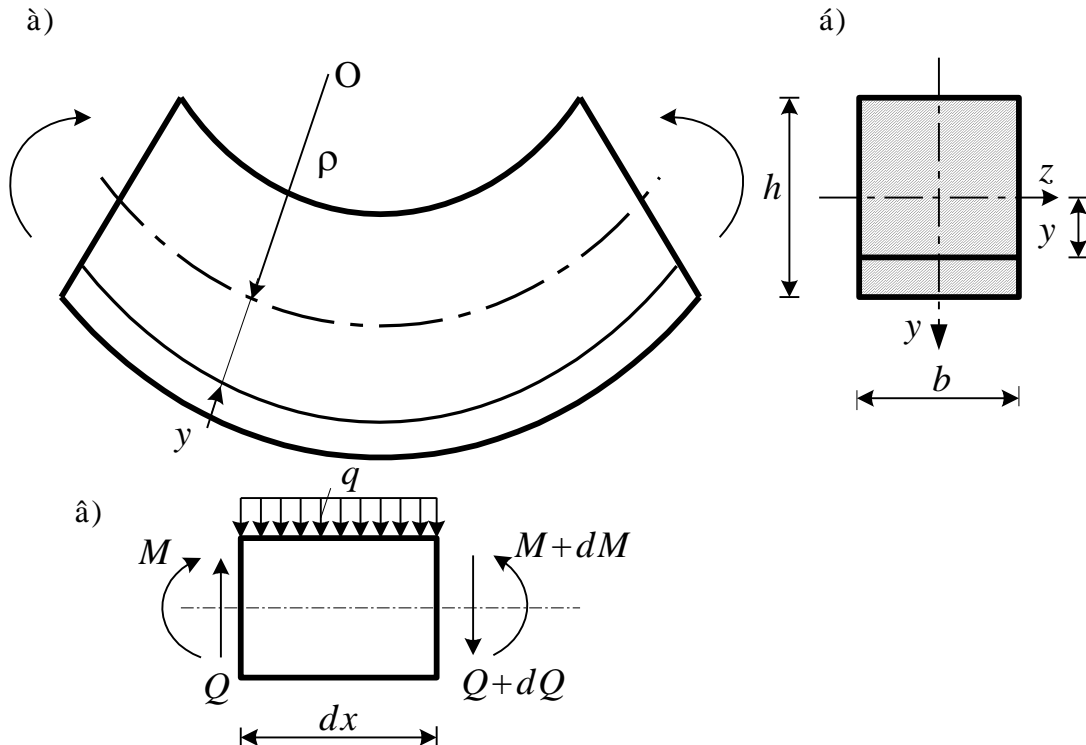


Рис. 5.1. Ілюстрація до згину

Головні напруження

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Умови міцності:

– за нормальними напруженнями $\frac{M_{\max}}{W_z} \leq R$:

– за дотичними напруженнями $\frac{Q_{\max} S_z^{0,5}}{b J_z} \leq [\tau]$; $\frac{Q_{\max} S_z^{0,5}}{b J_z} \leq R_{зр}$,

– за головними напруженнями

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} \leq [\sigma]; \quad \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Наближене диференціальне рівняння пружної лінії

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M.$$

Методи визначення переміщень:

а) метод безпосереднього інтегрування диференціального рівняння:

$$EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M;$$

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = \int M dx + C;$$

$$EJ_z y = \int [\int M dx] dx + Cx + D;$$

б) метод початкових параметрів (рис. 5.2)

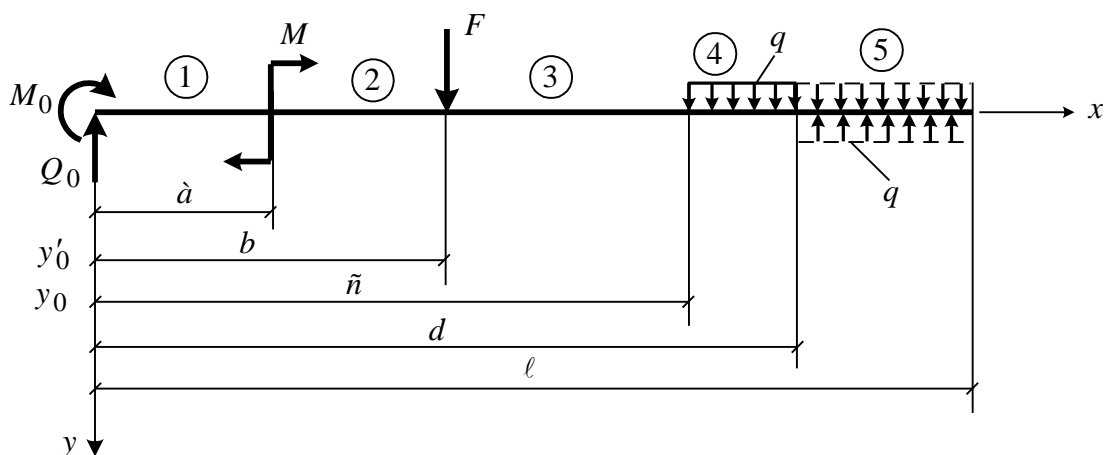


Рис. 5.2. До визначення переміщень методом початкових параметрів

$$EJ_z y(x) = y_0 + y_0' x - \frac{M_0 x^2}{2} - \frac{Q_0 x^3}{6} \Big|_1 - \frac{M(x-a)^2}{2} \Big|_2 + \frac{F(x-b)^3}{6} \Big|_3 +$$

$$+ \frac{q(x-c)^4}{24} \Big|_4 - \frac{q(x-d)^4}{24} \Big|_5 ;$$

$$EJ_z y'(x) = y_0' - M_0 x - \frac{Q_0 x^2}{2} \Big|_1 - M(x-a) \Big|_2 + \frac{F(x-b)^3}{6} \Big|_3 +$$

$$+ \frac{q(x-c)^3}{6} \Big|_4 - \frac{q(x-d)^3}{6} \Big|_5 ;$$

в) графоаналітичний (метод фіктивного навантаження)

$$q\phi = \frac{M}{EJ}; \quad y' = Q\phi; \quad y = M\phi;$$

г) метод Мора (способи Верещагіна та Сімпсона-Корноухова обчислення інтегралів) (рис. 5.3)

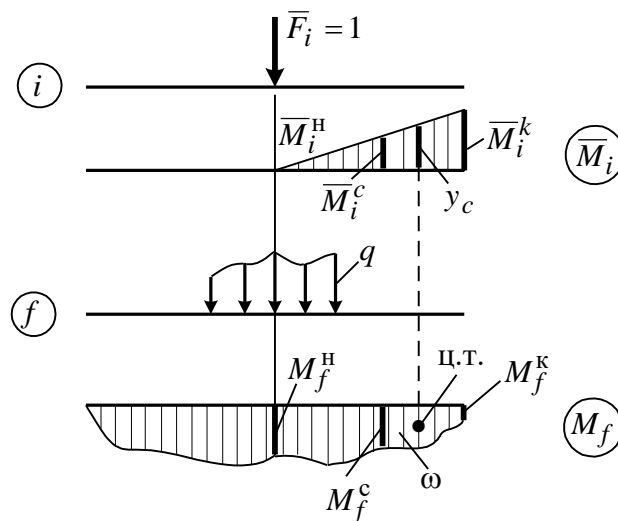


Рис. 5.3. До визначення переміщень методом Мору

$$\Delta_{if} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_f dx}{EJ_z};$$

$$\Delta_{if} = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{EJ_z};$$

$$\Delta_{if} = \sum \frac{\ell_i}{6EJ_z} \times (\bar{M}_i^H M_f^H + 4\bar{M}_i^c M_f^c + \bar{M}_i^k M_f^k).$$

5.2. Задачі

5.2.1. Використовуючи принцип суперпозиції і не визначаючи опорні реакції, для кожної з поданих на рисунку балок побудувати епюри згинальних моментів (рис. 5.4).

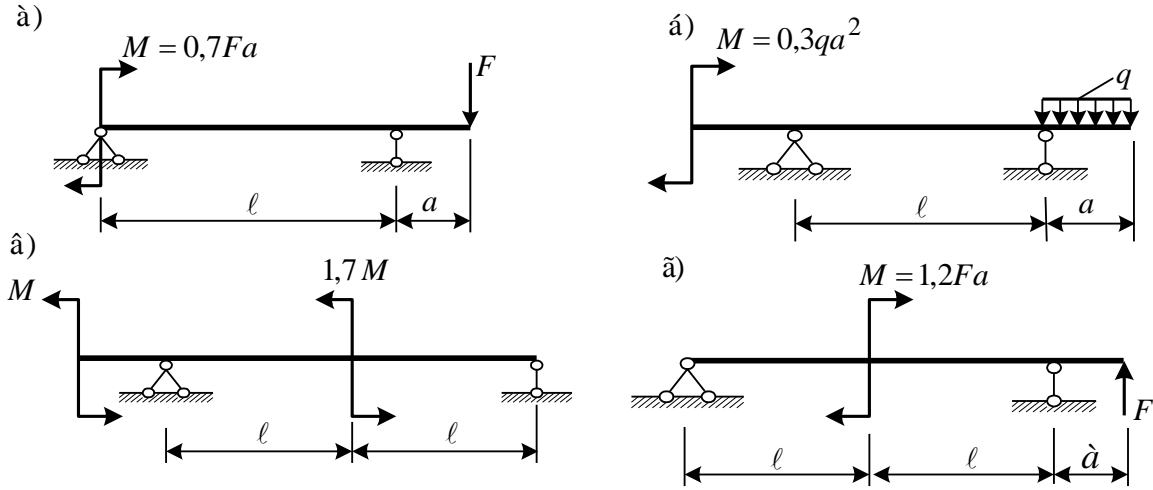


Рис. 5.4. До задачі 5.2.1

5.2.2. Яким розрахунковим схемам балок відповідають епюри поперечних сил і згинальні моменти, подані на рис. 5.5?

5.2.3. На ділянці балки АС діє розподілене навантаження (рис. 5.6), що змінюється за законом

$$q(x) = q_0 \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right),$$

де $q_0 = 20$ кН/м, $l = 2$ м. Визначити опорні реакції і побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів.

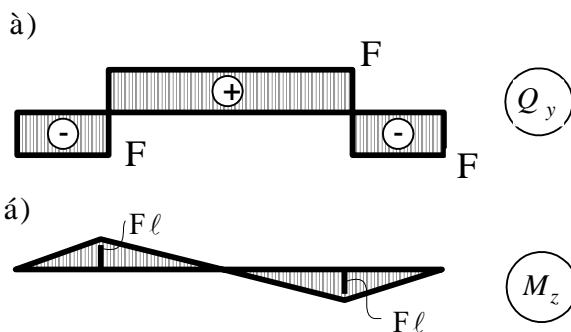


Рис. 5.5. До задачі 5.2.2

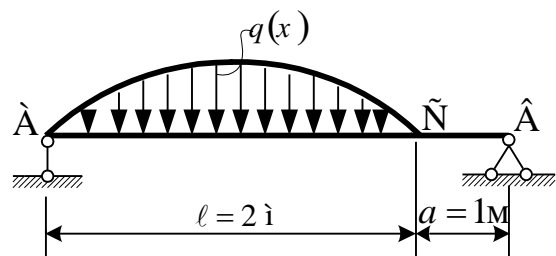


Рис. 5.6. До задачі 5.2.3

5.2.4. Знайти таке значення "к", при якому максимальний згинальний момент мав би найменше значення (рис. 5.7).

5.2.5. Дано: $M, \ell, EJ_z = const$. Необхідно побудувати епюри розподілу кутових і лінійних переміщень перерізів бруса по його довжині. Визначити максимальні значення кутового і лінійного переміщень (рис. 5.8).

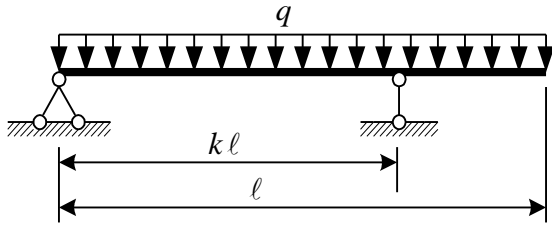


Рис. 5.7. До задачі 5.2.4

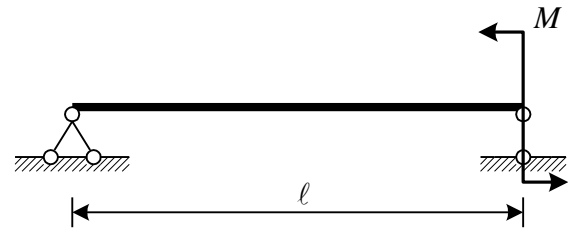


Рис. 5.8. До задачі 5.2.5

5.2.6. Балка, прогін якої дорівнює ℓ , із постійною по довжині висотою перерізів h , навантажена в кінцевих перерізах А і В парами сил $2M$ і M (рис. 5.9). Допустиме напруження для матеріалу балки – $[\sigma]$. Визначити закон зміни ширини прямокутного перерізу балки за умови забезпечення рівномірності. Показати на рисунку вид балки зверху.

5.2.7. Приймаючи $\ell=400$ мм, $a=10$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $J_z = 20 \cdot 10^{-8}$ м⁴, встановити, при якому значенні M кінці бруса будуть торкатися опор А і В (рис. 5.10).



Рис. 5.9. До задачі 5.2.6

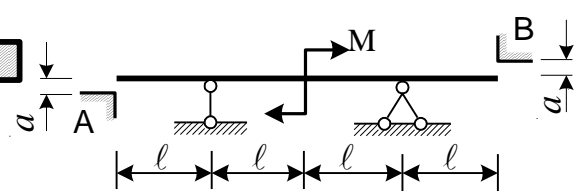


Рис. 5.10. До задачі 5.2.7

5.2.8. Консоль, що має форму усіченого конуса, завантажена силою F (рис. 5.11). Визначити максимальні нормальні напруження в балці, якщо $D/d = 2$.

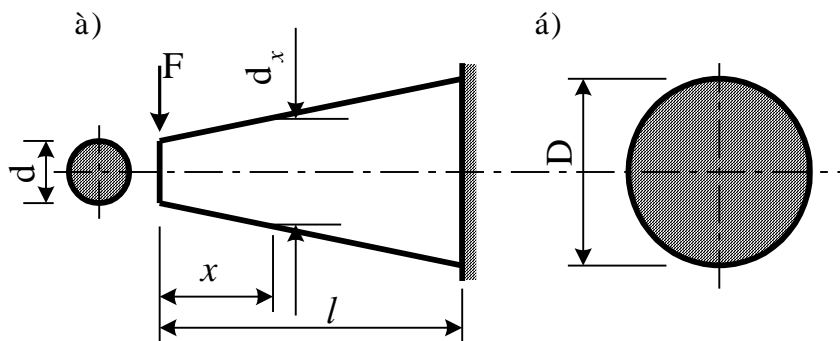


Рис. 5.11. До задачі 5.2.8

5.2.9. Визначити дотичне напруження в точці С на площадці, нормальній до осі бруса, за деформацією, яка вимірювалася в точці К в заданому напрямку. Матеріал бруса відомий (рис. 5.12).

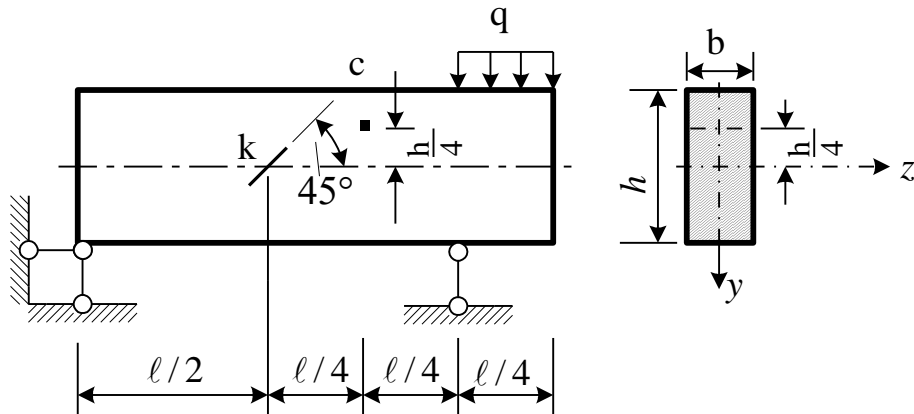


Рис. 5.12. До задачі 5.2.9

5.2.10. Дано: $M_z = 34$ кНм; $Q_y = 28$ кН; $h = 24 \cdot 10^{-2}$ м;
 $b = 20 \cdot 10^{-2}$ м; $t = 4 \cdot 10^{-2}$ м; $c = 5 \cdot 10^{-2}$ м (рис. 5.13).
 Визначити напружений стан у точці В перерізу.

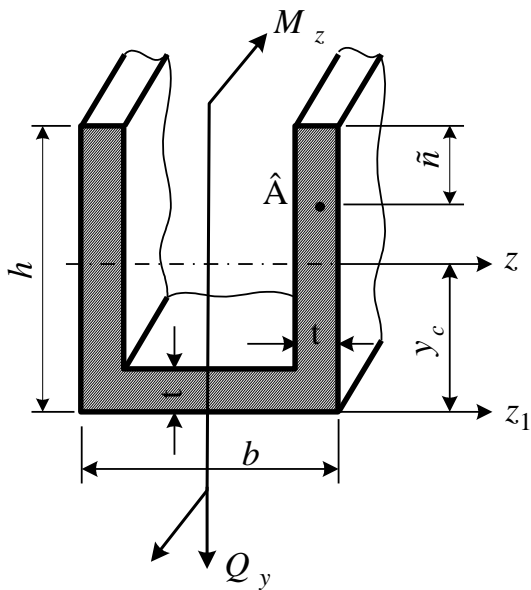


Рис. 5.13. До задачі 5.2.10

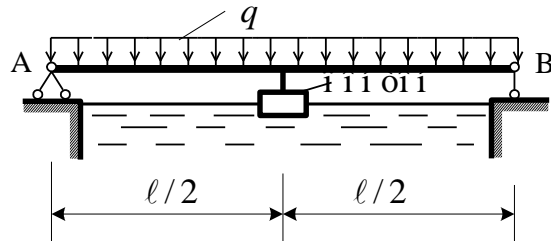


Рис. 5.14. До задачі 5.2.11

5.2.11. Міст через річку, несучою конструкцією якого є балка АВ, зміцнений за допомогою понтона. Визначити площу понтона в плані $S_{\text{п}}$, при якій навантаження, що сприймає понтон, складе 25 % повного навантаження на міст (рис. 5.14).

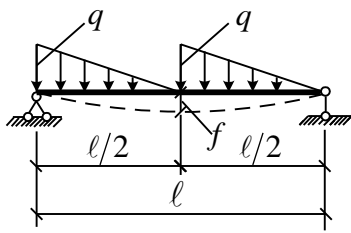


Рис. 5.15. До задачі 5.2.12

5.2.12. Дано: балка на двох опорах прогоном l з жорсткістю перерізів EJ завантажена навантаженням q , яке змінюється за кусочно-лінійним законом (рис. 5.15). Визначити прогин балки посередині прогону.

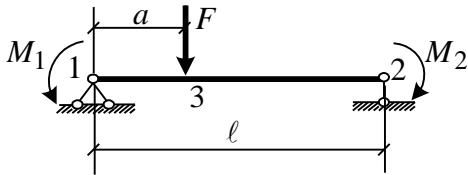


Рис. 5.16. До задачі 5.2.13

5.2.13. Для заданої схеми закріплення стержня знайти такі моменти M_1 і M_2 , при яких прогин і кут повороту поперечного перерізу в точці 3 дорівнюють нулю. Жорсткість стержня $EJ = const$, сила F і розміри a, l відомі (рис. 5.16).

5.2.14. Визначити максимальні напруження в сталевих ($E=2 \cdot 10^5$ МПа) трубчастій консолі і суцільному круглому стержні, а також максимальний прогин системи (стержень може вільно, без тертя, переміщатися усередині отвору консолі) (рис. 5.17).

5.2.15. Пружна балка щільно, але без тертя вставлена в отвір, висвердлений у жорсткій основі. Інтуїтивно уявляється, що при навантаженні поперечною силою F балка вислизне із закріплення. Але незрозуміло під дією яких сил? Що покаже динамометр, якщо сили тертя відсутні (рис. 5.18)?

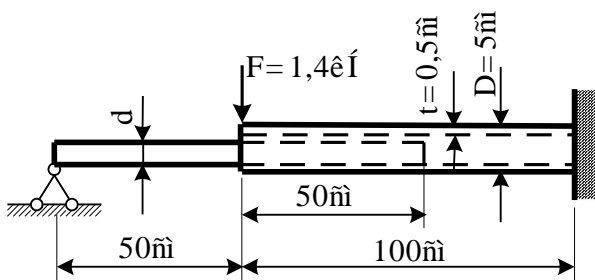


Рис. 5.17. До задачі 5.2.14

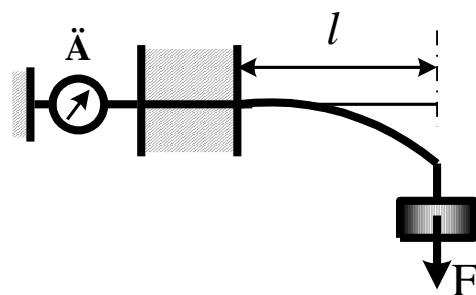
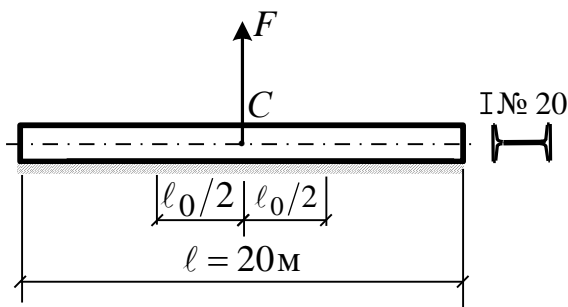


Рис. 5.18. До задачі 5.2.15

5.2.16. Двотавр № 20 піднімається за середину довжини.



Визначити переміщення точки С та довжину l_0 частини стержня, що згинається в той час, коли сила F досягає чверті ваги двотавра (рис. 5.19).

Рис. 5.19. До задачі 5.2.16

Розділ 6

СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНІ БАЛКИ.

НЕРОЗРІЗНІ БАЛКИ

6.1. Основні поняття і формули

Статично невизначними балками називаються такі балки, у яких не всі реакції і зусилля можна визначити за допомогою рівнянь рівноваги твердого тіла.

Для визначення зусиль у статично невизначних балках необхідно скласти, крім рівнянь статики, рівняння сумісності деформацій (геометричні рівняння) і рівняння зв'язку між зусиллями і деформаціями (фізичні рівняння).

Статично невизначна нерозрізна балка показана на рис. 6.1.

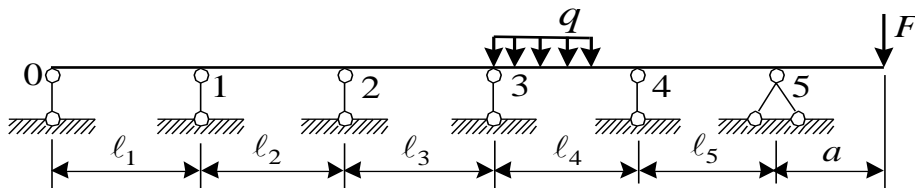


Рис. 6.1. Розрахункова схема нерозрізної балки

Рівняння трьох моментів:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6(B_n^\phi + A_{n+1}^\phi).$$

Таких рівнянь складається стільки, скільки є невідомих опорних моментів. Наприклад, для балки, зображеної на рис. 6.1, маємо

$$M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = 0,$$

$$M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = 0,$$

$$M_2l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4l_4 = -6R_3^\phi,$$

$$M_3l_4 + 2M_4(l_4 + l_5) - M_5l_5 = -6R_4^\phi,$$

де M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 і M_5 – опорні моменти;

$$M_0 = 0, M_5 = -Fa;$$

R_3^ϕ і R_4^ϕ - фіктивні опорні реакції (для знаходження цих реакцій необхідно побудувати епюру моментів на завантаженому прогоні (рис. 6.2), прийняти її за фіктивне навантаження і скласти рівняння статyki).

6.2. Задачі

6.2.1. Балка AC прямокутного перерізу (рис. 6.3) кінцем A затиснена в стіну і на довжині $AB = \ell_1$ підтримується підбалкою того самого перерізу. Як розподілиться тиск між балкою і підбалкою, якщо балку згинати силою F на кінці? (Чи буде тиск безперервно розподілений по довжині підбалки або тиск приведеється до однієї зосередженої сили, прикладеної до кінця підбалки?)

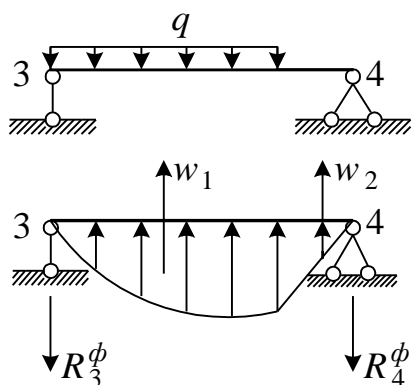


Рис. 6.2. До визначення фіктивних опорних реакцій

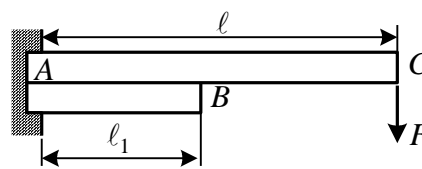


Рис. 6.3. До задачі 6.2.1

6.2.2. Дві балки двотаврового перерізу, що лежать навхрест, перекривають помешкання розмірами 8×4 м (рис. 6.4). На верхню балку діє рівномірно розподілене навантаження $q = 8,1$ кН/м. Модуль пружності матеріалу балок $2 \cdot 10^5$ МПа, допустиме напруження $\sigma = 160$ МПа.

1. Підібрати перерізи балок, якщо при згині вони увесь час щільно дотикаються одна до одної.

2. Яку конструктивну особливість необхідно внести в систему цих балок, щоб одержати найбільшу економію їх матеріалу порівняно з першим випадком?

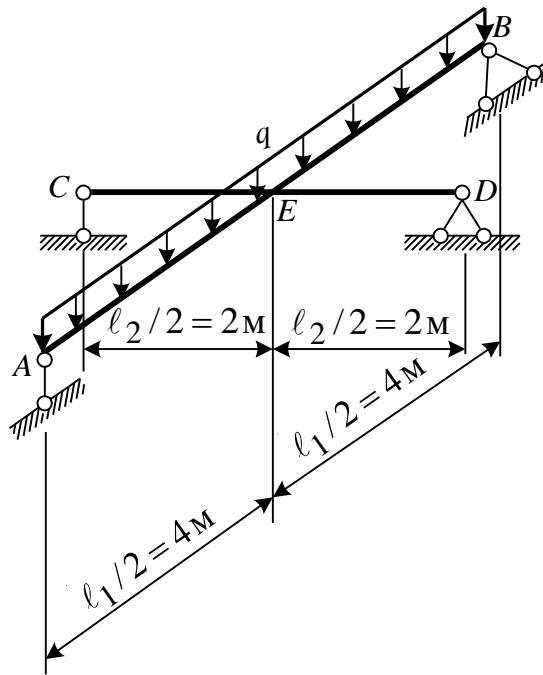


Рис. 6.4. До задачі 6.2.2

6.2.3. Балка посилена трьома шарнірно з'єднаними стержнями (шпренгелем) (рис. 6.5, б). Визначити площу перерізу стержнів, при якій вертикальне переміщення точки С буде в 2 рази менше від максимального прогину балки, показаної на рис. 6.5, а. Жорсткість балки EJ і параметри q , α , ℓ задані. Площі всіх стержнів шпренгеля однакові.

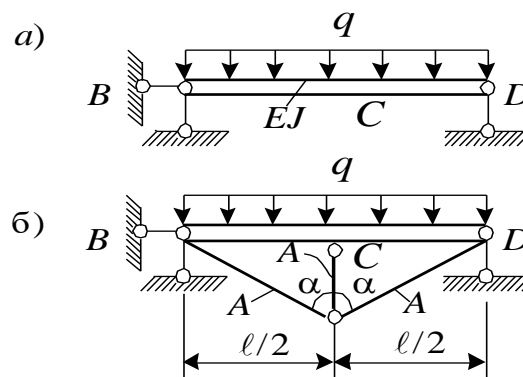


Рис. 6.5. До задачі 6.2.3

6.2.4. Трипрогонова нерозрізна балка постійного перерізу довжиною $L = 90$ м несе рівномірно розподілене навантаження q (рис. 6.6). Як повинні співвідноситися між собою її прогони, щоб маса балки була найменшою?

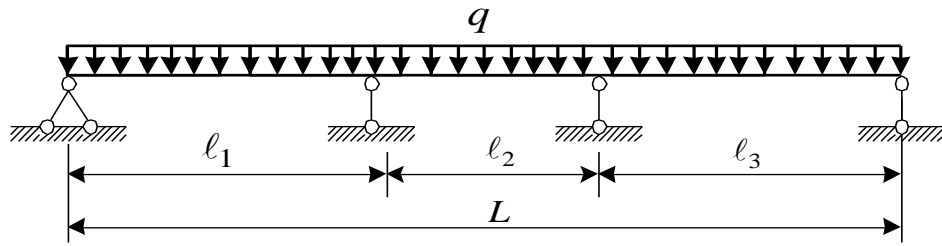


Рис. 6.6. До задачі 6.2.4

Розділ 7

БАЛКА НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

7.1. Основні поняття і формули

Балкою, яка лежить на суцільній пружній основі, називається така балка, яка опирається по всій своїй довжині на пружне середовище і чинить опір переміщенням, які визвані згином балки.

Пружною основою називається така основа балки, яка деформується під дією маси балки, розташованим на ній навантаженням (рис. 7.1) і при цьому надає пружну протидію - опір.

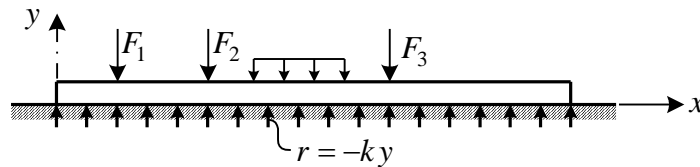


Рис. 7.1. Розрахункова схема балки на пружній основі

Диференціальне рівняння згину

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4s^4 y = \frac{q}{EJ},$$

де $s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ – параметр, який характеризує пружні властивості балки і основи.

Нескінченно довга балка при дії на неї однієї зосередженої сили F :

$$\text{– прогин } y = -\frac{F}{8s^3 EJ} e^{-sx} (\sin sx + \cos sx) = -\frac{F}{8s^3 EJ} \eta_1(sx);$$

$$\text{– кут повороту } \frac{dy}{dx} = \varphi = \frac{F}{4s^2 EJ} e^{-sx} \sin sx = \frac{F}{4s^2 EJ} \eta_3(sx);$$

– згинальний момент $M = \frac{F}{4s} e^{-sx} (\cos sx - \sin sx) = \frac{F}{4s} \eta_1(sx)$;

– поперечна сила $Q = -\frac{F}{2} e^{-sx} \cos sx = -\frac{F}{2} \eta_2(sx)$.

Коротка балка (метод початкових параметрів):

– прогин

$$y(x) = y_0 Y_{1sx} + \frac{y'_0}{s} Y_{2sx} - \frac{M_0}{s^2 EJ} Y_{3sx} - \frac{Q_0}{s^3 EJ} Y_{4sx} - \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1s(x-a)} - 1] + \\ + \frac{q}{4s^4 EJ} [Y_{1s(x-b)} - 1] + \frac{F}{s^3 EJ} Y_{4s(x-c)} - \frac{M}{s^2 EJ} Y_{3s(x-d)};$$

– кут повороту

$$y'(x) = -4sy_0 Y_{4sx} + y'_0 Y_{1sx} - \frac{M_0}{s EJ} Y_{2sx} - \frac{Q_0}{s^2 EJ} Y_{3sx} + \\ + \frac{q}{s^3 EJ} Y_{4s(x-a)} - \frac{q}{s^3 EJ} Y_{4s(x-b)} + \frac{F}{s^2 EJ} Y_{3s(x-c)} - \frac{M}{s EJ} Y_{2s(x-d)};$$

– згинальний момент

$$M(x) = 4EJs^2 y_0 Y_{3sx} + 4EJs y'_0 Y_{4sx} + M_0 Y_{1sx} + \frac{Q_0}{s} Y_{2sx} - \\ - \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-a)} + \frac{q}{s^2} Y_{3s(x-b)} - \frac{F}{s} Y_{2s(x-c)} + M Y_{1s(x-d)};$$

– поперечна сила

$$Q(x) = 4EJs^3 y_0 Y_{2sx} + 4EJs^2 y'_0 Y_{3sx} - 4M_0 s Y_{4sx} + Q_0 Y_{1sx} - \\ - \frac{q}{s} Y_{2s(x-a)} + \frac{q}{s} Y_{2s(x-b)} - F Y_{1s(x-c)} - 4Ms Y_{4s(x-d)}.$$

А. Фрейд рекомендує такі критерії для вибору методу розрахунку.
Якщо ℓ – довжина балки, то:

- 1) при $\ell < 0,8sx$ балка розраховується як абсолютно жорстка;
- 2) при $1,2sx < \ell < 4sx$ – як коротка;
- 3) при $\ell > 6sx$ – як нескінченно довга.

7.2. Задачі

7.2.1. Балка (рейка, $J = 1223 \text{ см}^4$, $W = 180 \text{ см}^3$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$) довжиною $\ell = 15 \text{ м}$ лежить на суцільній пружній основі і навантажена зосередженою силою $F = 100 \text{ кН}$ посередині (рис. 7.2). Жорсткість основи $k = 30 \text{ МПа}$. Побудувати епюри прогинів і згинальних моментів.

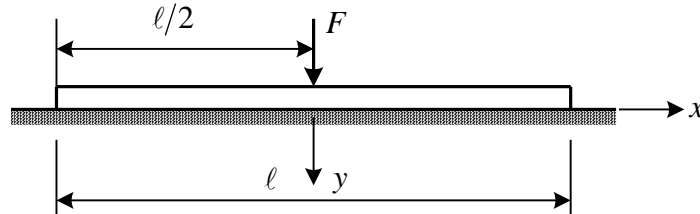


Рис. 7.2. До задачі 7.2.1

7.2.2. Розв'язати задачу 7.2.1 при довжині рейки $\ell = 2 \text{ м}$.

7.2.3. Прямий дерев'яний брус прямокутного поперечного перерізу плаває на поверхні води (рис. 7.3). Визначити напруження, яке виникає в брусі, і переміщення точки прикладання сили, якщо $F = 0,5 \text{ кН}$, $\ell = 10 \text{ м}$, $b = 20 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$. Дерево – сосна з питомою вагою $0,6 \text{ г/см}^3$ і модулем пружності $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

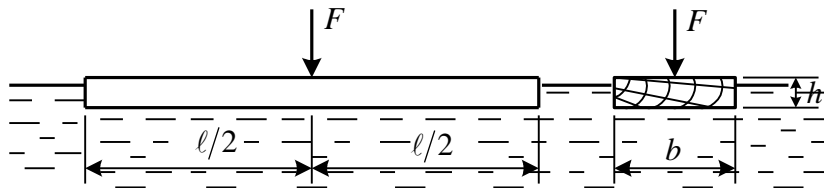


Рис. 7.3. До задачі 7.2.3

7.2.4. Стальний понтон, який має форму прямокутного паралелепіпеда, довжиною $\ell = 10 \text{ м}$ і шириною $b = 3 \text{ м}$ навантажений зосередженою силою $F = 200 \text{ кН}$ на своїй осі на відстані $a = 6 \text{ м}$ від носу (рис. 7.4). Визначити осідання y_1 і y_2 понтона і побудувати епюру згинальних моментів. Момент інерції перерізу 10^6 см^4 . Питома вага води $\gamma = 1000 \text{ кг/м}^3$.

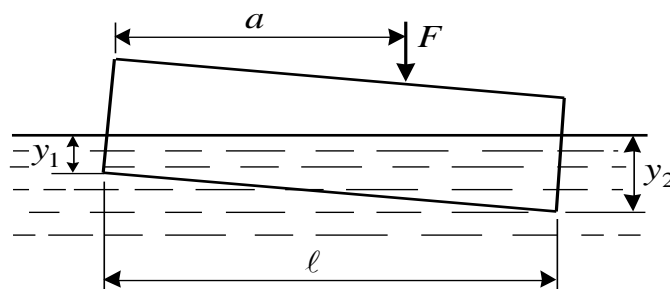


Рис. 7.4. До задачі 7.2.4

Розділ 8

КОСИЙ ЗГИН

8.1. Основні поняття і формули

Косим згином називається такий вид деформації, при якому площина дії навантаження не збігається з жодною з головних площин, що проходять через головні осі перерізу стержня (рис. 8.1).

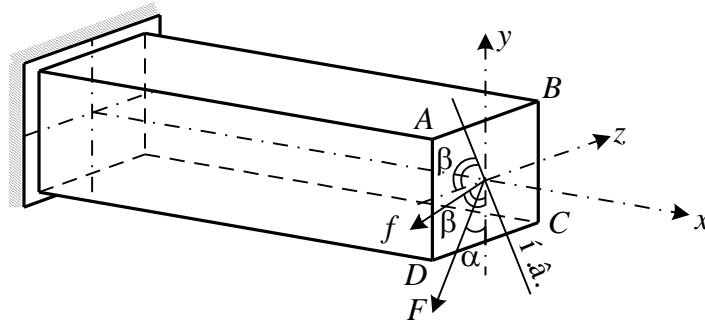


Рис. 8.1. Розрахункова схема стержня

Нормальні напруження

$$\sigma = \pm \frac{M_z y}{J_z} \pm \frac{M_y z}{J_y},$$

$$\sigma = \pm M \left(\frac{y \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \sin \alpha}{J_y} \right).$$

Положення нейтральної осі

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Умова міцності

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_z y_b}{J_z} + \frac{M_y z_b}{J_y} \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = M_{\max} \left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \leq [\sigma],$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_b = \frac{M_{\max}}{W_z} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma].$$

Повний прогин

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}.$$

Напрямок повного прогину

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

8.2. Задачі

8.2.1. Балка прямокутного перерізу $b \times h$ см згинається поперечним навантаженням, що діє в діагональній площині $p-p$ балки (рис. 8.2). Визначити положення нейтральної осі.

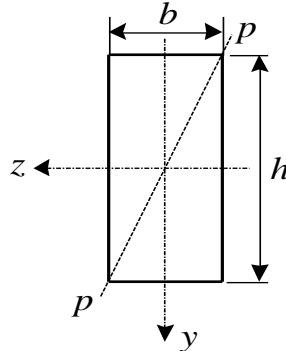


Рис. 8.2. До задачі 8.2.1

8.2.2. Балка прямокутного перерізу згинається навантаженням, площина дії якого складає кут α із віссю y (рис. 8.3). Підібрати співвідношення сторін перерізу так, щоб при заданому допустимому напруженні $[\sigma]$ площа перерізу, а, отже і маса балки були найменшими.

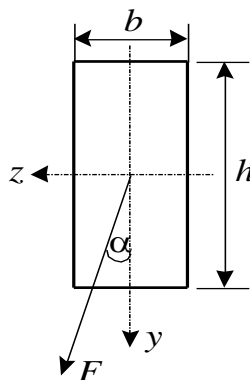


Рис. 8.3. До задачі 8.2.2

8.2.3. Балка швелерного перерізу з листа і двох кутиків (рис. 8.4, а), що працювала на навантаження, розташована в площині xOy , була посилена приварюванням додаткового кутика (рис. 8.4, б). Як зміняться максимальні напруження після посилення. Геометричні характеристики початкового перерізу $J_y = 623 \text{ см}^4$; $J_z = 49735 \text{ см}^4$; $A = 98,4 \text{ см}^2$; $z_0 = 1,80 \text{ см}$. Дати пояснення з приводу такого посилення балки.

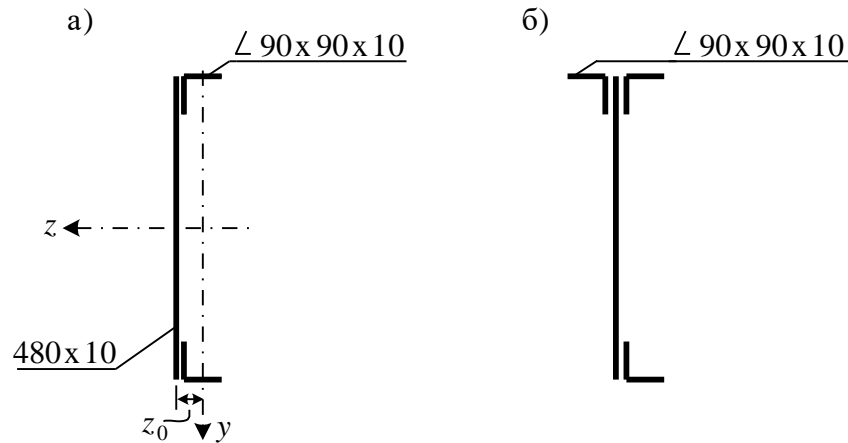


Рис. 8.4. До задачі 8.2.3

8.2.4. Балка прямокутного поперечного перерізу, що має прогін $\ell = 4a$, шарнірно закріплена обома кінцями, причому опора В шарнірно нерухома, а опора А може переміщатися уздовж осі x балки. Балка навантажена у вертикальній площині xOy рівномірним навантаженням q і в горизонтальній площині xOz – вантажем $F = 2qa$, який прикладений на відстані a від опори В (рис. 8.5). Прямокутний переріз балки має вертикальну сторону " h " і горизонтальну " b " із співвідношенням $\frac{h}{b} = k$.

Знайти небезпечний переріз бруса і визначити найбільше нормальне напруження в балці, якщо $k = 2$.

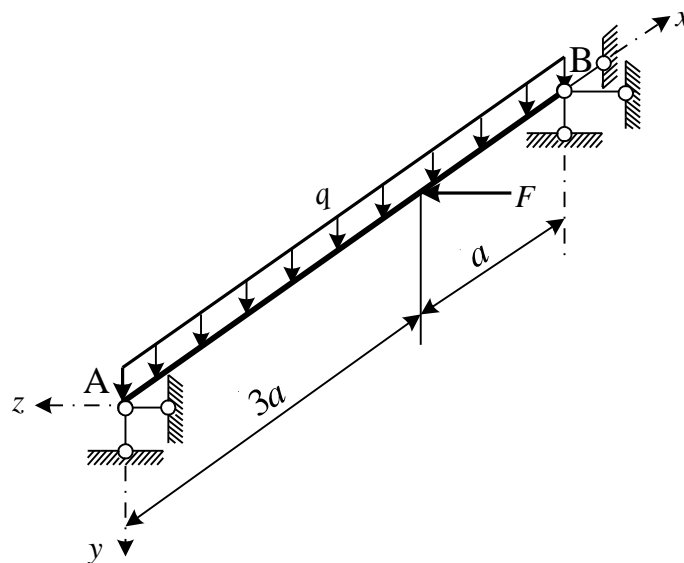


Рис. 8.5. До задачі 8.2.4

8.2.5. При якому куті нахилу площини дії згинального моменту (M) до вертикальної площини вантажопідйомність балок (рис. 8.6) виявиться найменшою?

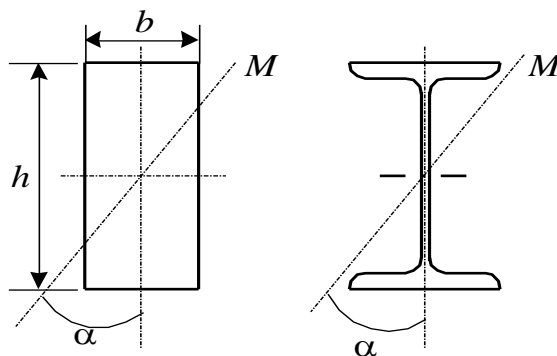


Рис. 8.6. До задачі 8.2.5

8.2.6. Балка з поперечним перерізом у вигляді півкола діаметром 16 см, що має довжину 2 м і вільно обіперта на кінцях, навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $q = 2$ кН/м (рис. 8.7). Визначити найбільші розтягувальні і стискальні напруження в балці.

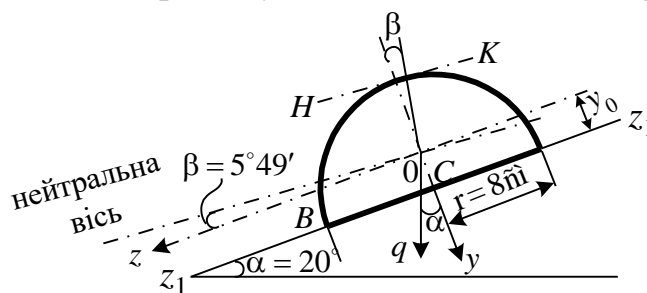


Рис. 8.7. До задачі 8.2.6

Розділ 9

ЗГИН З КРУТІННЯМ

9.1. Основні поняття і формули

Згином з крученням називається деформація стержня під дією зовнішніх сил, прикладених перпендикулярно до осі стержня і які лежать у площині, що паралельна його осі. При визначенні напружень використовується принцип незалежності дії сил.

Круглий брус (рис. 9.1). Максимальні нормальні напруження в точках C_1 і C_3

$$\sigma_u = \frac{M_u}{W}$$

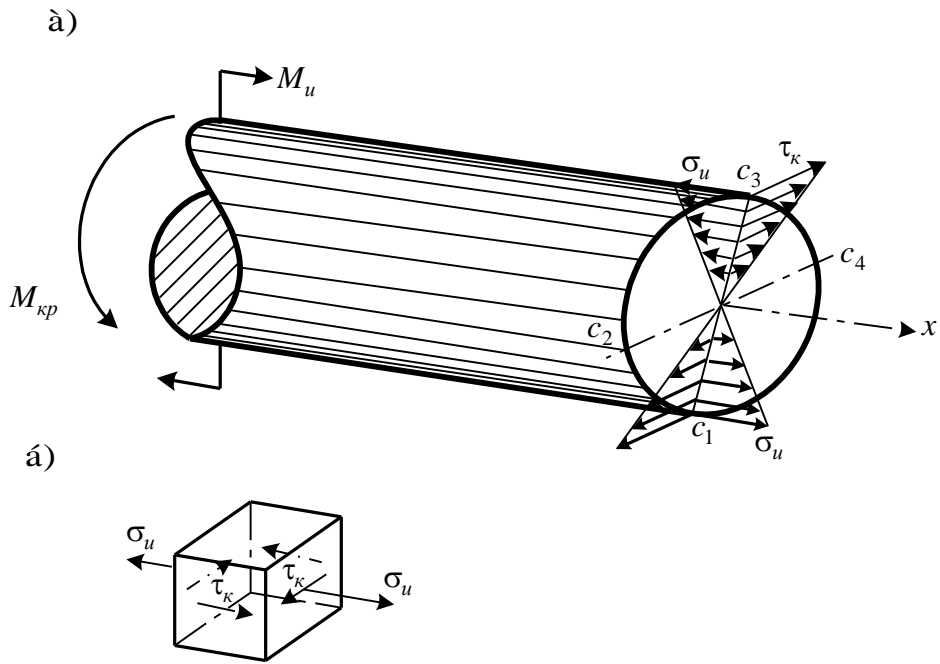


Рис. 9.1. Схема стержня

Максимальні дотичні напруження

$$\tau_k = \frac{M_{кр}}{W_\rho}.$$

Умова міцності $\frac{M_p}{W} \leq [\sigma]$.

Розрахункові моменти:

– за теорією найбільших дотичних напружень

$$M_{p3} = \sqrt{M_u^2 + M_k^2};$$

– за енергетичною теорією

$$M_{p4} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_k^2}.$$

Брус прямокутного перерізу (рис. 9.2).

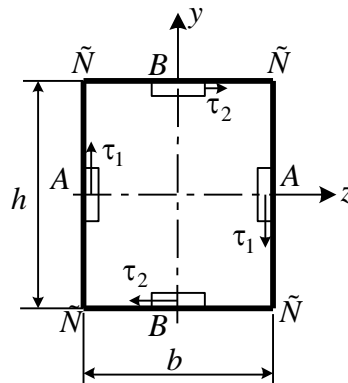


Рис. 9.2. Схема перерізу бруса

Напруження в небезпечних точках:

– точка А: $\sigma = \frac{M_y}{W_y}, \tau_k = \tau_1 = \frac{M_k}{\beta hb^2};$

– точка В: $\sigma = \frac{M_z}{W_z}, \tau_k = \tau_2 = \gamma\tau_1;$

– точка С: $\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}, \tau_k = 0.$

Умови міцності:

– за теорією найбільших дотичних напружень

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau_k^2} \leq [\sigma];$$

– за енергетичною теорією

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma].$$

9.2. Задачі

9.2.1. Визначити найбільше розрахункове напруження в круглому сталевому стержні АВ довжиною 40 см і діаметром 4 см, який навантажений двома однаковими вантажами $F=1$ кН (рис. 9.3). Чому буде дорівнювати розрахункове напруження в стержні, якщо один із вантажів буде знятий? Зробити висновки. Використати четверту теорію міцності.

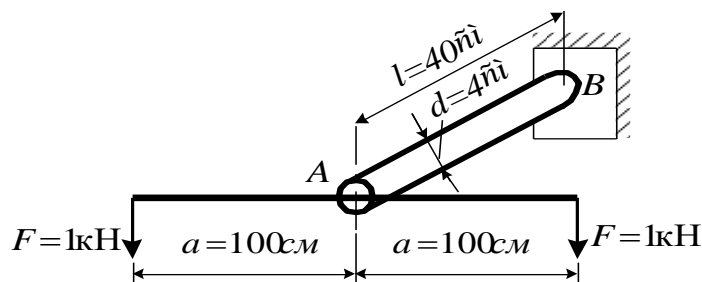


Рис. 9.3. До задачі 9.2.1

9.2.2. Порівняти вагу двох брусів круглого і квадратного перерізів, що сприймають згинальний M_u і крутний M_k моменти за умови $M_u = 3M_k$ (рис. 9.4). Передбачається, що показані бруси розраховуються за теорією найбільших дотичних напружень.

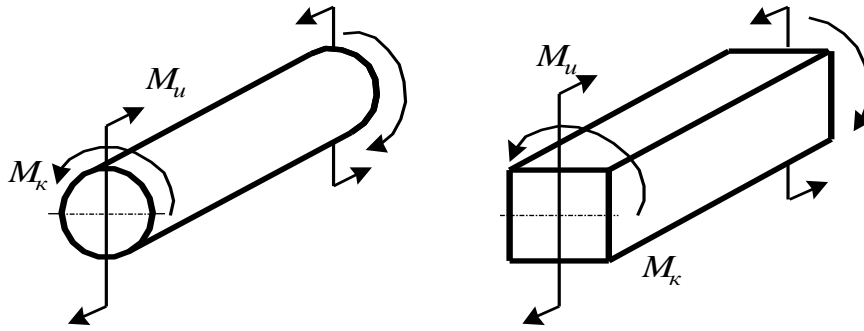


Рис. 9.4. До задач 9.2.2 і 9.2.3

9.2.3. При яких співвідношеннях між згинальним M_u і крутним M_k моментами більш міцнішим є брус круглого перерізу і при яких – брус квадратного перерізу (рис. 9.4)? Передбачається, що показані бруси мають однакові вагу і довжину. Порівняння зробити, виходячи з теорії найбільших дотичних напружень.

9.2.4. Сталева скоба, що має в плані вид прямокутника (рис. 9.5) із сторонами $\frac{\ell}{2}$ і ℓ , затиснена своїми кінцями А і В і несе вантаж F . Визначити діаметр скоби, якщо $F=0,8$ кН, $\ell=40$ см, а допустиме напруження для розрахунку за теорією найбільших дотичних напружень $[\sigma]=120$ МПа, $G=0,4E$.

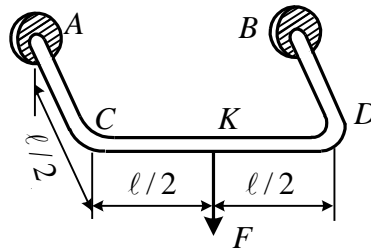


Рис. 9.5. До задачі 9.2.4

Розділ 10

ПОЗАЦЕНТРОВИЙ СТИСК

10.1. Основні поняття і формули

На брус діє сила F , яка паралельна поздовжній осі, але лінія її дії не збігається з нею. Брус відчуває позацентровий стиск (рис. 10.1).

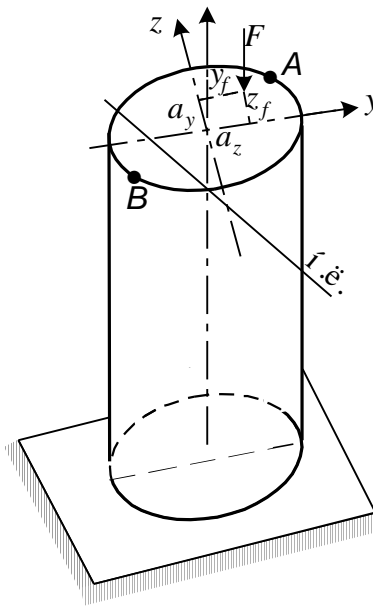


Рис. 10.1. Схема бруса

Нормальні напруження

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_f z}{i_y^2} + \frac{y_f y}{i_z^2} \right).$$

Рівняння нульової лінії

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_f}; \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_f}.$$

Умова міцності

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_f z_a}{i_y^2} + \frac{y_f y_a}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_{\text{с.ж}}];$$

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_f z_b}{i_y^2} + \frac{y_f y_b}{i_z^2} \right) \right| \leq [\sigma_p].$$

Ядрові точки $z_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{a_z}, \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_z^2}{a_y}.$

Радіуси інерції $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}.$

10.2. Задачі

10.2.1. Визначити положення нульової лінії і величину найбільшого нормального напруження в поперечному перерізі стояка, зображеного на рис. 10.2.

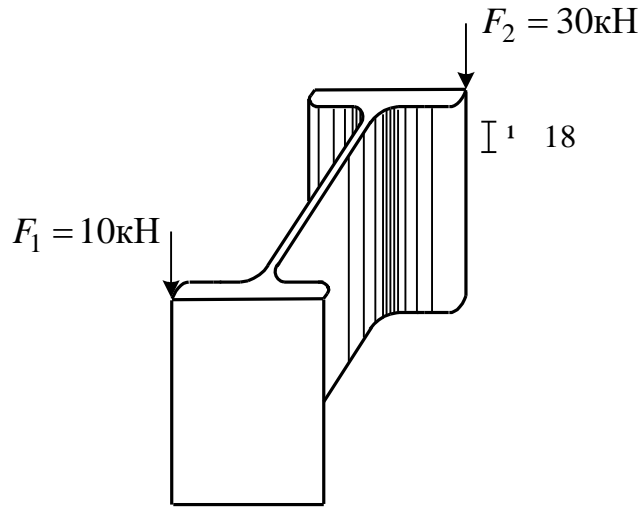


Рис. 10.2. До задачі 10.2.1

10.2.2. Короткий двотавровий стояк № 55, навантажений центрально прикладеною стискальною силою $F = 1800$ кН (рис. 10.3, а), посилений швелером №18, який приварений до стояка по всій його довжині (рис. 10.3, б). До посиленого стояка навантаження $F = 1800$ кН прикладене також посередині висоти двотавра. Чому дорівнювало найбільше стискальне напруження в двотавровому стояку і чому воно дорівнює в стояку, посиленому швелером?

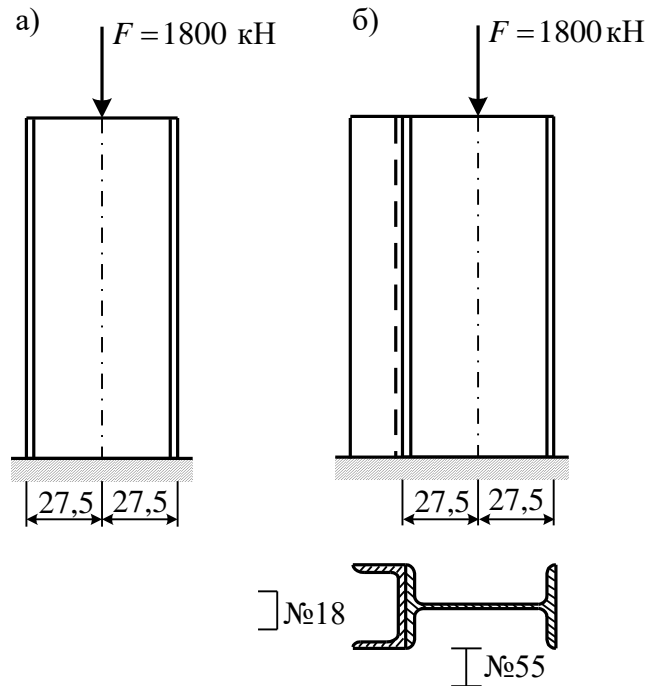


Рис. 10.3. До задачі 10.2.2

10.2.3. На рис. 10.4 зображені горизонтальні перерізи бика двоколійного залізничного мосту. Вага бика 32000 кН. У точках 1–8 на бик діють однакові сили ваги прогонових будівель моста, кожна з яких дорівнює 1200 кН. Крім того, у точках 1 і 2 на бик передаються однакові сили ваги потяга, що проходить по одній з прогонових будівель, кожна з яких дорівнює 2100 кН. Визначити найбільше і найменше стискальні напруження в горизонтальному перерізі бика біля основи і побудувати ядро перерізу.

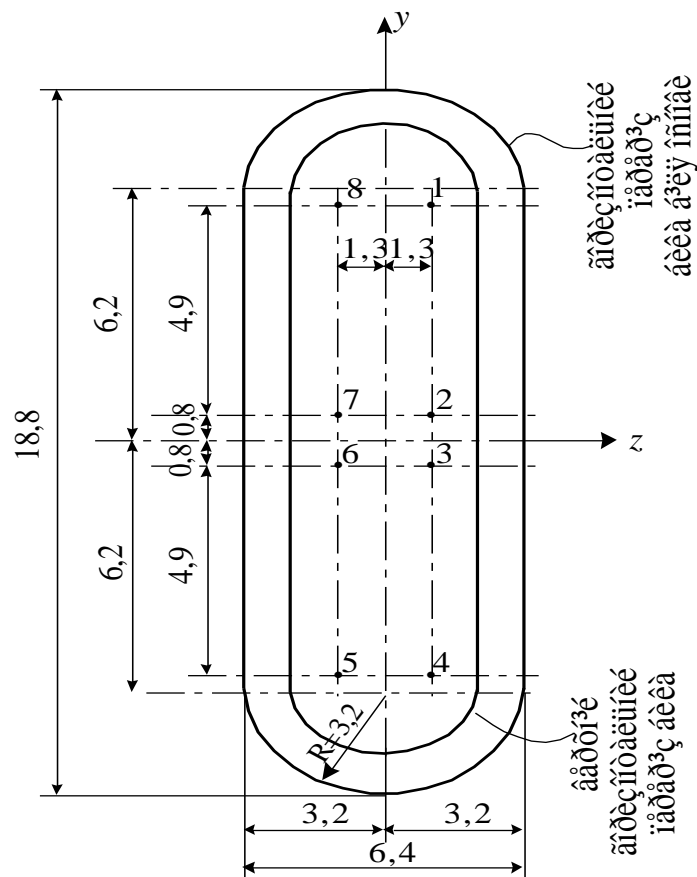


Рис. 10.4. До задачі 10.2.3

Розділ 11

СТІЙКІСТЬ

11.1. Основні поняття і формули

Формула Ейлера для визначення критичної сили

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2},$$

де μ – коефіцієнт приведеної довжини (рис. 11.1).

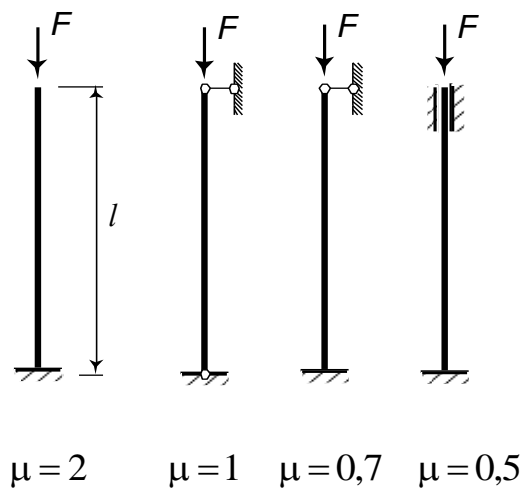


Рис. 11.1

Критичне напруження $\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$.

Приведена гнучкість стержня $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$.

Застосування формули Ейлера: $\sigma_{кр} \leq \sigma_n$, $\lambda \geq \lambda_{кр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}}$.

Формула Ясинського для визначення критичної сили $F_{кр} = \sigma_{кр} A = A(a - b\lambda)$.

Умова стійкості стиснутих стержнів $\sigma = \frac{N}{\phi A} \leq [\sigma]$,

де ϕ – коефіцієнт зниження допустимого напруження на стиск, що залежить від матеріалу стержня і його гнучкості.

11.2. Задачі

11.2.1. Стояк, затиснений нижнім кінцем, на вільному кінці навантажений вертикальною силою, що передається через трос (рис. 11.2). Передача зусилля через трос здійснюється двома варіантами. У першому випадку (рис. 11.2, а) трос опускається униз вільно. У другому випадку (рис. 11.2, б) – перекинутий без тертя через два жорстких блоки. У якому випадку критична сила $F_{кр}$ для стояка буде більшою?

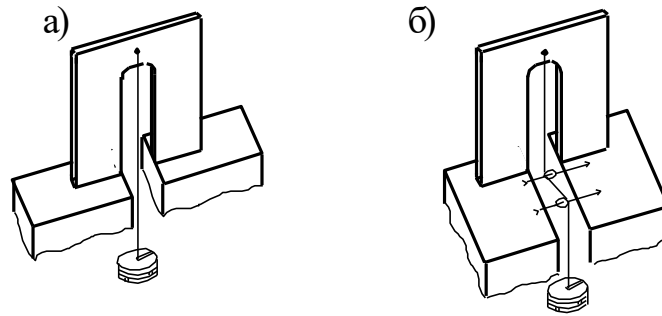


Рис. 11.2. До задачі 11.2.1

11.2.2. Захисний клапан В утримується стержнем CD, що працює на стиск (рис. 11.3). Визначити найменший момент інерції поперечного перерізу стержня з умови, щоб у ньому при тиску на клапан $p = 12$ атм, утворювався подовжній згин (стержень втрачав стійкість). Знайти прогин f стержня CD при підйомі клапана на 5 мм і визначити, наскільки при цьому зросте опір стержня CD порівняно з критичною силою. Робоча площа клапана $A = 50$ см.²

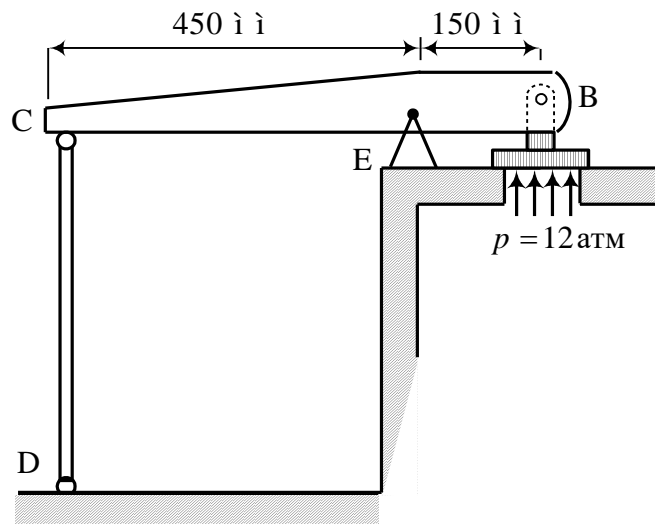


Рис. 11.3. До задачі 11.2.2

11.2.3. Скласти диференціальне рівняння вигнутої осі шарнірно закріпленого стержня, навантаженого рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q (рис. 11.4). Жорсткість стержня EJ . Вказати можливі шляхи розв'язання.

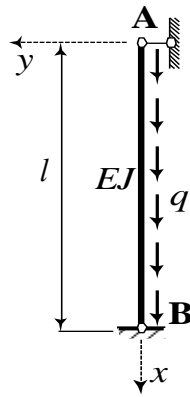


Рис. 11.4. До задачі 11.2.3

11.2.4. Колона, кінці якої можна вважати такими, що опираються на кульові опори, утворена з двох сталевих швелерів (рис. 11.5). Довжина колони $\ell = 4$ м. Вона несе навантаження $F = 800$ кН. Підібрати номери швелерів, знайти відстань $2b$ між ними і відстань між сполучними планками, якщо $[\sigma] = 120$ МПа.

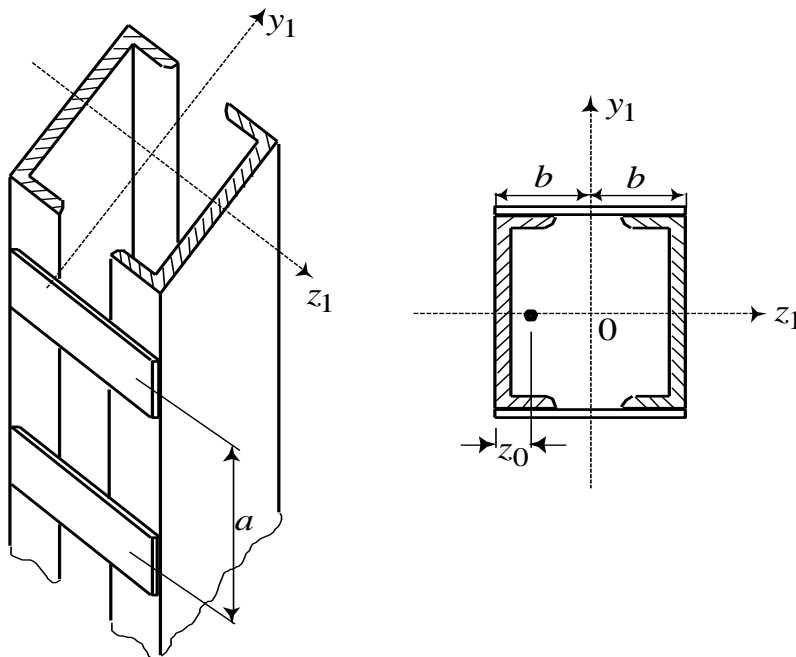


Рис. 11.5. До задачі 11.2.4

Розділ 12

ДИНАМІЧНА ДІЯ НАВАНТАЖЕНЬ

12.1. Основні поняття і формули

Навантаження, що порівняно швидко змінює свою величину або положення, називається динамічним. При динамічній дії навантажень

виникають додаткові інерційні сили. Урахування динамічності навантажень здійснюється за допомогою динамічного коефіцієнта.

Види динамічних навантажень:

1. Урахування сил інерції при русі з прискоренням:

– при підйомі вантажу

$$k_{\text{дин}} = 1 + \frac{a}{g},$$

де a – прискорення руху;

– при рівномірному обертанні вантажу

$$w_n = \omega^2 r, \quad \omega = \frac{2\pi n}{60},$$

де w_n – доцентрове прискорення;

ω – кутова швидкість;

n – число обертів за хвилину.

2. Ударна дія навантаження:

– на невагому перепону $k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$,

де v – швидкість падіння перед ударом;

$\Delta_{\text{ст}}$ – статичне переміщення точки удару;

h – висота падіння вантажу;

– на перепону, що має значну масу

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{Q_0}{G}}},$$

де Q_0 – вага перепони;

G – вага вантажу;

k – коефіцієнт приведення, що залежить від способів закріплення

стержня і виду удару ($k = \frac{1}{3}$ при подовжньому ударі, $k = \frac{17}{35}$ при

поперечному ударі посередині прогону балки із шарнірними опираваннями на опорах).

3. Коливання систем з одним ступенем свободи:

$$k_g = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \quad \text{– динамічний коефіцієнт,}$$

де θ – частота вимушених коливань;

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{F \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} \quad \text{– кругова частота вільних}$$

коливань;

m – зосереджена маса мотора;
 c – жорсткість системи;
 δ_{11} – переміщення від сили, яка дорівнює одиниці, прикладеної в точці розташування центру ваги маси,
 $\Delta_{ст}$ – переміщення вантажу при статичному його прикладенні;
 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – період вільних коливань.

12.2. Задачі

12.2.1. Сталевий стержень постійного перерізу обертається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 12.1). Визначити припустиму за умовою міцності найбільшу довжину стержня $l_{пр}$ при частоті обертання $n = 1200$ об/хв і частоту обертання n_{max} , при якій стержень розірветься, якщо $l = l_{пр}$. Дано: $[\sigma] = 100$ МПа, $\sigma_b = 800$ МПа, $\gamma = 7,83 \frac{\text{Т}}{\text{М}^3}$.

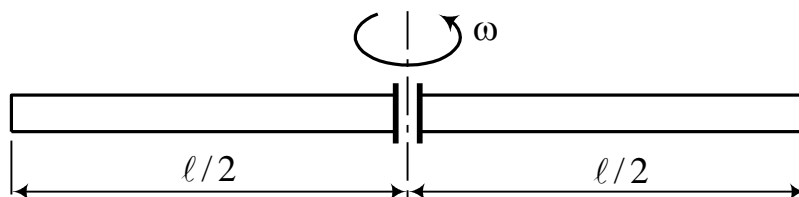


Рис. 12.1. До задачі 12.2.1

12.2.2. Три сталевих балки однакового поперечного перерізу розташовані, як показано на рис. 12.2. Кожна балка має квадратний поперечний переріз 60×60 мм² і довжину 120 см.

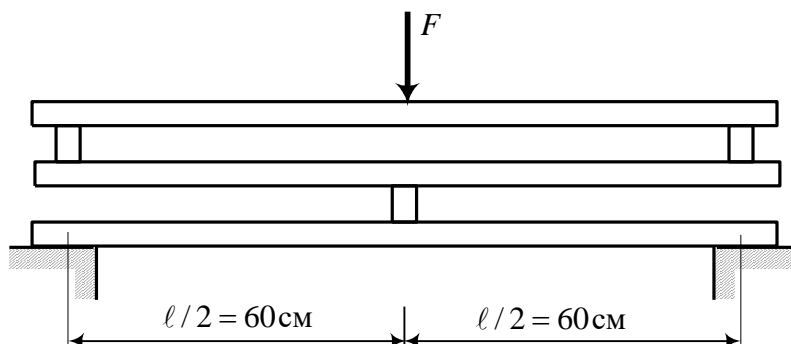


Рис. 12.2. До задачі 12.2.2

Потрібно визначити:

а) яке статичне навантаження, прикладене на середині прогону, викликає нормальне допустиме напруження $[\sigma] = 140$ МПа;

б) чи будуть балки, розташовані, як показано на рис. 12.2, разом, чинити опір більшому статичному навантаженню, ніж кожна балка окремо;

в) якою повинна бути вага тіла, що падає з висоти 20 см при $[\sigma]=140$ МПа;

г) які напруження викликав би цей вантаж, якби він падав лише на одну з балок.

12.2.3. Один кінець двотаврової балки №16, що має прогін 3 м, спирається на жорстку шарнірну опору, другий – на сталеву циліндричну гвинтову пружину, що має 10 витків при середньому діаметрі витка 10 см і діаметрі проволочки 20 мм (рис. 12.3). З якої висоти h може впасти на балку вантаж $F=2$ кН, не викликаючи в балці і пружині напружень, що перевищують допустимі напруження, якщо $[\sigma]=160$ МПа (для матеріалу балки) і $[\tau]=200$ МПа (для матеріалу пружини)?

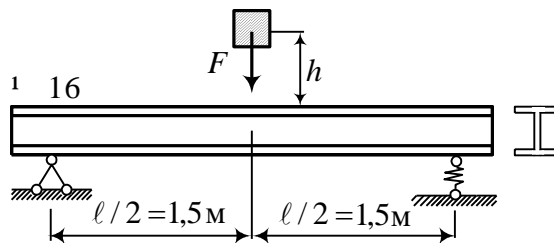


Рис. 12.3. До задачі 12.2.3

12.2.4. Електромотор установлений на двох двотаврових балках посередині прогону (рис. 12.4). Частота обертання ротора електродвигуна $n=1200$ об/хв. Підбрати перерізи балок, виходячи з умови, щоб частота власних поперечних коливань системи була на 30 % вищою від частоти збуджуючої сили, яка виникає внаслідок динамічної неврівноваженості ротора. Врахувати масу балок. Дано: $m=1000$ кг, $l=5$ м, $[\sigma]=160$ МПа, $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

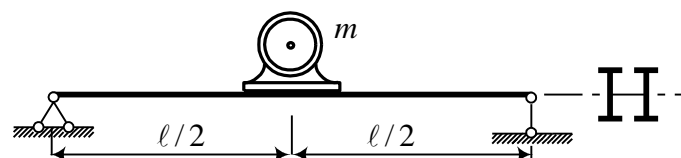


Рис. 12.4. До задачі 12.2.4

ВІДПОВІДІ

Розділ 1

1.2.1. $\Delta h = \frac{Fh}{E\sqrt{A_o A_1}}$.

1.2.2. $\Delta x = \frac{\gamma x(2h-x)}{6E}$.

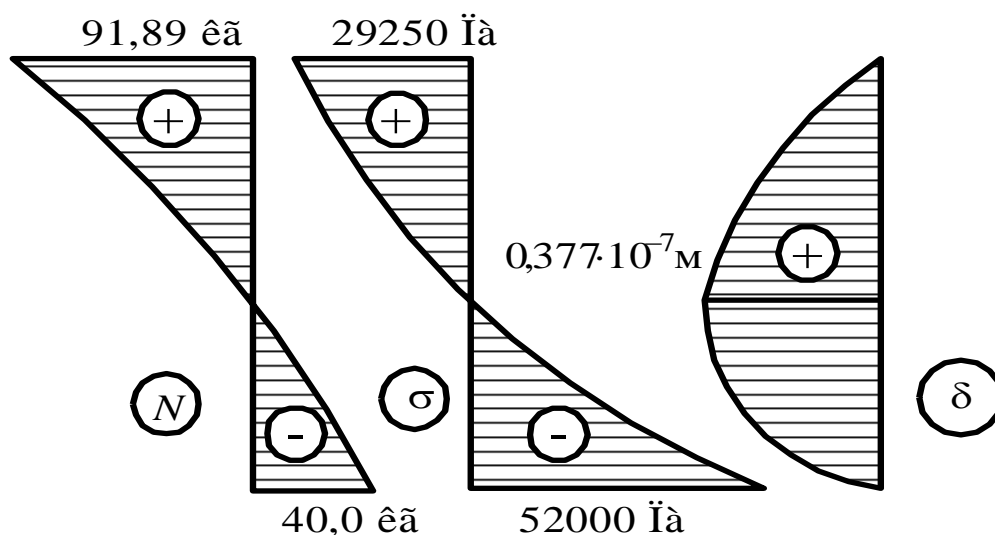
1.2.3. $r_x = r^3 \sqrt{\frac{6F(R-r)}{\pi \gamma h r^3}} - 2$ при $F > \frac{\pi \gamma r^3 h}{2(R-r)}$.

1.2.4. $v = \frac{r_1 - r_2}{F_2 - F_1} E \pi r_1$.

1.2.5. $F_1 = 6F$.

1.2.6. 1) 1206 кН; 2) 0,414 м.

1.2.7.



1.2.8. $A = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

1.2.9. $F = 30 \text{ кН}$.

Розділ 2

2.2.1. $A = f \frac{\ell}{\pi}; z_c = \frac{\ell}{\pi}$.

2.2.2. $b = 8a; J_y = \frac{322a^4}{3}; J_z = 8a^4$.

$$2.2.3. \frac{h}{b} = 0,577.$$

$$2.2.4. h = 1,75 R .$$

$$2.2.5. h = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad J_{yz} = 40,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 .$$

$$2.2.6. \text{ При } h/b = 1 \quad J_z = \max .$$

$$2.2.7. 1/18 h .$$

$$2.2.8. W_z^{\text{кр.пер.}} / W_z^{\text{пр.пер.}} = 1,254 .$$

2.2.9. Для всіх перерізів будь-яка пара взаємно-перпендикулярних центральних осей є головною; розташування нейтральних осей: а) для круга – довільне; б) квадрата – горизонтальне; в) для третього перерізу – під кутом 45° до горизонталі.

$$2.2.10. \quad \text{а) } h/b = 1,414; \quad \text{б) } h/b = 1,732 .$$

$$2.2.11. \quad \text{а) кругле;} \quad \text{б) квадратне.}$$

Розділ 3

$$3.2.1. \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma, \quad \sigma_z = \frac{1-\nu}{1+\nu} \sigma .$$

$$3.2.2. \quad \nu = 0,3 .$$

$$3.2.3. \quad \gamma_\alpha = \frac{1+\nu}{E} p \sin 2 \alpha, \quad \varepsilon_{45^\circ} = \frac{p}{E} [1 - \nu \pm (1+\nu) \sin 2 \alpha], \quad \alpha = 45^\circ .$$

$$3.2.4. \quad \varphi = 117^\circ 30', \quad \varepsilon_1 = 1,1 \cdot 10^{-3}; \quad \varphi = 27^\circ 30'; \quad \varepsilon_2 = -0,48 \cdot 10^{-3} .$$

$$3.2.5. \quad \sigma_1 = 165,77 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -255,77 \text{ МПа} .$$

$$\ell_1 = 0,981, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = 0,194 .$$

$$\ell_2 = 0, \quad m_2 = 1, \quad n_2 = 0 .$$

$$\ell_3 = -0,194, \quad m_3 = 0, \quad n_3 = 0,981 .$$

$$3.2.6. \quad \sigma_1 = 80 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -30 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -200 \text{ МПа} .$$

$$\varepsilon_1 = 68,75 \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = -106,25 \cdot 10^{-5}, \quad \theta = -37,5 \cdot 10^{-5} .$$

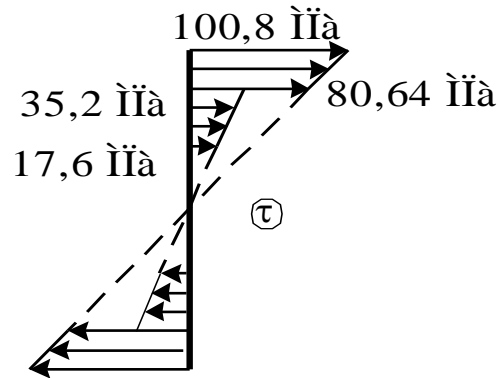
$$3.2.7. \quad \sigma_1 = 84,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -12,3 \text{ МПа}, \quad \alpha = 16^\circ 33' .$$

Розділ 4

$$4.2.1. \quad d \geq \sqrt{\frac{2\sqrt{2}F}{\pi[\tau]}} .$$

4.2.2. $b = c$.

4.2.3.



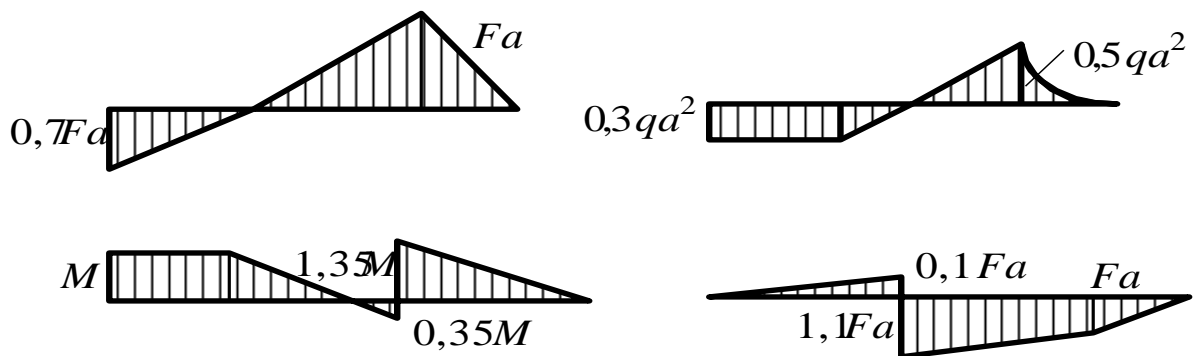
4.2.4. $b/c = 1,36$.

4.2.5. $[M_{\text{кр}}] = 1,29 \text{ кНм}$.

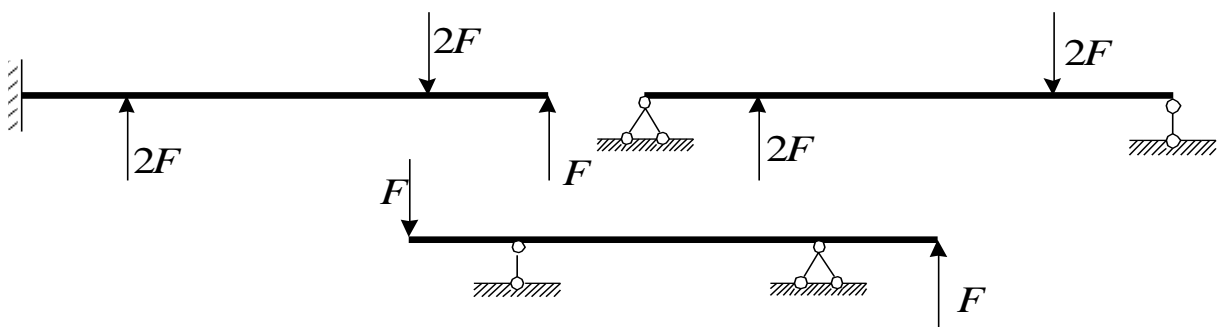
4.2.6. $\tau_{\text{max}} = 39,73 \text{ МПа}$, $\sigma = -13,35 \text{ МПа}$, $\varphi_{\text{кр}} = 0,21^\circ$.

Розділ 5

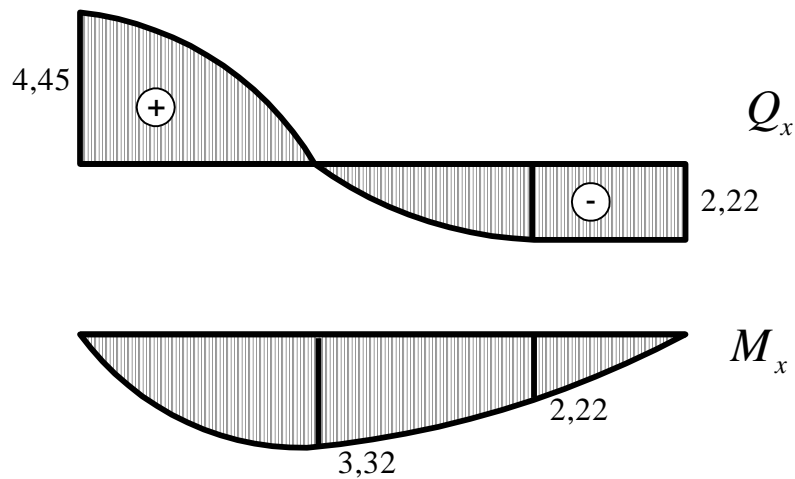
5.2.1.



5.2.2.

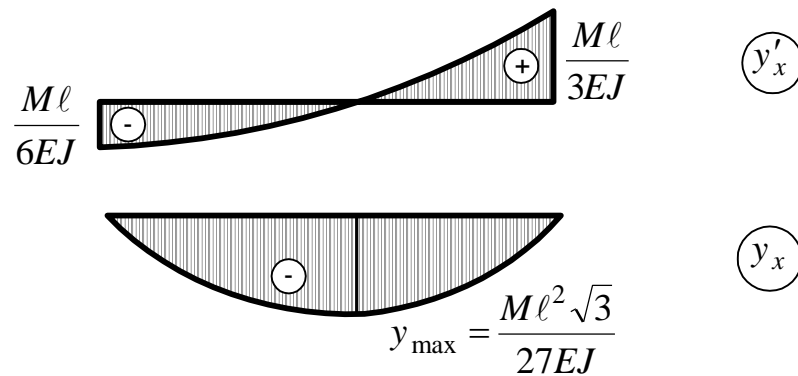


5.2.3.



5.2.4. $\kappa = 0,707$.

5.2.5.



$$5.2.6. \quad b_x = b_b + \frac{b_a - b_b}{\ell} (\ell - x).$$

$$5.2.7. \quad M = 30 \text{ кНм.}$$

$$5.2.8. \quad \sigma_{\max} = \frac{32F\ell}{6,75\pi d^3}.$$

$$5.2.9. \quad \tau_c = \frac{3\varepsilon_{45^\circ} \cdot E}{4}.$$

$$5.2.10. \quad \sigma_b = 7,6 \text{ МПа}, \quad \tau_b = 0,047 \text{ МПа}.$$

$$5.2.11. \quad S_{\Pi} = \frac{32EJ}{\gamma \ell^3}.$$

$$5.2.12. \quad f = \frac{5q\ell^3}{768EJ}.$$

$$5.2.13. \quad M_1 = M_2 = \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell}.$$

5.2.14. $\sigma_c = 45,7$ МПа, $\sigma_\sigma = 143,0$ МПа, $f = 0,92$ см.

5.2.15. Динамометр покаже значення сили $\frac{F^2 \ell^2}{2EJ}$.

5.2.16. $y_c = -0,25$ см, $\ell_0 = 7,5$ м.

Варіант рішення

$y_c = -0,25$ см, $\ell_0 = 7,42$ м.

Розділ 6

6.2.1. Тиск приведеється до зосередженої сили, прикладеної в точці В

$$X = \frac{3F}{4} \left(\frac{\ell}{\ell_1} - \frac{1}{3} \right).$$

6.2.2. а) балка АВ – двотавр № 16, балка CD – двотавр № 24;

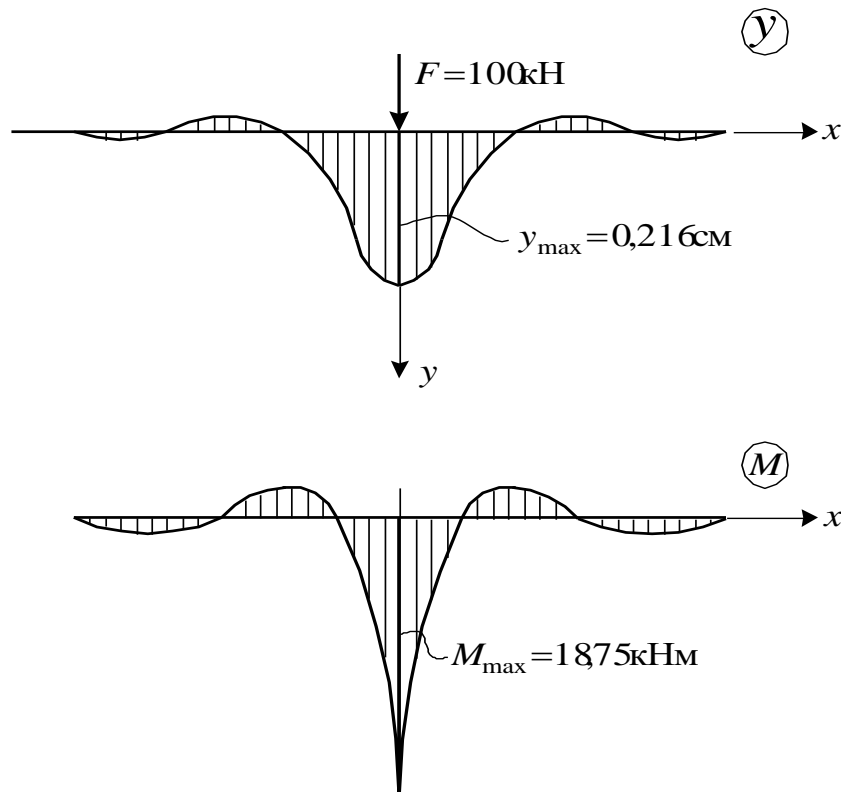
б) між балками необхідно залишити зазор $\Delta = 15,9$ мм, тоді балка АВ – двотавр № 14, балка CD – двотавр № 24. Економія порівняно з першим випадком складе 5 %.

6.2.3. $A = \frac{24J(1 + 2\cos^3 \alpha)}{\ell^2 \sin 2\alpha \cos \alpha}$.

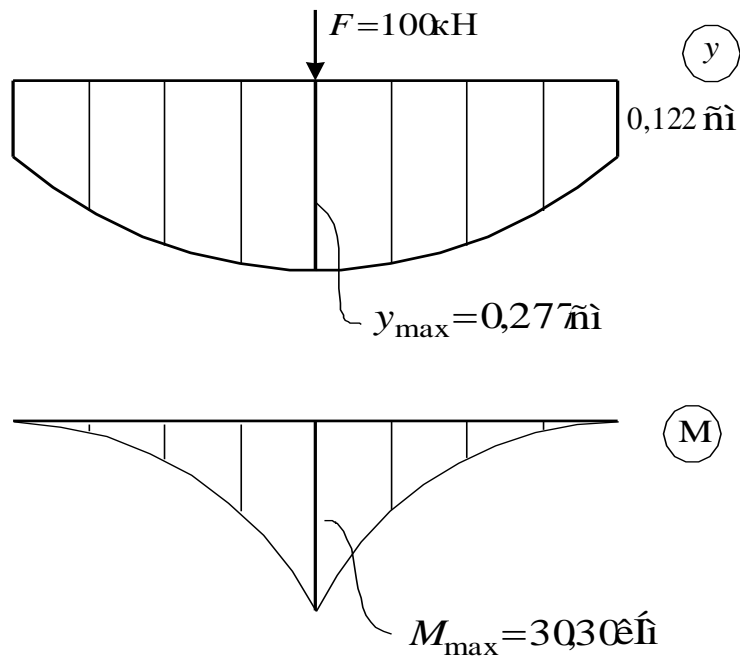
6.2.4. $\ell_1 / \ell_2 / \ell_3 = 32,3$ м / 25,4 м / 32,3 м.

Розділ 7

7.2.1.

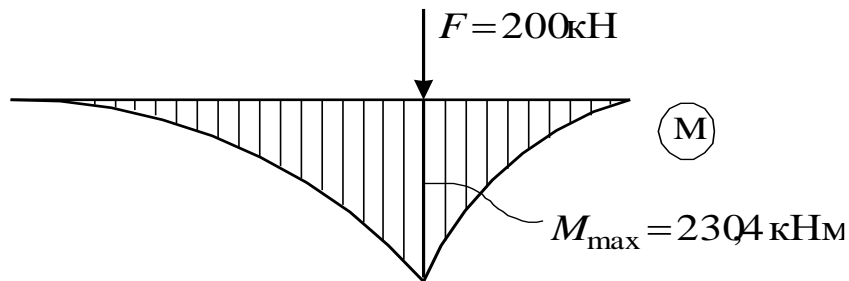


7.2.2.



7.2.3. $\sigma_{\max} = 1,62 \text{ МПа}$, $y_{\max} = 3,27 \text{ см}$.

7.2.4. $y_1 = 27 \text{ см}$, $y_2 = 107 \text{ см}$.



Розділ 8

8.2.1. $\text{tg } \beta = -h/b$. Нейтральна вісь співпадає з другою діагоналлю перерізу.

$$8.2.2. \frac{b}{h} = \text{tg } \alpha, \quad h = \sqrt[3]{\frac{12M_{\max} \cos^2 \alpha}{[\sigma] \sin \alpha}}.$$

8.2.3. $\sigma_2^{\max} = 1,29 \sigma_1^{\max}$. При підсиленні необхідно стежити за тим, щоб не змінювався вигляд напруженого стану.

8.2.4. $x = 3a$, $\sigma_{\max} = \frac{6,75 qa^2}{b^3}$.

8.2.5. $\alpha = \arctg n$, где $n = \frac{h}{b} = \frac{W_z}{W_y}$.

8.2.6. $\sigma_b = 8,80$ МПа, $\sigma_e = -9,70$ МПа.

Розділ 9

9.2.1. $\sigma_u = 127,4$ МПа, $\sigma_{p4} = 151,8$ МПа.

9.2.2. $A_{\text{кв}} = 0,94 A_{\text{кр}}$.

9.2.3. При $\frac{M_u}{M_{\text{кр}}} < 1,72$ більш міцним буде брус круглого перерізу,

при $\frac{M_u}{M_{\text{кр}}} > 1,72$ – квадратного перерізу.

9.2.4. $d = 1,91$ см ≈ 20 мм.

Розділ 10

10.2.1. $a_y = -12,23$ см, $a_z = -1,57$ см, $\sigma_{b1} = 78,6$ МПа.

10.2.2. $\sigma_1 = -152,5$ МПа, $\sigma_2 = -165,1$ МПа.

10.2.3. $\sigma_m = -0,45$ МПа, $\sigma_k = -0,29$ МПа.

Розділ 11

11.2.1. $F_{\text{кр2}} / F_{\text{кр1}} = 4$.

11.2.2. $J_{\min} = 0,036$ см⁴, $f = 60,4$ мм, $F - F_{\text{кр}} = 25$ Н.

11.2.3. $EJy''' + qxy' = -R$.

11.2.4. Швелер № 30, $2b = 28,4$ см, $a = 90$ см.

Розділ 12

12.2.1. $\ell_{\text{пр}} = 2,5$ м, $n_{\text{пр}} = 3394$ об/хв.

12.2.2. а) $F_{\text{ст}} = 16,8$ кН; б) ні; в) $F_1 = 0,353$ кН; г) $755,6$ МПа.

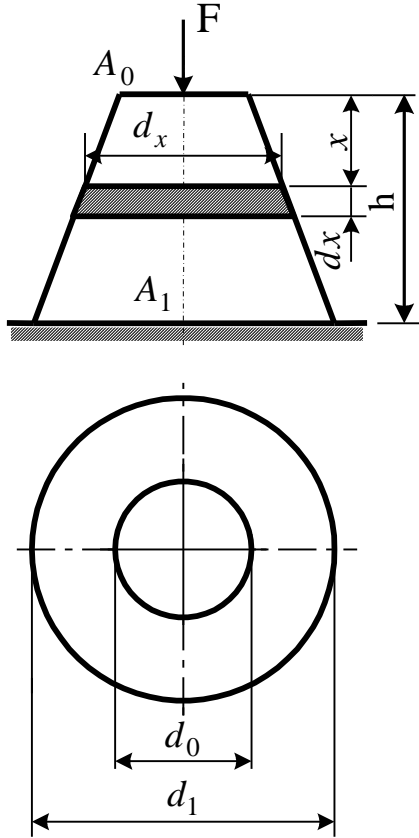
12.2.3. $h = 3,6$ см.

12.2.4. Двотавр № 45.

РОЗВ'ЯЗКИ

Розділ 1

1.2.1. Позначимо діаметр верхнього перерізу через d_0 , тоді площа



перерізу буде дорівнювати $A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$. Для нижнього перерізу з діаметром d_1 будемо мати $A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ (рис. 1.11).

Візьмемо елемент dx на відстані x від вільного кінця усіченого конуса. Площу поперечного перерізу цього елемента позначимо A_x і запишемо її значення через діаметр d_x

$$A_x = \frac{\pi d_x^2}{4}.$$

Виразимо діаметр перерізу d_x через відомі діаметри d_0 і d_1

$$d_x = d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x.$$

Укорочення елемента dx під дією сили F буде дорівнювати за законом Гука

Рис. 1.11. До задачі 1.2.1

$$\Delta dx = \frac{F dx}{EA_x} = \frac{4F dx}{E\pi \left(d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x \right)^2}.$$

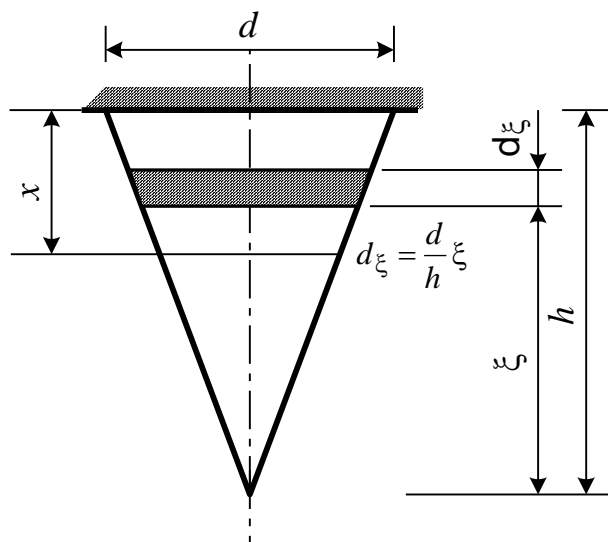
Повне укорочення опори знайдемо, інтегруючи Δdx ,

$$\begin{aligned} \Delta h &= \int_0^h \Delta dx = \frac{4F}{\pi E} \int_0^h \frac{dx}{\left(d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x \right)^2} = - \frac{4Fh}{\pi E (d_1 - d_0)} \cdot \frac{1}{d_0 + \frac{d_1 - d_0}{h} x} \Bigg|_0^h = \\ &= \frac{4Fh}{\pi E (d_1 - d_0)} \left(-\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_0} \right) = \frac{4Fh}{\pi E d_1 d_0} = \frac{Fh}{E \sqrt{A_0 A_1}}. \end{aligned}$$

Примітка. Інтеграл взятий із роботи [11, с. 341] для випадку $X = ax + b$ і $n = -2$.

$$\int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1} \quad (n \neq -1).$$

1.2.2. Вага бруса дорівнює (рис. 1.12)



$$Q = \gamma V_k = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{h}{3}.$$

Для якогось поперечного перерізу на відстані ξ від нижнього кінця бруса зусилля, що розтягує, дорівнює вазі нижньої частини бруса і буде

$$\begin{aligned} Q_\xi &= \frac{Q \xi^3}{h^3} = \gamma \frac{\pi d_\xi^2}{4} \cdot \frac{\xi}{3} = \\ &= \gamma \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\xi^3}{3h^2}. \end{aligned}$$

Рис. 1.12. До задачі 1.2.2

Вважаючи, що напруження, які розтягують, рівномірно розподілені по поперечному перерізу (таке допущення справедливе, коли кут конуса малий), розглядаючи елемент довжиною $d\xi$ як призматичний брусок,

знаходимо подовження цього елемента $\Delta d\xi = \frac{Q_\xi d\xi}{E A_\xi} = \frac{\gamma \xi d\xi}{3E}$ і

подовження бруса довжиною x , що відраховується від закріпленої основи

$$\Delta x = \frac{\gamma}{3E} \int_{h-x}^h \xi d\xi = \frac{\gamma}{3E} \cdot \frac{\xi^2}{2} \Big|_{h-x}^h = \frac{\gamma x (2h - x)}{6E}.$$

Це і є залежністю між переміщенням довільного поперечного перерізу і відстанню від закріпленої основи.

1.2.3. Доповнимо усічений конус до повного і позначимо цю довжину через ℓ (рис. 1.13).

Напруження в перерізі на відстані x від верху усіченого конуса буде

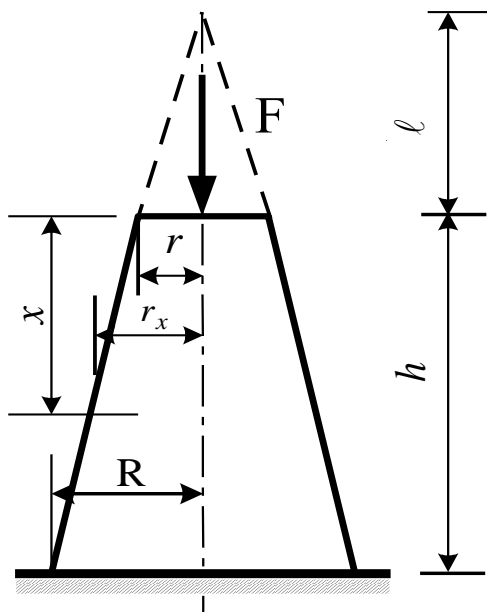


Рис. 1.13. До задачі 1.2.3

Тоді

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{F+G_x}{A_x} = \frac{F}{A_x} + \frac{G_x}{A_x} = \\ &= \frac{F}{\pi r_x^2} + \frac{\gamma \pi}{3} \cdot \frac{r_x^2(\ell+x) - r^2 \ell}{\pi r_x^2} = \\ &= \frac{F}{\pi r_x^2} + \frac{\gamma}{3}(\ell+x) - \frac{\gamma}{3} \cdot \frac{r^2 \ell}{r_x^2}.\end{aligned}$$

Виразимо радіус r_x через r

$$\frac{\ell+x}{\ell} = \frac{r_x}{r} \quad \text{або} \quad r_x = \frac{\ell+x}{\ell} r. \quad (1.1)$$

$$\sigma_x = \frac{F}{\pi r^2} \frac{\ell^2}{(\ell+x)^2} + \frac{\gamma}{3}(\ell+x) - \frac{\gamma}{3} \frac{\ell^3}{(\ell+x)^2}.$$

Знайдемо переріз із екстремальним значенням напруження, для чого першу похідну від σ_x по x прирівняємо до нуля

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{F\ell^2}{\pi r^2} \frac{2(\ell+x)}{(\ell+x)^4} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma\ell^3}{3} \frac{2(\ell+x)}{(\ell+x)^4} = 0.$$

Оскільки $\ell+x \neq 0$, скоротимо усе на $\frac{\gamma}{3(\ell+x)^3}$ і одержимо

$$-\frac{6F\ell^2}{\gamma\pi r^2} + (\ell+x)^3 + 2\ell^3 = 0.$$

Звідки

$$\ell + x = \sqrt[3]{\frac{6F\ell^2}{\pi\gamma r^2} - 2\ell^3}. \quad (1.2)$$

Винесемо з-під радикала ℓ , замінимо ℓ із співвідношення $\ell = \frac{hr}{R-r}$

і знайдемо x :

$$x = \frac{hr}{R-r} \left(\sqrt[3]{\frac{6F(R-r)}{\pi\gamma h r^3} - 2} - 1 \right). \quad (1.3)$$

Дійсним буде значення $x > 0$, звідки

$$F > \frac{\pi\gamma r^3 h}{2(R-r)}. \quad (1.4)$$

Із (1.2), урахувавши (1.1) і здійснюючи перетворення, знайдемо вирази для визначення радіуса r_x в перерізі x :

$$r_x = r \sqrt[3]{\frac{6F(R-r)}{\pi\gamma h r^3} - 2}.$$

Дослідимо, чи буде вираз x , отриманий з (1.3), відповідати перерізу з $\min \sigma_x$, для чого візьмемо другу похідну від σ_x за x , використовуючи знайдене значення першої похідної

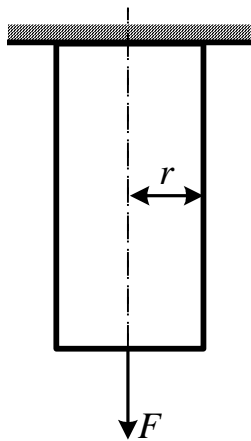
$$\frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} = \left(-\frac{\gamma \ell^3}{3} + \frac{F \ell^2}{\pi r^2} \right) \frac{6}{(\ell + x)^4}.$$

При $\min \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} > 0$. Оскільки $(\ell + x)^4$ при будь-якому x – величина додатна, отже, повинно бути $\left(\frac{F \ell^2}{\pi r^2} - \frac{\gamma \ell^3}{3} \right) > 0$.

Здійснюючи перетворення, подібні тим, що раніше розглядались, одержуємо умову \min при $F > \frac{\gamma \pi r^3}{3} \cdot \frac{h}{R-r}$.

Оскільки умова існування розв'язку (1.4) дає значення F більше, ніж умова \min , отже, маємо в перерізі x мінімальне значення напруження.

1.2.4. Коефіцієнт Пуассона $\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ (рис. 1.14), де ε' – відносна



зміна (зменшення) поперечного перерізу

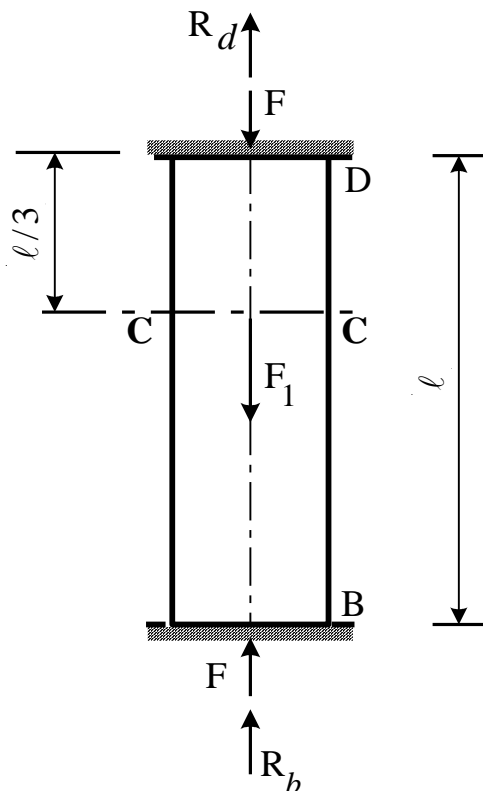
$$\varepsilon' = \frac{r_2 - r_1}{r_1}; \quad \varepsilon - \text{відносне подовження стержня}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{F_2 - F_1}{E \pi r_1^2}.$$

$$\text{Отже, } \nu = \frac{r_1 - r_2}{F_2 - F_1} E \pi r_1.$$

Рис. 1.14. До задачі 1.2.4

1.2.5. Від попереднього стискання стержня силою F реакції в опорах D і B будуть дорівнювати F і протилежно спрямовані (рис. 1.15). При прикладанні в перерізі $C-C$ сили F_1 до реакцій, які були раніше, приєднуються реакції R_d і R_b , викликані цією силою. Для знаходження цих реакцій складемо рівняння рівноваги: $\sum X = 0; \quad R_d + R_b - F_1 = 0$.



А оскільки задача щодо визначення реакцій статично невизначна (дві реакції; одне рівняння рівноваги), складемо додаткове рівняння сумісності деформацій, виходячи з рівності деформації частин стержня вище і нижче перерізу С-С, тобто $\Delta l_{\text{в}} = \Delta l_{\text{н}}$.

Верхні деформації будуть викликатися внутрішніми силами, які дорівнюють R_a , а нижні – R_b . Відповідно до закону Гука маємо

$$\frac{R_d \frac{\ell}{3}}{EA} = \frac{R_b \frac{2}{3} \ell}{EA},$$

звідки $R_d = 2R_b$.

Рис. 1.15. До задачі 1.2.5

Тепер із рівняння рівноваги запишемо реакції через силу F_1 :

$$R_d = \frac{2}{3} F_1, \quad R_b = \frac{1}{3} F_1.$$

Приєднаємо ці значення реакцій до тих, що були раніше від попереднього стискання силою F .

$$\text{Верхня реакція } R_{\text{верхн}} = R_d - F = \frac{2}{3} F_1 - F;$$

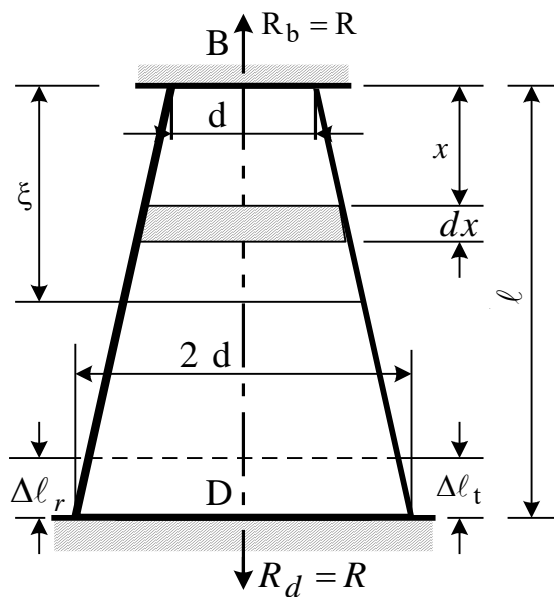
$$\text{нижня реакція } R_{\text{нижн}} = R_b + F = \frac{1}{3} F_1 + F.$$

Напруження у верхній частині будуть виникати від поздовжньої сили, яка дорівнює $R_{\text{верхн}}$, а в нижній – $R_{\text{нижн}}$. Через те що площа поперечного перерізу постійна, отже, рівності напружень буде відповідати рівність реакції, тобто

$$R_{\text{верхн}} = R_{\text{нижн}},$$

$$\text{або } \frac{2}{3} F_1 - F = \frac{1}{3} F_1 + F, \text{ звідки } F_1 = 6F.$$

1.2.6. При зниженні температури стержень прагне скоротити довжину, чому перешкоджають опори (рис. 1.16). У результаті цього в опорах виникають реакції. Для їхнього визначення складаємо рівняння рівноваги:



$$\sum X = 0, \quad R_b - R_c = 0, \quad R_b = R_c = R.$$

Звідси ми дізналися, що реакції в опорах дорівнюють одна одній, а величини їх обчислити не можемо. Отже, задача статично невизначна. Для розкриття статичної невизначності складаємо додаткове рівняння сумісності деформацій. Припустимо, що опори D немає, тоді під дією температури стержень стане коротшим на величину $\Delta l_t = \alpha_t \ell t$. Але оскільки опора насправді існує, до стержня треба прикласти таку величину сили, яка дорівнює реакції, щоб довжина стержня залишилася незмінною, тобто

сила повинна по-

Рис.1.16. До задачі 1.2.6

подовжити стержень на величину

$$\Delta l_r = \Delta l_t. \quad (1.5)$$

Це і є рівнянням сумісності деформацій. Тепер виразимо переміщення Δl_r в явній формі через реакцію R. Двома перерізами на відстанях від опори B x і $x+dx$ виріжемо елемент довжиною dx і запишемо його подовження, викликане дією поздовжньої сили, яка дорівнює реакції R:

$$\Delta dx = \frac{R dx}{EA_x} = \frac{4R dx}{\pi E d_x^2} = \frac{R \ell^2 dx}{EA_b (\ell + x)^2}, \quad (1.6)$$

де з пропорції $\frac{2d - d}{\ell} = \frac{d_x - d}{x}$ $d_x = \frac{d}{\ell} (\ell + x)$.

Знайдемо подовження стержня від реакції на довжині ξ , що може бути використане для розв'язання як першого, так і другого пунктів задачі. Для цього зробимо інтегрування (1.6) у межах від 0 до ξ :

$$\Delta l_{\xi r} = \int_0^{\xi} \frac{R \ell^2 dx}{EA_b (\ell + x)^2} = \frac{R \ell^2}{EA_b} \cdot \int_0^{\xi} \frac{dx}{(\ell + x)^2} = \frac{R \ell^2}{EA_b} \left| -\frac{1}{\ell + x} \right|_0^{\xi} = \frac{R \ell}{EA_b} \cdot \frac{\xi}{\ell + \xi}. \quad (1.7)$$

Для розв'язання першого пункту задачі прирівняємо $\xi = \ell$ і розкриємо рівняння сумісності деформацій (1.5):

$$\frac{R \ell}{2EA_b} = \alpha_t \ell t.$$

Звідси знайдемо поздовжню силу, що діє в перерізах бруса, яка дорівнює реакції R:

$$N = R = 2\alpha_t EA_b t = 2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 8^2 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 1206 \text{ кН.}$$

Для розв'язання другого пункту задачі розглянемо переміщення перерізу ξ під спільною дією поздовжньої сили і температури:

$$\Delta l_\xi = \Delta l_{\xi r} - \Delta l_{\xi t} = \frac{R l}{EA_b} \cdot \frac{\xi}{l + \xi} - \alpha_t \xi t = \frac{2\alpha_t EA_b t l}{EA_b} \cdot \frac{\xi}{l + \xi} - \alpha_t \xi t = \alpha_t \cdot t \left(\frac{2l\xi}{l + \xi} - \xi \right).$$

Щоб знайти відстань від опори В до перерізу, переміщення якого буде максимальним, першу похідну (1.7) прирівняємо до нуля:

$$\frac{d\Delta l_\xi}{d\xi} = \alpha_t \cdot t \left[\frac{2l(l + \xi) - 2l\xi}{(l + \xi)^2} - 1 \right] = 0.$$

Звідки $2l^2 - (l + \xi)^2 = 0$, або $l\sqrt{2} = l + \xi$.

Тоді $\xi = (\sqrt{2} - 1)l = 0,414l = 0,414 \text{ м.}$

1.2.7. Зробимо два перерізи на відстані ξ і $d\xi$ від нижньої опори В

і зобразимо діаметр перерізу конуса d_ξ на рівні ξ (рис. 1.17). З подоби

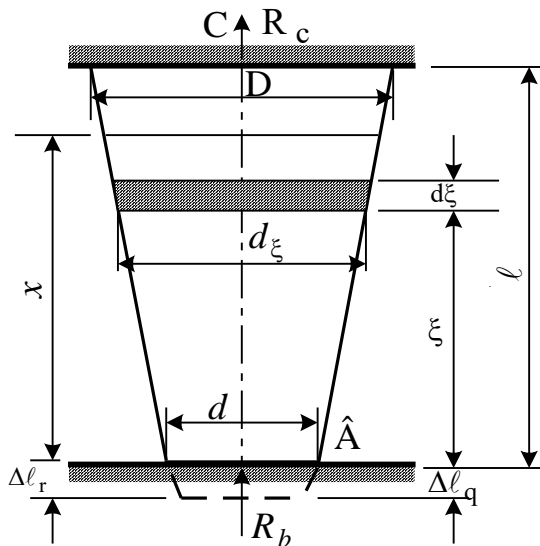


Рис. 1.17. До задачі 1.2.7

трикутників $\frac{D - d}{2l} = \frac{d_\xi - d}{2\xi}$, звідки

$$d_\xi = d + \frac{D - d}{l} \xi \quad (1.8).$$

Знайдемо реакції опор R_b і R_c . Їх дві, а рівняння рівноваги тільки одне — $\sum X = 0$. Отже, задача статично невизначна. Необхідно скласти ще одне додаткове рівняння (сумісності деформацій). Отже,

$$1) \quad \sum X = 0; \quad R_c + R_b - G = 0,$$

де G — вага усіченого конуса (вага стержня);

$$2) \Delta l_q = \Delta l_r.$$

Сутність другого рівняння полягає в наступному. Якщо відкинути нижню опору В, стержень під дією власної ваги подовжиться на Δl_q . Для відновлення початкового положення опори В до стержня треба прикласти таку силу R_b , щоб стержень під її дією укоротився на Δl_r . Причому повинна дотримуватися умова 2.

Розкриємо умову 2. Для цього знайдемо деформацію елемента $d\xi$ під дією поздовжньої сили N_ξ , яка дорівнює власній вазі нижньої частини стержня G_ξ , від якого необхідно відняти реакцію R_b нижньої опори:

$$N_\xi = G_\xi - R_b. \quad (1.9)$$

Тоді за законом Гука $\Delta d\xi = \frac{N_\xi d\xi}{EA_\xi}$, а повне подовження стержня при зміні ξ від 0 до l повинне дорівнювати нулю.

$$\Delta \xi_0^l = \int_0^l \frac{N_\xi d\xi}{EA_\xi} = \int_0^l \frac{G_\xi d\xi}{EA_\xi} - \int_0^l \frac{R_b d\xi}{EA_\xi} = \Delta l_q - \Delta l_r = 0.$$

З цієї умови знаходимо R_b :

$$R_b = \frac{\int_0^l \frac{G_\xi d\xi}{A_\xi}}{\int_0^l \frac{d\xi}{A_\xi}}. \quad (1.10)$$

Для обчислення інтегралів записуємо функції

$$G_\xi = \gamma V_\xi = \gamma \frac{\pi \xi}{12} \left(d^2 + d d_\xi + d_\xi^2 \right), \quad (1.11)$$

де V_ξ – об'єм усіченого конуса;

$$A_\xi = \frac{\pi d_\xi^2}{4}. \quad (1.12)$$

Знайдемо інтеграли, позначивши для простоти в (1.8)

$$d_\xi = d + \frac{D-d}{l} \xi = a + b \xi, \quad (1.13)$$

де $a = d$, $b = \frac{D-d}{l}$.

$$\begin{aligned}
\text{Тоді } \int_0^\ell \frac{G_\xi d\xi}{A_\xi} &= \int_0^\ell \frac{\gamma \pi \xi^4 [a^2 + a(a+b\xi) + (a+b\xi)^2] d\xi}{12 \pi (a+b\xi)^2} = \\
&= \frac{\gamma}{3} \int_0^\ell \left[\frac{a^2 \xi}{(a+b\xi)^2} + \frac{a\xi}{a+b\xi} + \xi \right] d\xi = \\
&= \frac{\gamma}{3} \left[\frac{a^3}{b^2 (a+b\xi)} + \frac{a^2}{b^2} \ln(a+b\xi) + \frac{a\xi}{b} - \frac{a^2}{b^2} \ln(a+b\xi) + \frac{\xi^2}{2} \right]_0^\ell = \\
&= \frac{\gamma}{3} \left[\frac{a^3}{b^2 (a+b\xi)} + \frac{a\xi}{b} + \frac{\xi^2}{2} \right]_0^\ell. \tag{1.14}
\end{aligned}$$

$$\int_0^\ell \frac{d\xi}{A_\xi} = \frac{4}{\pi} \int_0^\ell \frac{d\xi}{d\xi^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^\ell \frac{d\xi}{(a+b\xi)^2} = -\frac{\pi}{4} \frac{1}{b(a+b\xi)} \Big|_0^\ell. \tag{1.15}$$

Перед тим, як підставляти границі, повернемося до старих позначень. Тоді інтеграл (1.14) запишемо так:

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{3} \left[\frac{d^3}{(D-d)^2 \left(d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} + \frac{d}{D-d} \xi + \frac{\xi^2}{2} \right]_0^\ell = \\
&= \frac{\gamma}{3} \left[\frac{d^3 \ell^2}{D(D-d)^2} + \frac{d \ell^2}{(D-d)} + \frac{\ell^2}{2} - \frac{d^2 \ell^2}{(D-d)^2} \right] = \\
&= \frac{\gamma \ell^2}{3} \left[-\frac{d^2}{D(D-d)} + \frac{d}{D-d} + \frac{1}{2} \right] = \frac{\gamma \ell^2}{3} \cdot \frac{-2d^2 + 2Dd + D^2 - Dd}{2D(D-d)} = \\
&= \frac{\gamma \ell^2}{6} \cdot \frac{D^2 + Dd - 2d^2}{D(D-d)} = \frac{\gamma \ell^2}{6} \cdot \frac{D+2d}{D},
\end{aligned}$$

а інтеграл з (1.15) буде

$$\begin{aligned}
&-\frac{4}{\pi} \frac{1}{\frac{D-d}{\ell} \left(d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} \Big|_0^\ell = -\frac{4\ell}{\pi} \left[\frac{1}{D(D-d)} - \frac{1}{d(D-d)} \right] = \\
&= -\frac{4\ell}{\pi} \frac{d-D}{Dd(D-d)} = \frac{4\ell}{\pi dD}.
\end{aligned}$$

Підставляючи ці значення в (1.10), знайдемо

$$R_b = \frac{\gamma \ell^2 (D + 2d) \pi D d}{6 D \cdot 4 \ell} = \frac{\pi \gamma \ell d}{24} (D + 2d). \quad (1.16)$$

Тепер одержимо функції для побудови епюр N_x , σ_x , δ_x у будь-якому перерізі на відстані x від нижньої опори. Відповідно до (1.9) $N_x = G_x - R_b$. Підставляючи сюди G_x за (1.11) і з огляду на (1.8) будемо мати

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\pi \gamma x}{12} \left[d^2 + d \left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right) + \left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right)^2 \right] - \frac{\pi \gamma \ell d}{24} (D + 2d) = \\ &= \frac{\pi \gamma}{24} \left[2x d^2 + 2d^2 x + 2 \frac{D-d}{\ell} d x^2 + 2d^2 x + 4d \frac{D-d}{\ell} x^2 + \frac{(D-d)^2}{\ell^2} x^3 - \right. \\ &\quad \left. - \ell d (D + 2d) \right] = \frac{\pi \gamma}{24 \ell^2} \left[6 d \ell D x^2 + (D-d)^2 x^3 - d \ell^3 (D + 2d) \right] = \\ &= \frac{\pi \gamma}{24} \left[\frac{(D-d)^2}{\ell^2} x^3 + 6d \frac{D-d}{\ell} x^2 + 6d^2 x - \ell d (D + 2d) \right]. \quad (1.17) \end{aligned}$$

Нормальне напруження в перерізі на відстані x від нижньої опори складе

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{A_x} = \frac{\frac{\pi \gamma}{24} \left[\frac{(D-d)^2}{\ell^2} x^3 + 6d \frac{D-d}{\ell} x^2 + 6d^2 x - \ell d (D + 2d) \right]}{\frac{\pi}{4} \left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right)^2} = \\ &= \frac{\gamma}{6} \frac{\frac{(D-d)^2}{\ell^2} x^3 + 6d \frac{D-d}{\ell} x^2 + 6d^2 x - \ell d (D + 2d)}{\left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right)^2}. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Переміщення перерізу δ_x , що знаходиться на відстані x від нижньої опори, знайдемо, використовуючи формули для подовження $\Delta \xi$, але в межах зміни ξ від x до ℓ :

$$\delta_x = \Delta \xi_x = \int_x^\ell \frac{N_\xi d \xi}{EA_\xi} = \int_x^\ell \frac{G_\xi d \xi}{EA_\xi} - \frac{R_b}{E} \int_x^\ell \frac{d \xi}{A_\xi}.$$

Інтеграли цієї формули вже узяті (дивися (1.14) і (1.15)), тільки потрібно змінити межі інтегрування.

$$\delta_x = \Delta \xi_x^\ell = \frac{\gamma}{3E} \left[\frac{d^3}{(D-d)^2 \left(d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} + \frac{d}{D-d} \xi + \frac{\xi^2}{2} \right]_x^\ell +$$

$$+ \frac{4Rb}{\pi E} \frac{1}{\frac{D-d}{\ell} \left(d + \frac{D-d}{\ell} \xi \right)} \Big|_x^\ell = \frac{\gamma}{3E} \left[\frac{d^3 \ell^2}{D(D-d)^2} + \frac{d \ell^2}{D-d} + \right.$$

$$\left. + \frac{\ell^2}{2} - \frac{d^3 \ell^2}{(D-d)^2 \left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} - \frac{d \ell x}{D-d} - \frac{x^2}{2} \right] +$$

$$+ \frac{4Rb}{\pi E} \left[\frac{\ell}{D(D-d)} - \frac{\ell}{(D-d) \left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} \right].$$

З огляду на (1.16), будемо мати

$$\delta_x = \frac{\gamma}{3E} \left\{ \left[\frac{\ell^2 d^3}{D(D-d)^2} - \frac{\ell^2 d^3}{(D-d)^2 \left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{d \ell (\ell - x)}{D-d} + \frac{\ell^2 - x^2}{2} + \frac{\ell^2 d (D+2d)}{2D(D-d)} - \frac{\ell^2 d (D+2d)}{2(D-d) \left(d + \frac{D-d}{\ell} x \right)} \right] \right\}.$$

Маючи функції, обчислимо ординати (табл. 1.1) і побудуємо епюри (рис. 1.18).

Таблиця 1.1

Ординати епюр N_x , σ_x , δ_x

x	N_x , кг	σ_x , МПа	$10^7 \cdot \delta_x$, м
1	2	3	4
1,0	91,89	29250	0
0,9	71,36	25168	0,116
0,8	52,60	20672	0,213
0,7	35,56	15667	0,290
0,6	20,17	10034	0,345
0,5	6,38	3611	0,375

1	2	3	4
0,4	-5,88	-3820	0,377
0,3	-16,67	-12562	0,347
0,2	-26,06	-23039	0,280
0,1	-34,09	-35874	0,168
0,0	-40,0	-52000	0

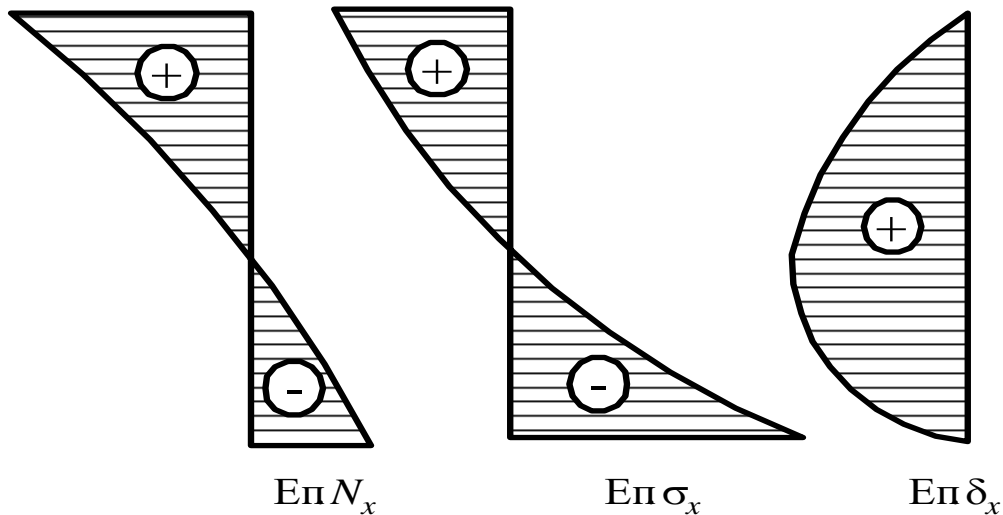


Рис. 1.18. До задачі 1.2.7

1.2.8. Знайдемо реакцію В балки КВ (рис. 1.19):

$$\sum M_K = 0, \quad R_b \ell - \int_0^{\ell} q(x) x dx = 0, \quad \text{звідки}$$

$$R_b = \frac{\int_0^{\ell} q_0 x \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3} \right) dx}{\ell} = \frac{q_0}{\ell} \left(\frac{x^3}{3\ell} - \frac{x^5}{5\ell^3} \right) \Bigg|_0^{\ell} =$$

$$= \frac{2q_0 \ell}{15} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 4}{15} = 53,33 \text{ кН.}$$

Навантаженням, яке дорівнює R_b , але спрямоване униз, завантажуюємо стержень DC. На кінцях його виникають реакції R_c і R_d , для визначення яких є одне рівняння статички $\sum Y=0$. Задача щодо їх визначення статично невизначна:

$$1) \sum Y=0, \quad R_c + R_d + (-R_b) = 0.$$

Складаємо рівняння сумісності деформацій – на скільки збільшиться довжина стержня BD, на стільки ж зменшиться довжина стержня BC;

2) $\Delta \ell_{bd} = \Delta \ell_{bc}$, за законом Гука

$$\frac{R_d b}{E_c A} = \frac{R_c a}{E_{ал} 2A}, \text{ звідси}$$

$$R_d = R_c \frac{E_c a}{2E_{ал} b} =$$

$$= R_c \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,4}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^5 \cdot 0,6} = 0,95 R_c.$$

Підставивши R_d у перше рівняння, одержимо

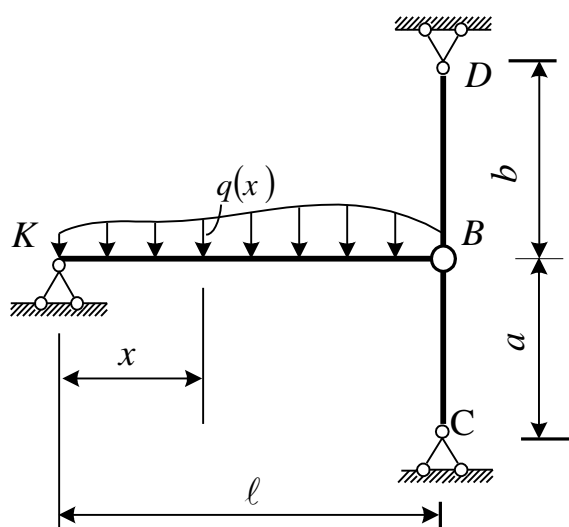


Рис. 1.19. До задачі 1.2.8

$$R_c + 0,95 R_c - R_b = 0, \quad R_c = \frac{53,33}{1,95} = 27,34 \text{ кН.}$$

Тоді $R_d = 53,33 - 27,34 \approx 26,0$ кН.

Знайдемо площу A з умов міцності першого і другого стержнів:

$$A \geq \frac{R_d}{[\sigma]_{ст}} = \frac{26 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

$$2A \geq \frac{R_c}{[\sigma]_{ал}} = \frac{27,34 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 3,41 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \text{ або } A \geq 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

З двох значень A приймаємо більше, тобто $A = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

1.2.9. Задача статично невизначна – у вузлі А сходяться три стержні. Складемо рівняння рівноваги і сумісності деформацій:

$$1. \sum X = 0, \quad -N_1 \sin 30^\circ + N_3 \sin 60^\circ = 0.$$

$$2. \sum Y = 0, \quad -N_1 \cos 30^\circ + N_2 + N_3 \cos 60^\circ - F = 0.$$

Під дією сили F точка К переміститься вниз – вліво, оскільки стержень МК не деформується. Переміщення буде відбуватися по колу з радіусом МК або, приблизно, при малих деформаціях по перпендикуляру до МК, тобто по напрямку стержня 3. $KK_1 = \Delta_3$ – це подовження стержня 3 (рис. 1.20). Проекція цього подовження на вертикаль і буде подовженням

стержня 2. Виходячи із викладеного рівняння сумісності деформацій буде

$$3. \Delta_2 = \Delta_3 \cos 60^\circ.$$

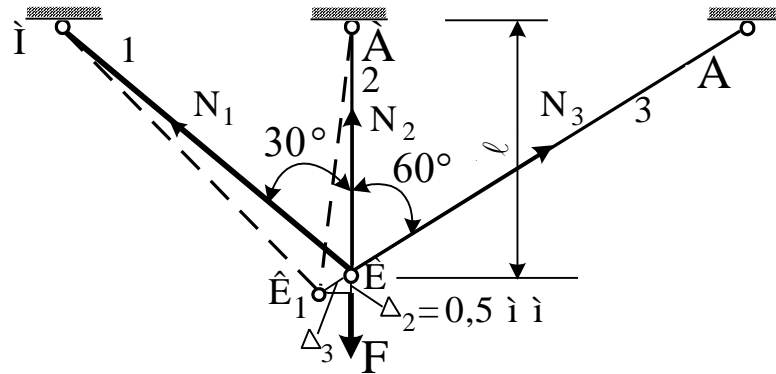


Рис. 1.20. До задачі 1.2.9

Виключимо з перших двох рівнянь N_1 , помножуючи перше на $\cos 30^\circ$, а друге – на $\sin 30^\circ$ і складаючи,

$$N_2 \sin 30^\circ + N_3 (\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ) - F \sin 30^\circ = 0, \quad (1.19)$$

де $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin(60^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ = 1$.

З (1.19) маємо

$$F = N_2 + \frac{N_3}{\sin 30^\circ} = N_2 + 2N_3, \quad \text{оскільки } \sin 30^\circ = 0,5.$$

За законом Гука $\Delta_2 = \frac{N_2 \ell}{EA}$, звідки

$$N_2 = \frac{\Delta_2 EA}{\ell} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}}{1} \cdot 10^{-3} = 10 \text{ кН.}$$

$\Delta_3 = \frac{N_3 \ell}{EA \cos 60^\circ}$, звідки $N_3 = \frac{\Delta_3 EA}{2\ell}$, але з третього рівняння

$$\Delta_3 = \frac{N_2}{\cos 60^\circ} = 2\Delta_2.$$

$$\text{Тоді } N_3 = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1} \cdot 10^{-3} = 10 \text{ кН.}$$

Отже, $F = 10 + 2 \cdot 10 = 30 \text{ кН.}$

Розділ 2

2.2.1. Виділимо двома перерізами синусоїди на відстані z і $z + dz$ елементарну площу $dA = y dz$ (рис. 2.14).

Площа чверті синусоїди буде

$$A = \int_0^{\ell/2} y dz = f \int_0^{\ell/2} \sin \frac{\pi z}{\ell} dz = -\frac{f\ell}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} \Big|_0^{\ell/2} = \frac{f\ell}{\pi}.$$

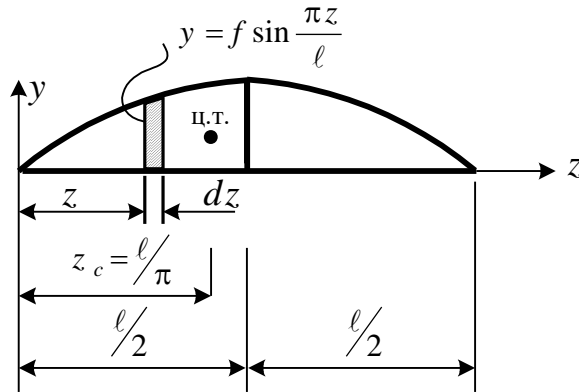


Рис. 2.14. До задачі 2.2.1

Для визначення положення центра ваги цієї площі обчислимо статичний момент площі щодо осі y . За визначенням,

$$S_y = \int_0^{\ell/2} z dA = f \int_0^{\ell/2} z \sin \frac{\pi z}{\ell} dz = f \left(\frac{\ell^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{\ell} - \frac{\ell z}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} \right) \Big|_0^{\ell/2} = f \frac{\ell^2}{\pi^2}.$$

Тоді
$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{f \frac{\ell^2}{\pi^2}}{f \frac{\ell}{\pi}} = \frac{\ell}{\pi}.$$

Примітка. Інтеграл $\int_0^{\ell/2} z \sin \frac{\pi z}{\ell} dz$ взятий з таблиці інтегралів від

тригонометричних функцій математичного довідника. Якщо ж довідника під рукою немає, можна знайти інтеграл, знаючи таблицю основних інтегралів і застосовуючи інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

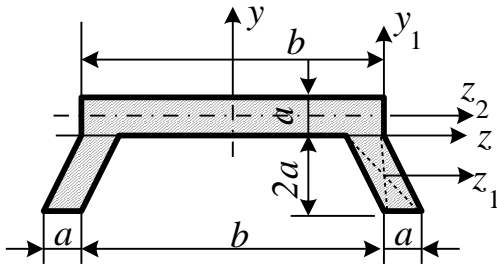
Позначимо $z = u$, $\sin \frac{\pi z}{\ell} dz = dv$, тоді $dz = du$ і $v = -\frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell}$;

виконуючи підстановки та інтегрування частинами, одержимо

$$S_y = f \left| -z \cdot \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} + \frac{\ell}{\pi} \int \cos \frac{\pi z}{\ell} dz \right|_0^{\ell/2} =$$

$$= f \left| \frac{\ell z}{\pi} \cos \frac{\pi z}{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{\ell} \right|_0^{\ell/2} = f \frac{\ell^2}{\pi^2}.$$

2.2.2. Щоб нейтральна вісь співпала з віссю z , вісь z повинна проходити через центр ваги перерізу, тобто статичний момент усього перерізу відносно осі z повинен дорівнювати нулю. З цієї умови і знайдемо величину перерізу “ b ” (рис. 2.15):



$$S_z = 0; \quad b \cdot a \cdot \frac{a}{2} - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot a = 0.$$

$$\text{Звідки } b = 8a.$$

Осьові моменти інерції перерізу

Рис. 2.15. До задачі 2.2.2

відносно осей y і z

знайдемо, використовуючи залежності між моментами інерції при паралельному переносі осей:

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = 4 \frac{2a \cdot a^3}{12} + 2 \cdot 2a \cdot a \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \frac{ab^3}{12} =$$

$$= \frac{2a^4}{3} + 64a^4 + \frac{128a^4}{3} = \frac{322}{3}a^4.$$

Тут J_{y_1} прийнятий як два моменти інерції трикутників, які утворюють паралелепіпед, відносно їхніх основ.

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} = 2 \frac{a(2a)^3}{12} + 2a \cdot 2a \cdot a^2 + \frac{ba^3}{12} + ba \left(\frac{a}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{4a^4}{3} + 4a^4 + \frac{2a^4}{3} + 2a^4 = 8a^4.$$

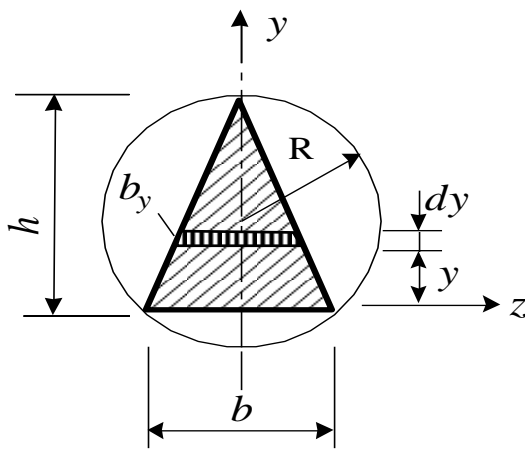
Момент інерції J_{z_1} не залежить від переміщення частин перерізу паралельно осі, щодо якої обчислюється момент інерції, тобто приймається рівним для прямокутника зі сторонами a і $2a$.

2.2.3. Осьові моменти інерції відносно довільних осей перерізу y_i і z_i будуть рівними, якщо вони будуть рівними відносно головних осей, якими є осі симетрії перерізу z і y . Дійсно, якщо осі z і y – головні та $J_z = J_y$, тоді $J_{z_i} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha = J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = J_z$. Те саме маємо і для J_{y_i} . Отже, $J_{z_i} = J_{y_i}$. Запишемо формули для визначення осьових моментів щодо осей z і y :

$$J_z = 4 \frac{\left(\frac{h}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}; \quad J_y = 2 \frac{b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{4} = \frac{bh^3}{16}.$$

Прирівняємо знайдені моменти інерції і знайдемо співвідношення сторін перерізу $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577$.

2.2.4. Запишемо загальний вираз для осьового моменту інерції відносно осі z (рис. 2.16):



$$J_z = \int_0^h y^2 dA,$$

де $dA = b_y dy = \frac{b(h-y)}{h} dy$, але

$$\frac{b}{2} = \sqrt{R^2 - (h-R)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Тоді

Рис. 2.16. До задачі 2.2.4

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{2\sqrt{2Rh - h^2}}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{2\sqrt{2Rh - h^2}}{h} \left(\frac{y^3 h}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \\ &= \frac{h^3 \sqrt{2Rh - h^2}}{6}. \end{aligned}$$

Умова екстремуму моменту інерції буде $\frac{dJ_z}{dh} = 0$.

Візьмемо похідну по h від J_z

$$3h^2 \sqrt{2Rh - h^2} + h^3 \frac{2R - 2h}{2\sqrt{2Rh - h^2}} = 0, \quad \text{тоді}$$

$$3(2R - h) + (R - h) = 0, \quad 6R - 3h + R - h = 0.$$

Звідки

$$h = \frac{7}{4} R = 1,75 R.$$

2.2.5. Базуючись на властивості інтеграла (інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів), подамо трикутний переріз ABC як різницю двох перерізів у вигляді прямокутних трикутників OBC і OBA (рис. 2.17). Для визначення h запишемо формулу для $J_z^{ABC} = J_z^{OBC} - J_z^{OBA}$:

$$J_z^{ABC} = \frac{h \cdot h^3}{12} - \frac{(h/2) \cdot h^3}{12} = \frac{h^4}{24} = 54 \cdot 10^{-8}.$$

Звідки

$$h = \sqrt[4]{24 \cdot 54 \cdot 10^{-8}} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

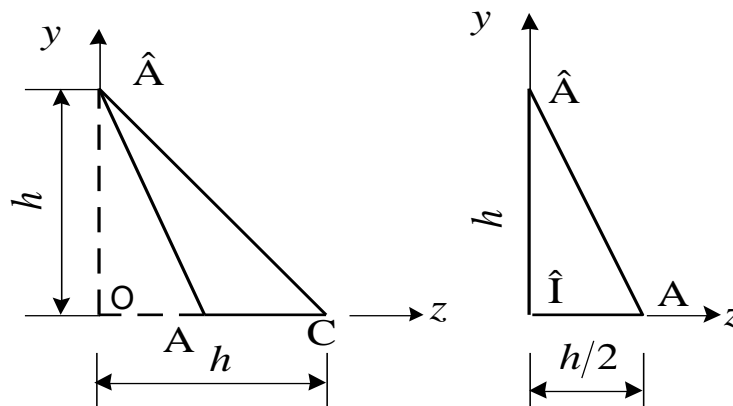


Рис. 2.17. До задачі 2.2.5

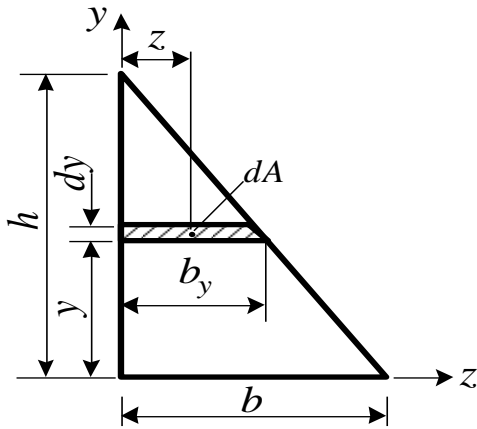
Відцентровий момент інерції

$$J_{yz}^{ABC} = J_{yz}^{OBC} - J_{yz}^{OBA} = \frac{h^2 \cdot h^2}{24} - \frac{(h/2)^2 \cdot h^2}{24} = \frac{h^4}{32} = \frac{6^4 \cdot 10^{-8}}{32} = 40,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Якщо не пам'ятаєте формул для визначення моментів інерції трикутного перерізу, можна їх одержати з визначення.

Осьовий момент інерції відносно z

$$J_z = \int_A y^2 dA .$$



Для елементарної площадки $dA = b_y dy$
(див. заштриховану смужку на рис.2.18)
 y є величиною постійною.

Оскільки $\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}$,

то $b_y = \frac{b}{h}(h-y)$.

Рис. 2.18. До задачі 2.2.5

Тоді

$$J_z = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b}{h} \left| \frac{h y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right|_0^h = \frac{b h^3}{12} .$$

Відцентровий момент інерції

$$J_{yz} = \int_A y z dA .$$

Запишемо всі підінтегральні величини у функції одного аргументу y :

$$dA = b_y dy = \frac{b}{h} (h-y) dy; \quad z = \frac{b_y}{2} = \frac{b(h-y)}{2h} ,$$

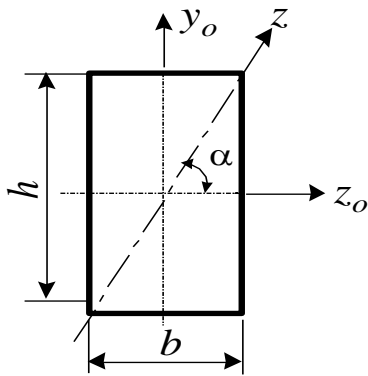
тоді

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \int_0^h y \frac{b(h-y)}{2h} \cdot \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h-y)^2 y dy = \\ &= \frac{b^2}{2h^2} \left| \frac{h^2 y^2}{2} - 2 \frac{h y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right|_0^h = \frac{b^2 h^2}{24} . \end{aligned}$$

2.2.6. Проведемо центральні осі, які паралельні сторонам прямокутника, вони будуть і головними, тому що є осями симетрії. З огляду на це запишемо вирази для осьового моменту відносно осі z , поверненої на кут α відносно осі z_0 (рис. 2.19).

$$J_z = J_{z_o} \cos^2 \alpha + J_{y_o} \sin^2 \alpha,$$

але



$$J_{z_o} = \frac{b h^3}{12}, \quad J_{y_o} = \frac{h b^3}{12}.$$

Тоді

$$J_z = \frac{b h^3}{12} \cos^2 \alpha + \frac{h b^3}{12} \sin^2 \alpha.$$

Далі розв'язання можна здійснювати двома

Рис. 2.19. До задачі 2.2.6 шляхами, використовуючи в якості змінних або

тригонометричні функції, або співвідношення сторін. Покажемо спочатку перше розв'язання.

Винесемо за дужки $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$:

$$\begin{aligned} J_z &= \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{b h^3}{12} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{h b^3}{12} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{b h^3}{12} \cdot \operatorname{ctg} \alpha + \frac{h b^3}{12} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right), \end{aligned}$$

але $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{h}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}.$

Якщо підставити це в J_z , виконати скорочення і, з огляду на те, що

$b \cdot h = A = \text{const}$, одержимо $J_z = \frac{A^2}{6} \sin \alpha \cos \alpha.$

Досліджуємо на екстремум цю функцію за α .

$$\frac{d J_z}{d \alpha} = \frac{A^2}{6} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{A^2}{6} \cos 2 \alpha,$$

$$\frac{d J_z}{d \alpha} = 0, \quad \text{отже,} \quad \cos 2 \alpha = 0 \quad \text{і} \quad \alpha = 45^\circ.$$

Візьмемо другу похідну

$$\frac{d^2 J_z}{d \alpha^2} = \frac{A^2}{6} (-2 \sin 2 \alpha).$$

При $\alpha = 45^\circ \quad \frac{d^2 J_z}{d \alpha^2} = -\frac{A^2}{3} < 0$, отже при $\alpha = 45^\circ \quad J_z$ приймає

максимальне значення

$$J_z^{\max} = \frac{A^2}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{A^2}{12}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ і $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $J_z \rightarrow 0$.

Максимальне значення J_z буде при $\frac{h}{b} = 1$.

Тепер покажемо розв'язання з іншими змінними. Ураховуючи, що

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

запишемо вираз осьового моменту в такому вигляді:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} \frac{b^2}{h^2 + b^2} + \frac{b^3h}{12} \frac{h^2}{h^2 + b^2} = \frac{(bh)^2}{12 \left(\frac{h}{b} + \frac{b}{h} \right)}.$$

Позначивши через $u = \frac{h}{b}$ і, враховуючи, що $bh = A = \text{const}$, одержимо

$$J_z = \frac{A^2}{12} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} = \frac{\text{const}}{f(u)}.$$

Дослідимо знаменник J_z , тобто $f(u)$.

Знайдемо $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(u + \frac{1}{u} \right) = \infty$ і $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty$.

Таким чином, знаменник $f(u)$ нескінченно зростає при $\frac{h}{b} \rightarrow 0$ і $\frac{h}{b} \rightarrow \infty$.

Це вказує на те, що значення J_z зменшуються як для перерізів «втягну-тих» уздовж осі x , так і уздовж осі y .

Тепер дослідимо $f(u)$ на екстремум:

$$\frac{df(u)}{du} = \left(1 + \frac{1}{u} \right)' = 1 - \frac{1}{u^2} - \text{буде дорівнювати нулю при } u = 1;$$

$$\frac{d^2f(u)}{du^2} = \frac{2}{u^3} > 0 \text{ при } u = 1.$$

Отже, функція $f(u)$ приймає при $u = 1$ мінімальне значення, а вона стоїть у знаменнику для J_z . Отже, при $u = 1$, тобто $b = h$, осьовий момент приймає максимальне значення.

Розглянемо ще варіант розв'язання. Позначимо $h/b = n$, $h \cdot b = A$ – площа перерізу. Осьові моменти інерції відносно головних центральних осей прямокутника дорівнюють

$$J_{z_o} = \frac{b h^3}{12}, \quad J_{y_o} = \frac{h b^3}{12}.$$

Відцентровий момент інерції $J_{z_o y_o} = 0$. Для визначення моменту інерції скористаємося формулою перетворення моментів інерції при повороті осей:

$$J_z = J_{z_o} \cos^2 \alpha + J_{y_o} \sin^2 \alpha - J_{z_o y_o} \sin 2\alpha.$$

Запишемо тригонометричні функції через розміри h і b :

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

$$\text{Тепер } J_z = \frac{b h^3}{12} \cdot \frac{b^2}{b^2 + h^2} + \frac{h b^3}{12} \cdot \frac{h^2}{b^2 + h^2} = \frac{A^3}{6} \cdot \frac{1}{b^2 + h^2}.$$

Запишемо J_z через A і n , використовуючи залежності $h/b = n$ і $b h = A$.

$$b = \frac{h}{n} \text{ підставляємо в } b h = A, \text{ одержимо } \frac{h^2}{n} = A, \text{ звідки } h = \sqrt{nA}.$$

Перетворимо вираз для J_z :

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{A^3}{6} \cdot \frac{1}{b^2 + h^2} = \frac{A^3}{6} \cdot \frac{1}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} = \frac{A^3}{6} \cdot \frac{h^2}{b^2 h^2 \left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} = \\ &= \frac{A^3}{6} \cdot \frac{n A}{A^2 (1 + n^2)} = \frac{A^2}{6} \cdot \frac{n}{1 + n^2}. \end{aligned}$$

Отже, остаточно одержали вираз J_z у функції від n .

Досліджуємо J_z на екстремум, тобто $\frac{dJ_z}{dn} = 0$:

$$\frac{dJ_z}{dn} = \frac{A^2}{6} \cdot \frac{1 \cdot (1 + n^2) - 2n \cdot n}{(1 + n^2)^2} = \frac{A^2}{6} \cdot \frac{1 + n^2 - 2n^2}{(1 + n^2)^2} = \frac{A^2}{6} \cdot \frac{1 - n^2}{(1 + n^2)^2}.$$

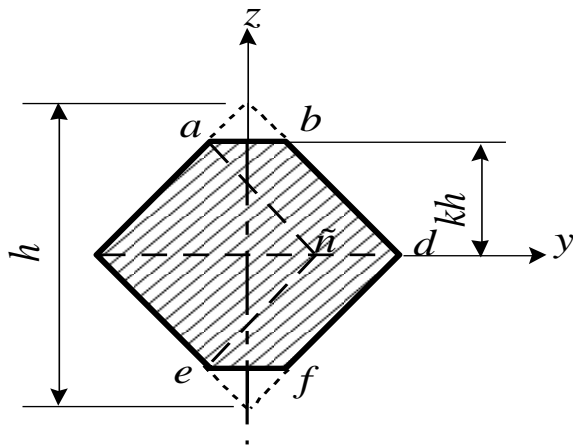
Прирівняємо похідну до нуля. Але оскільки $(1 + n^2)^2 \neq 0$, отже $1 - n^2 = 0$. Звідки $n = 1$. Щоб установити, яке максимальне або мінімальне значення J_z буде при $n = 1$, досліджуємо другу похідну на знак.

$$\frac{d^2 J_z}{dn^2} = \frac{A^2}{6} \cdot \frac{-2n \cdot (1 + n^2)^2 - 4n \cdot (1 + n^2)(1 - n^2)}{(1 + n^2)^4} = -\frac{A^2}{6} \cdot 8 < 0.$$

Отже, $J_z = \frac{A^2}{12}$ (при $n = 1$) є max.

При $n \rightarrow 0$, $J_z \rightarrow 0$. Але оскільки осьовий момент інерції $J_z = \int_A y^2 dA$ – сума додатних величин і не може дорівнювати нулю, отже, мінімум J_z не існує.

2.2.7. Для одержання моменту інерції усіченої фігури розіб'ємо її на



квадрат і два паралелограми $abcd$ і $cdef$ (рис. 2.20). Сторони квадрата дорівнюють $kh\sqrt{2}$, а основа паралелограма, наприклад, $ab = h(1 - 2k)$. Момент інерції зменшеного перерізу відносно осі y дорівнює сумі моментів інерції квадрата відносно діагоналі і двох паралелограмів відносно осі, що проходить через основу:

Рис. 2.20. До задачі 2.2.7

$$J_y = \frac{(kh\sqrt{2})^4}{12} + 2 \frac{h(1-2k)(kh)^3}{3} = \frac{k^3 h^4 (2-3k)}{3},$$

а відповідний момент опору згину складає

$$W_y = \frac{J_y}{Z_{\max}} = \frac{k^3 h^4 (2-3k)}{3kh} = \frac{k^2 h^3 (2-3k)}{3}.$$

Запишемо умову максимуму моменту опору від k :

$$\frac{dW_y}{dk} = 0, \quad \frac{h^3}{3} [2k(2-3k) - 3k^2] = 0.$$

Реальне значення кореня цього рівняння буде $k = \frac{8}{9}$. Таким чином,

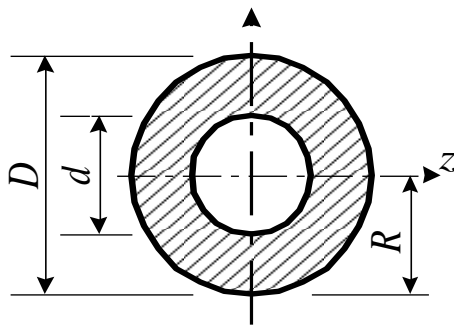
кожний кут квадратного перерізу треба зрізати на величину $\frac{h}{2}(1-2k) = \frac{1}{18}h$.

2.2.8. Знайдемо висоту вписаного в окружність прямокутного перерізу (рис. 2.22) при

$$b = R \quad h = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$$

Площа перерізу $A = bh = R^2\sqrt{3}$.

Одержимо величину внутрішнього діаметра кільцевого перерізу (рис. 2.21) з умови рівності площ:



$$\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = R^2 \sqrt{3},$$

$$\frac{\pi D^2}{4} - R^2 \sqrt{3} = \frac{\pi d^2}{4},$$

Рис. 2.21. До задачі 2.2.8

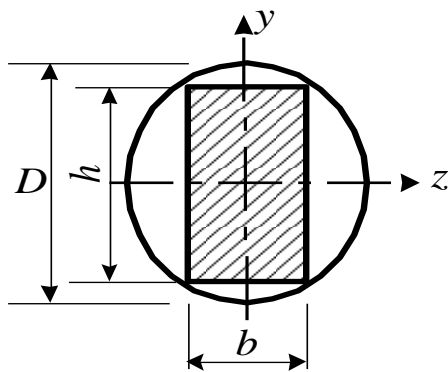
$$d^2 = D^2 - \frac{4R^2}{\pi} \sqrt{3} = 4R^2 - \frac{4R^2}{\pi} \sqrt{3} = 4R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right).$$

Обчислимо моменти опору перерізів відносно осей z:

$$\begin{aligned} W_z^{\text{к.пер.}} &= \frac{J_z}{R} = \frac{\pi D^4}{64 R} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) = \frac{\pi R^3}{4} \left(1 - 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} - \frac{3}{\pi^2} \right) = \\ &= \frac{R^3}{4} \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{\pi} \right), \end{aligned}$$

де

$$\frac{d^4}{D^4} = \frac{16R^4 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right)^2}{(2R)^4} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right)^2.$$



Момент опору прямокутного перерізу

$$W_z^{\text{пр.пер.}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{3R^3}{6} = \frac{R^3}{2}.$$

Відношення

$$\begin{aligned} \frac{W_z^{\text{к.пер.}}}{W_z^{\text{пр.пер.}}} &= \frac{2\sqrt{3} - \frac{3}{\pi}}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2\pi} = \\ &= 1,732 - 0,478 = 1,254. \end{aligned}$$

Рис. 2.22. До задачі 2.2.8

2.2.9. У круглому перерізі всі осі є осями симетрії, отже, усі вони головні. У квадратному перерізі горизонтальна і вертикальна осі є осями симетрії, отже, вони головні. Осьові моменти відносно них дорівнюють один одному. Отже, для квадрата будь-яка пара взаємно перпендикулярних осей є головною. У третьому перерізі горизонтальна і вертикальна осі будуть головними, тому що відносно них відцентровий момент інерції перерізу дорівнює нулю (рис. 2.23). Дійсно,

$$J_{zy} = 2J_{zy}^{\text{гор.тр.}} + 2J_{zy}^{\text{верт.тр.}} = 0, \quad \text{але} \quad J_{zy}^{\text{гор.тр.}} = \int_A yz dA > 0,$$

тому що координати елементарних площадок у правого трикутника $y > 0$ і $z > 0$, а у лівого – $y < 0$ і $z < 0$. А $J_{zy}^{\text{верт.тр.}} = \int_A yz dA < 0$, тому що координати dA у верхнього трикутника $y > 0$, а $z < 0$, а в нижнього – навпаки.

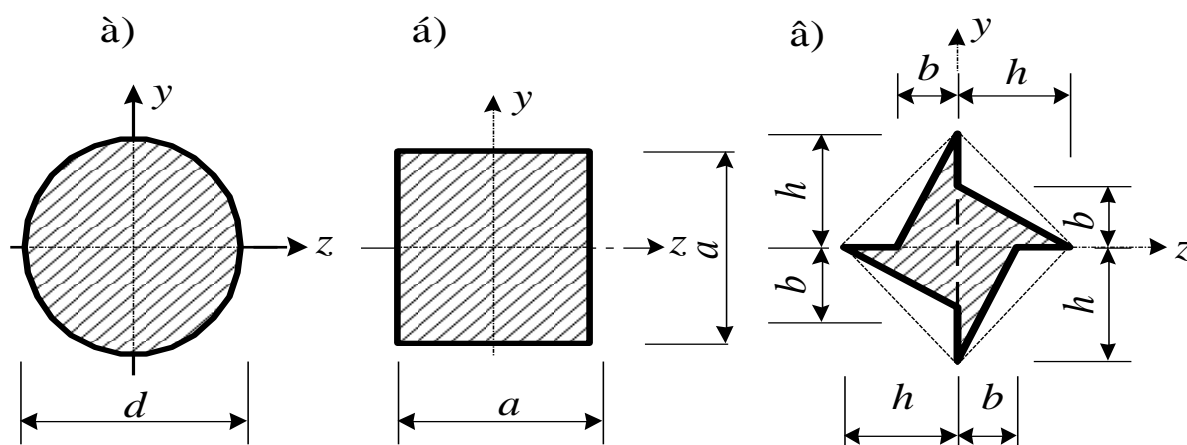


Рис. 2.23. До задачі 2.2.9

Абсолютні ж значення $|J_{zy}^{\text{гор.тр.}}| = |J_{zy}^{\text{верт.тр.}}|$ через рівність трикутників. Осьові моменти інерції перерізу дорівнюють один одному ($J_y = J_z$), так складові перерізу трикутники однаково розташовані відносно головних осей y і z . З цього видно, що будь-яка пара взаємно-перпендикулярних осей буде головною. Момент опору відносно нейтральної осі $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$.

Максимальні нормальні напруження при згині визначаються за формулою $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$. Отже, ці напруження будуть тим меншими, чим

більшим буде момент опору. А момент опору буде більшим відносно нейтральної осі, відстань відносно якої найбільш віддалених точок є найменшою. Звідси видно, що для круглого перерізу нейтральна вісь може розташовуватися довільним чином, тому що $y_{max} = \text{const}$; для квадратного перерізу нейтральна вісь повинна збігатися з горизонтальною головною віссю, при якій $y_{max} = \frac{a}{2}$ (при інших положеннях нейтральних осей $y_{max} > \frac{a}{2}$); для третього перерізу нейтральну вісь необхідно розташувати під кутом 45° до горизонталі. При такому її розташуванні $y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} h = 0,707 h$ – найменше значення з усіх для інших положень нейтральних осей.

2.2.10. Міцність балки характеризується нормальними напруженнями $\sigma = \frac{M}{W_z}$ (рис. 2.24). Міцність збільшується зі зменшенням напружень, тобто зі збільшенням моменту опору W_z . Момент опору $W_z = \frac{b h^2}{6}$. Запишемо W_z тільки через h , використовуючи умову $b^2 + h^2 = d^2$. Звідси $b = \sqrt{d^2 - h^2}$ і $W_z = \frac{h^2 \sqrt{d^2 - h^2}}{6}$. Знайдемо h , при якому W_z буде приймати екстремальне значення:

$$\frac{d W_z}{d h} = 0, \quad \frac{2h \sqrt{d^2 - h^2}}{6} - \frac{2h^3}{12 \sqrt{d^2 - h^2}} = 0.$$

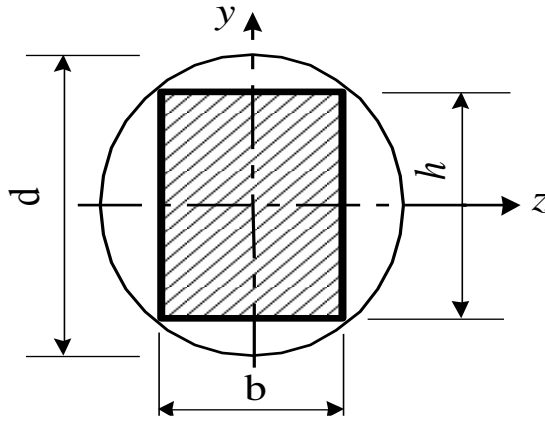


Рис. 2.24. До задачі 2.2.10

Приведемо до одного знаменника і порівняємо чисельник до нуля:

$$\frac{4h(d^2 - h^2) - 2h^3}{12\sqrt{d^2 - h^2}} = 0,$$

$$4hd^2 - h^3 - 2h^3 = 0,$$

або $h(2d^2 - 3h^2) = 0$. Звідки $h_1 = 0$; $h_{2,3} = \pm d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Реальним буде тільки одне значення $h = d\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816d$, при цьому $b = 0,577d$, а $\frac{h}{b} = 1,414$. Можна не сумніватися, що в цьому випадку $W_z = W_{\max}$.

Жорсткість балки EJ залежить від модуля пружності і від моменту інерції перерізу. Тому досліджуємо J_z на екстремум. Для прямокутного перерізу $J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3\sqrt{d^2 - h^2}}{12}$.

Тоді $\frac{dJ_z}{dh} = 0$, $\frac{3h^2\sqrt{d^2 - h^2}}{12} - \frac{2h^4}{24\sqrt{d^2 - h^2}} = 0$,

або $\frac{6h^2(d^2 - h^2) - 2h^4}{12\sqrt{d^2 - h^2}} = 0$, або $h^2(3d^2 - 4h^2) = 0$.

Нас буде задовольняти тільки одне значення h , як-от

$$h = d \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866 d. \text{ Тоді } b = 0,5 d, \text{ а } \frac{h}{b} = 1,732.$$

Природно, при цьому $J_z = J_{\max}$.

2.2.11. Виразимо розміри квадратного перерізу через діаметр круглого (рис. 2.25):

$$\frac{\pi d^4}{4} = a^4, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{d\sqrt{\pi}}{2}.$$

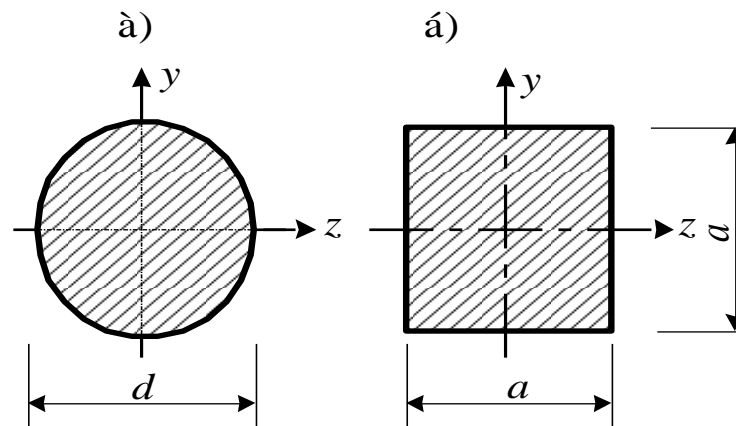


Рис. 2.25. До задачі 2.2.11

Моменти опору перерізів при крученні $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$ – круглого;

$W_k = \beta a^3 = \beta \frac{\pi d^3 \sqrt{\pi}}{8}$ – квадратного, де $\beta = 0,208$ (див. с. 11)

$W_\rho = 0,196 d^3$; $W_k = \frac{0,208 \pi \sqrt{\pi}}{8} d^3 = 0,145 d^3$, $W_\rho > W_k$, отже,

круглий переріз раціональний при крутінні. Моменти опору перерізів при

вигині $W_y^{кр} = \frac{\pi d^3}{32}$ – круглого; $W_y^{кв} = \frac{a^3}{6} = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{48} d^3$ – квадратного,

$W_y^{кр} = 0,098 d^3$; $W_y^{кв} = 0,116 d^3$. Отже, при роботі на вигин більш раціональним є квадратний переріз $W_y^{кв} > W_y^{кр}$.

Розділ 3

3.2.1. При центральному розтяганні три взаємно перпендикулярні головні площадки розташовуються так: одна перпендикулярна до осі стержня і дві паралельно їй. При цьому головні напруження будуть дорівнювати $\sigma_1 = \sigma = \frac{F}{A}$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а головні відносні деформації

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma}{E}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma}{E}.$$

Запишемо формули узагальненого закону Гука для шуканого паралелепіпеда, напрямки нормальних напружень позначивши через x, y і z :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].\end{aligned}$$

За умовою, подовження двох із трьох ребер, припустимо ε_x і ε_y , дорівнюють нулю. Тоді, відповідно до узагальненого закону Гука

$$\begin{aligned}\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) &= 0, \\ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) &= 0.\end{aligned}$$

З першого рівняння віднімемо друге:

$$\sigma_x - \sigma_y - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z + \nu\sigma_z + \nu\sigma_x = 0. \text{ Звідси випливає, що } \sigma_x = \sigma_y.$$

Тепер із першого рівняння знаходимо $\sigma_z = \frac{1-\nu}{\nu}\sigma_y$.

Запишемо відносне подовження ε_z через σ_y :

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\frac{1-\nu}{\nu}\sigma_y - 2\nu\sigma_y \right] = \frac{\sigma_y}{E} \frac{1-\nu-2\nu^2}{\nu}. \text{ Відносна зміна об'єму, з одного боку, дорівнює}$$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}\sigma,$$

з іншого боку,

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_z = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E\nu}\sigma_y.$$

Звідси нормальні напруження по гранях заданого елементарного паралелепіпеда будуть дорівнювати:

$$\sigma_y = \frac{\nu(1-2\nu)}{1-\nu-2\nu^2}\sigma = \frac{\nu}{1+\nu}\sigma,$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1+\nu}\sigma,$$

$$\sigma_z = \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\nu}{1+\nu}\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}\sigma.$$

3.2.2. При вертикальному тиску вертикальні ребра стають коротшими, а горизонтальні – довшими. Відносні деформації їх будуть

$$\varepsilon_1 = -\frac{P}{E}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \nu \frac{P}{E}. \quad \text{Зменшення площі кожної бічної грані}$$

$$\Delta A = A - A_1 = a^2 - (a + \Delta a)(a + \Delta b) = a^2 - a^2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) =$$

$$= a^2(1 - 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

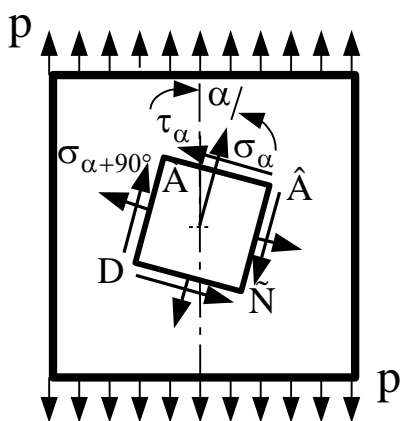
Оскільки величини ε_1 і ε_2 дуже малі, їхнім добутком можна знехтувати. Тоді одержимо

$$\Delta A = -A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$\text{або } \Delta A = -A \left(-\frac{P}{E} + \nu \frac{P}{E} \right) = \frac{AP}{E}(1 - \nu).$$

$$\text{Звідси } \nu = 1 - \frac{\Delta A E}{AP} = 1 - \frac{7 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^5}{0,1^2 \cdot 200} = 0,3.$$

3.2.3. При дії на сталеву пластину рівномірно розподіленого тиску «р» на сторонах виділеного квадрата ABCD, нахилоного під кутом α до напрямку дії тиску, будуть виникати нормальні і дотичні напруження (рис. 3.8).



$$\sigma_\alpha = p \cos^2 \alpha; \quad \sigma_{\alpha+90^\circ} = p \sin^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{p}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.1)$$

Рис. 3.8. До задачі 3.2.3

Кутові деформації квадрата ABCD залежно від

кута α знайдуться за законом Гука з урахуванням (3.1):

$$\gamma_\alpha = \frac{\tau_\alpha}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{p}{2} \sin 2\alpha = \frac{1+\nu}{E} p \sin 2\alpha. \quad (3.2)$$

Для виведення залежності лінійних деформацій діагоналей AC і BD від кута α розглянемо деформації ABCD ε_α , $\varepsilon_{\alpha+90^\circ}$, γ_α . Кожна з цих трьох деформацій буде викликати зміну довжини діагоналі. Відповідні збільшення довжини діагоналі AC, як показано на рис. 3.9, а, б, в, дорівнюють $\varepsilon_\alpha dx \cos \theta$, $\varepsilon_{\alpha+90^\circ} dy \sin \theta$ і $\gamma_\alpha dy \cos \theta$. Таким чином, повне збільшення довжини діагоналі дорівнює сумі цих трьох величин, а відповідна деформація ε_θ діагоналі утворюється діленням цієї суми на довжину ds діагоналі. З огляду на те, що $dy/ds = \sin \theta$ і $dx/ds = \cos \theta$, одержимо

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\alpha \cos^2 \theta + \varepsilon_{\alpha+90^\circ} \sin^2 \theta + \gamma_\alpha \sin \theta \cos \theta. \quad (3.3)$$

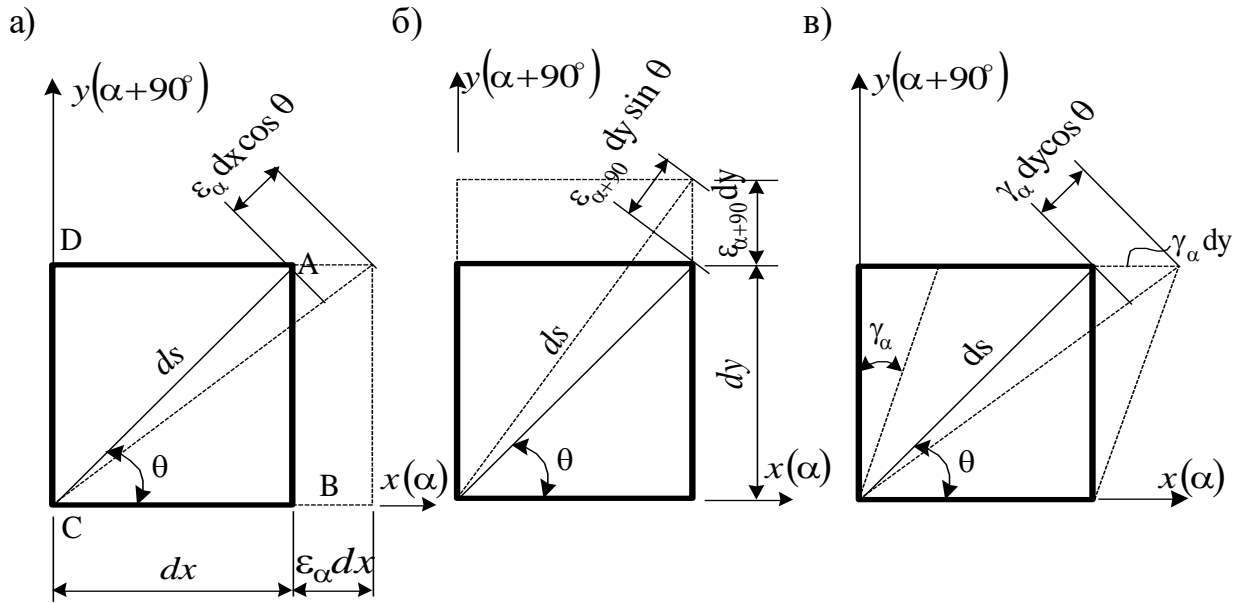


Рис. 3.9. До задачі 3.2.3

У нашому випадку ABCD – квадрат, а отже, для діагоналі AC $\theta = 45^0$

і

$$\varepsilon_{45^0} = \frac{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha+90^0} + \gamma_{\alpha}}{2}. \quad (3.4)$$

Для діагоналі BD кут дорівнює $\theta + 90^0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta+90^0} &= \varepsilon_{\alpha} \cos^2(\theta + 90^0) + \varepsilon_{\alpha+90^0} \sin^2(\theta + 90^0) + \\ &+ \gamma_{\alpha} \sin(\theta + 90^0) \cos(\theta + 90^0). \end{aligned}$$

Але $\sin(\theta + 90^0) = \cos \theta$, а $\cos(\theta + 90^0) = -\sin \theta$, а тому відносна лінійна деформація діагоналі BD буде

$$\varepsilon_{135^0} = \frac{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha+90^0} - \gamma_{\alpha}}{2}. \quad (3.5)$$

Відносні лінійні деформації сторін квадрата ε_{α} і $\varepsilon_{\alpha+90^0}$ запишуться через тиск «р» за законом Гука і з урахуванням (3.1) будуть

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\alpha} - \nu \sigma_{\alpha+90^0}) = \frac{1}{E} (p \cos^2 \alpha - \nu p \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{p}{E} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{\alpha+90^0} = \frac{p}{E} (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha).$$

Підставляючи (3.2) і (3.6) у (3.4) і (3.5), одержимо

$$\varepsilon_{45^0, 135^0} = \frac{p}{E} [1 - \nu \pm (1 + \nu) \sin 2\alpha]. \quad (3.7)$$

Знайдемо кут α , при якому відносні лінійні деформації діагоналей AC і BD будуть сприймати екстремальні значення:

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \pm \frac{p}{E} (1 + \nu) 2 \cos 2\alpha = 0.$$

Звідки $\cos 2\alpha = 0$ і $\alpha = \pm 45^0$.

Друга похідна $\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha^2} = \mp \frac{p}{E} 4 \sin 2\alpha$ при $\alpha = +45^0$ для діагоналі AC

буде < 0 і вона сприйме максимальне значення, а діагональ BD відповідно мінімальне значення.

Для $\alpha = -45^0$ буде навпаки.

3.2.4. Відносні подовження великої і малої осей еліпса будуть відбуватися в напрямку головних напружень. Знайдемо величини і напрямки головних напружень (рис. 3.10). При плоскому напруженому стані

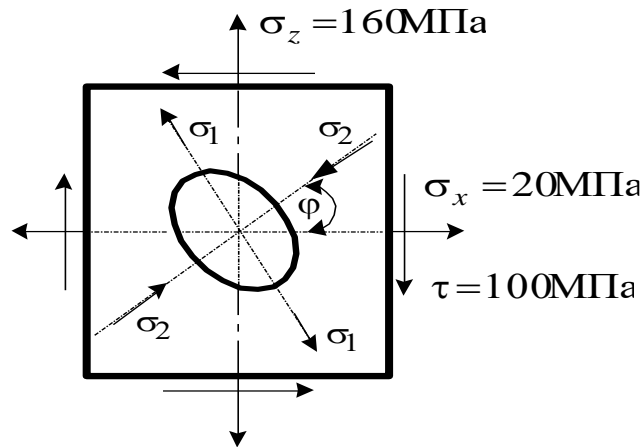


Рис. 3.10. До задачі 3.2.4

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{20 + 160}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20 - 160}{2}\right)^2 + 100^2} = 90 \pm 122 = \begin{cases} 212 \text{ МПа} \\ -32 \text{ МПа} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_z} = -\frac{2 \cdot 100}{20 - 160} = 1,43, \quad 2\varphi = 55^\circ.$$

$$\varphi_1 = 27^\circ 30', \quad \varphi_2 = 27^\circ 30' + 90^\circ = 117^\circ 30'.$$

Перший напрямок σ_{\min} , другий – σ_{\max} . Напрямок σ_{\max} завжди проходить через дві чверті осей координат, в яких стрілки дотичних напружень сходяться. У цих же напрямках будуть відбуватися і головні деформації, створюючи велику і малу осі еліпса. Великій осі еліпса відповідає кут $\varphi = 117^\circ 30'$, малій – $27^\circ 30'$. Відносні деформації знайдемо, використовуючи залежності закону Гука при плоскому напруженому стані:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{212 + 0,3 \cdot 32}{2 \cdot 10^5} = 1,1 \cdot 10^{-3},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = -\frac{32 + 0,3 \cdot 212}{2 \cdot 10^5} = -0,48 \cdot 10^{-3}.$$

3.2.5. По площадках, які перпендикулярні до осі «у», дотичні напруження дорівнюють нулю, отже вони – головні. Нормальні напруження, що діють по цих площадках, будуть головними. Але оскільки по цих площадках нормальні напруження дорівнюють нулю, то одне із шуканих головних напружень дорівнює нулю, а заданий напружений стан є плоским (рис. 3.11).

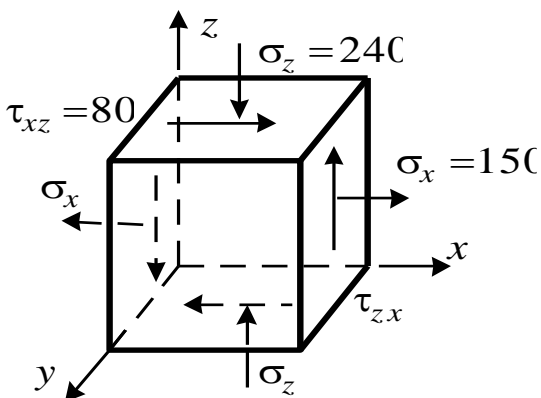


Рис. 3.11. До задачі 3.2.5

Знайдемо положення головних площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} = -\frac{2(-80)}{150 - (-240)} = 0,41,$$

$$2\alpha_0 = 22^\circ 20', \quad \alpha_0 = 11^\circ 10'.$$

Таким чином, одна головна площадка до осі x буде нахилена під кутом $\alpha_0 = 11^\circ 10'$, а друга – $\alpha_0 + 90^\circ = 101^\circ 10'$.

Величини головних напружень

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yx}^2} = \\ &= \frac{150 - 240}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(150 + 240)^2 + 4 \cdot 80^2} = \\ &= -45 \pm 210,77 = \begin{cases} 165,77 \text{ МПа}, \\ -255,77 \text{ МПа}. \end{cases}\end{aligned}$$

З урахуванням раніше зазначеного головні напруження ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – алгебраїчно) мають такі значення (рис. 3.12):

$$\sigma_1 = 165,77 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -255,77 \text{ МПа}.$$

Положення головних площадок

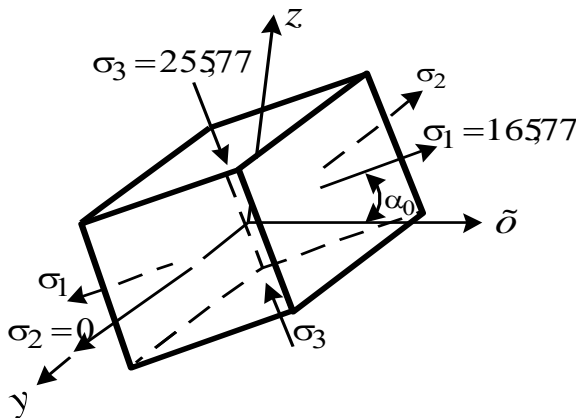


Рис. 3.12. До задачі 3.2.5

$$l_1 = \cos(v_1, x) = \cos 11^\circ 10' = 0,981,$$

$$m_1 = \cos(v_1, y) = \cos 90^\circ = 0,$$

$$n_1 = \cos(v_1, z) = \cos 78^\circ 50' = 0,194.$$

$$l_2 = \cos(v_2, x) = \cos 90^\circ = 0,$$

$$m_2 = \cos(v_2, y) = \cos 0^\circ = 1,$$

$$n_2 = 0,$$

$$l_3 = \cos(v_3, x) = \cos 101^\circ 10' = -0,194,$$

$$m_3 = \cos(v_3, y) = \cos 90^\circ = 0,$$

$$n_3 = \cos(v_3, z) = \cos 11^\circ 10' = 0,981.$$

3.2.6. Знайдемо напруження по гранях, які торкаються плит А і В. Позначимо напруження p_1 через σ_x , p_2 через σ_y . Умовою для визначення напруження, що виникає по гранях А і В, буде рівність нулю відносної деформації, спрямованої перпендикулярно до плит А і В - $\varepsilon_z = 0$. Скористаємося узагальненим законом Гука (рис. 3.13):

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0.$$

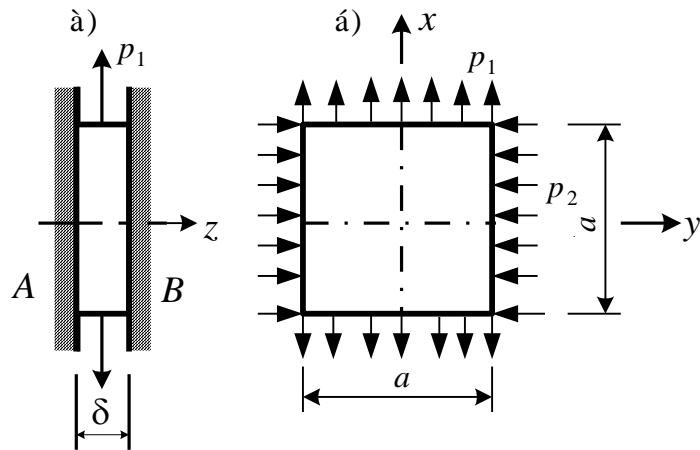


Рис. 3.13. До задачі 3.2.6

Звідси

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0,25(80 - 200) = -30 \text{ МПа}.$$

Напруження σ_x , σ_y і σ_z є головними, тому що на цих же площадках відсутні дотичні напруження. Їх відповідно до прийнятої умови $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ алгебраїчно позначимо $\sigma_1 = 80 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = -30 \text{ МПа}$; $\sigma_3 = -200 \text{ МПа}$.

Використовуючи узагальнений закон Гука, знайдемо головні деформації:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [80 - 0,25(-30 - 200)] = \\ &= 68,75 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-200 - 0,25(80 - 30)] = \\ &= -106,25 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Відносна зміна об'єму

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 68,75 \cdot 10^{-5} + 0 - 106,25 \cdot 10^{-5} = -37,5 \cdot 10^{-5}.$$

3.2.7. Використаємо формулу для визначення лінійних деформацій по довільному спрямуванню:

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_x \ell^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} \ell m .$$

На підставі цієї формули складемо систему рівнянь деформацій для розетки (рис. 3.7) з урахуванням показань відповідних датчиків:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10^{-4} &= 0,6^2 \varepsilon_x + 0,8^2 \varepsilon_y + 0,6 \cdot 0,8 \gamma_{xy} , \\ -1 \cdot 10^{-4} &= (-0,6)^2 \varepsilon_x + 0,8^2 \varepsilon_y + (-0,6) \cdot (0,8) \gamma_{xy} , \\ 4 \cdot 10^{-4} &= (-1)^2 \varepsilon_x + (0)^2 \varepsilon_y + (-1) \cdot (0) \gamma_{xy} . \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо

$$\varepsilon_x = 4 \cdot 10^{-4} ; \quad \varepsilon_y = -1,47 \cdot 10^{-4} ; \quad \gamma_{xy} = 3,13 \cdot 10^{-4} .$$

Обчислюємо величини і напрямки головних деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \\ &= \left[\frac{4 - 1,47}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4 + 1,47)^2 + 3,13^2} \right] \cdot 10^{-4} = \begin{cases} 4,416 \cdot 10^{-4} ; \\ -1,886 \cdot 10^{-4} , \end{cases} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{3,13 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4} + 1,47 \cdot 10^{-4}} = 0,572 ,$$

$$2\alpha \approx 33,1^\circ , \quad \alpha = 16^\circ 33' .$$

Знаючи головні деформації, визначаємо й головні напруження:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{2 \cdot 10^5}{1 - 0,3^2} (4,416 - 0,3 \cdot 1,886) \cdot 10^{-4} = 84,6 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) = \frac{2 \cdot 10^5}{1 - 0,3^2} (-1,886 + 0,3 \cdot 4,416) \cdot 10^{-4} = -12,3 \text{ МПа} .$$

Варіант розв'язання.

Початок розв'язання аж до визначення деформацій по осях x, y буде таким самим:

$$\varepsilon_x = 4 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_y = -1,47 \cdot 10^{-4}; \quad \gamma_{xy} = 3,13 \cdot 10^{-4}.$$

Продовжуючи розв'язання, за законом Гука знайдемо компоненти напруженого стану:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (4 - 0,3 \cdot 1,47) \cdot 10^{-4} = 78,2 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (-1,47 + 0,3 \cdot 4) \cdot 10^{-4} = -5,9 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy} = \frac{2 \cdot 10^5}{1-0,3^2} \cdot \frac{1-0,3}{2} \cdot 3,13 \cdot 10^{-4} = 24,1 \text{ МПа}.$$

Обчислюємо головні напруження і напрямки головних осей:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{78,2 - 5,9}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(78,2 + 5,9)^2 + 4 \cdot 24,1^2} = \begin{cases} 84,6 \text{ МПа}, \\ -12,3 \text{ МПа}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 24,1}{78,2 + 5,9} = 0,573,$$

$$2\alpha \approx 33,1^\circ, \quad \alpha = 16^\circ 33'.$$

Варіанти розв'язання майже однакові у всіх відношеннях.

Розділ 4

4.2.1. З умов рівноваги визначаємо реакції опор колінчатого стержня (рис. 4.9):

$$1) \sum Y = 0, \quad R_a - F = 0, \quad R_a = F;$$

$$2) \sum M_b = 0, \quad F \cdot \ell - H_a \cdot \ell = 0, \quad H_a = F;$$

$$3) \sum X = 0, \quad -H_a + H_b = 0, \quad H_b = H_a = F.$$

Зусилля, що виникає в болті опори А, буде дорівнювати геометричній сумі реакцій опори А:

$$Q = \sqrt{R_a^2 + H_a^2} = \sqrt{F^2 + F^2} = F\sqrt{2} .$$

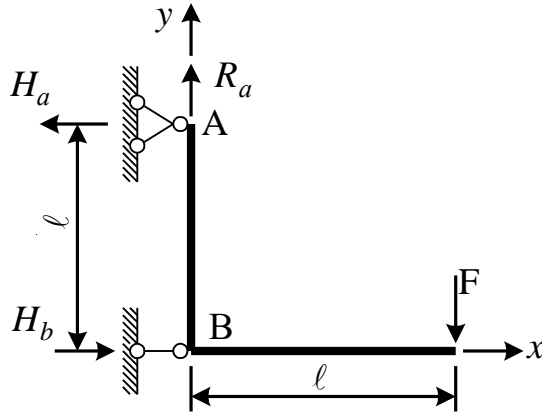


Рис. 4.9. До задачі 4.2.1

Умова міцності болта при зрізі

$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{ср}}} = \frac{4Q}{\pi d^2 m} \leq [\tau],$$

де m – кількість площин зрізу.

Болт зрізається по двох площинах – $m = 2$. Звідси визначаємо діаметр поперечного перерізу болта: $d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi m [\tau]}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}F}{\pi [\tau]}}$.

4.2.2. Для визначення опорних крутних моментів запишемо рівняння (рис. 4.10):

$$1) \sum M_x = 0;$$

$$M_a + M_{\text{кр}} - 2M_{\text{кр}} + M_c = 0,$$

$$M_a + M_c = M_{\text{кр}}. \quad (4.1)$$

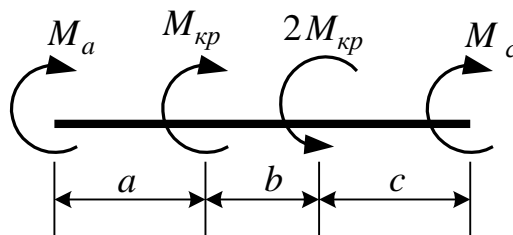


Рис. 4.10. До задачі 4.2.2

Задача статично невизначна – рівняння одне, а невідомих два.

Для її розв'язання складаємо друге рівняння – сумісності деформацій. Наприклад, кут закручування від дії опорного крутного моменту M_c і заданих зовнішніх крутних моментів повинен дорівнювати нулю, тому що на кінці «С» є опора;

$$2) \varphi_c = 0. \quad (4.2)$$

Розкриваємо це рівняння, записуючи вирази для кутів закручування,

$$\frac{M_c(a+b+c)}{GJ_\rho} - \frac{2M_{кр}(a+b)}{GJ_\rho} + \frac{M_{кр}a}{GJ_\rho} = 0.$$

Звідси
$$M_c = M_{кр} \frac{a+2b}{a+b+c}. \quad (4.3)$$

Умова рівномірності вала на ділянках c і b при однакових матеріалі і поперечному перерізі буде відповідати рівності абсолютних значень крутних моментів на цих ділянках

$$|M_c| = |M_b|. \quad (4.4)$$

Крутний момент на ділянці c дорівнює опорному моменту M_c . На ділянці b

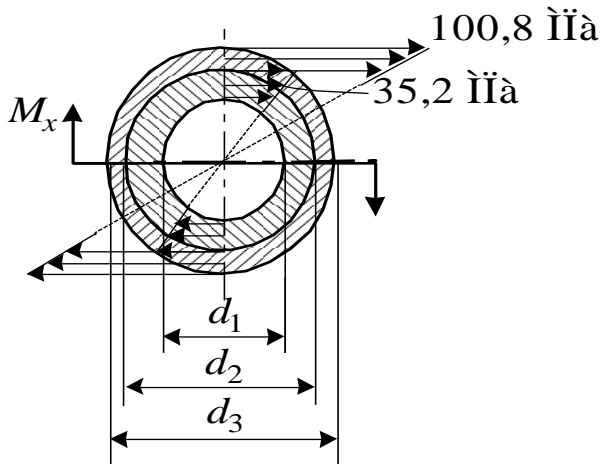
$$\begin{aligned} M_b = M_c - 2M_{кр} &= M_{кр} \frac{a+2b}{a+b+c} - 2M_{кр} = \\ &= -M_{кр} \frac{a+2c}{a+b+c}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Підставляючи у (4.4) значення крутних моментів із (4.3) і (4.5), маємо

$$M_{кр} \frac{a+2b}{a+b+c} = M_{кр} \frac{a+2c}{a+b+c}.$$

Звідси випливає, що рівномірність буде забезпечена, якщо довжини ділянок b і c будуть однаковими, тобто $b = c$.

4.2.3. Зовнішній крутний момент розподіляється між частинами вала. Рівняння рівноваги запишемо:



$$1) \sum M_x = 0,$$

$$M_{ст} + M_M - M_x = 0.$$

Маємо дві невідомі – задача статично невизначна.

Складаємо друге рівняння сумісності деформацій. За умовою відносний поворот дорівнює нулю, тобто відносні кути повороту перерізів однакові:

$$2) \theta_{ст} = \theta_M \text{ або}$$

$$\frac{M_{ст}}{G_{ст} J_{\rho ст}} = \frac{M_M}{G_M J_{\rho М}},$$

Рис. 4.11. До задачі 4.2.3

$$M_{ст} = M_M \frac{G_{ст} J_{\rho ст}}{G_M J_{\rho М}} = M_M \frac{G_{ст}}{G_M} \cdot \frac{\pi d_3^4 \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right) \cdot 32}{32 \pi d_2^4 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right)} =$$

$$= M_M \frac{8 \cdot 10^4}{3,5 \cdot 10^4} \cdot \frac{0,2^4 \left(1 - \left(\frac{0,16}{0,20}\right)^4\right)}{0,16^4 \left(1 - \left(\frac{0,08}{0,16}\right)^4\right)} = 3,51 M_M.$$

З першого рівняння рівноваги $3,51 M_M + M_M = M_x$,

$$M_M = \frac{M_x}{4,51} = \frac{120}{4,51} = 26,60 \text{ кНм.}$$

Отже, $M_{ст} = M_x - M_M = 120 - 26,60 = 93,40 \text{ кНм.}$

Визначимо максимальні напруження в кожній частині вала:

$$\tau_{\max}^M = \frac{M_M}{W_{\rho}^M} = \frac{16 M_M}{\pi d_2^3 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right)} = \frac{16 \cdot 26,6 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,16^3 \left(1 - \left(\frac{0,08}{0,16}\right)^4\right)} \cdot 10^{-6} =$$

$$= 35,2 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{\max}^{\text{ст}} = \frac{M_{\text{ст}}}{W_{\rho}^{\text{ст}}} = \frac{16M_{\text{ст}}}{\pi d_3^3 \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4\right)} = \frac{16 \cdot 93,4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,2^3 \left(1 - \left(\frac{0,16}{0,2}\right)^4\right)} \cdot 10^{-6} = 100,8 \text{ МПа}.$$

Напруження розподіляються за лінійним законом і показані на рис. 4.11.

4.2.4. Вал затиснутий з двох боків. У закріпленнях виникають опорні крутні моменти. Для їхнього визначення можна записати тільки одне рівняння статки $\Sigma M_x = 0$ (рис. 4.12). Отже, задача статично невизначна. Для розкриття статичної невизначності необхідно скласти додаткове рівняння сумісності деформацій. Отже, маємо

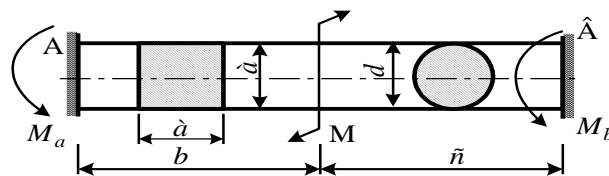


Рис. 4.12. До задачі 4.2.4

$$1) \Sigma M_x = 0, \quad M_a + M_b - M = 0;$$

$$2) \varphi_b = \varphi_c \quad \frac{M_a b}{G J_k} = \frac{M_b c}{G J_{\rho}}, \quad \text{звідки } M_b = M_a \frac{b}{c} \cdot \frac{J_{\rho}}{J_k}.$$

Підставивши в перше рівняння значення M_b , одержимо

$$M_a = \frac{M}{1 + \frac{b}{c} \frac{J_{\rho}}{J_k}}. \quad \text{Тоді} \quad M_b = \frac{M \frac{b}{c} \frac{J_{\rho}}{J_k}}{1 + \frac{b}{c} \frac{J_{\rho}}{J_k}}.$$

Рівноміцними (рівнонебезпечними) ділянки будуть тоді, коли максимальні дотичні напруження в їхніх перерізах будуть однаковими:

$$\tau_{\max}^b = \frac{M_a}{W_k}, \quad \text{де } W_k = \alpha a^3 \text{ — для прямокутного перерізу};$$

$$\tau_{\max}^c = \frac{M_b}{W_{\rho}}, \quad \text{де } W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \text{ — для круглого перерізу}.$$

З умови $\tau_{\max}^b = \tau_{\max}^c$ маємо
$$\frac{M}{\left(1 + \frac{b J_\rho}{c J_k}\right) W_k} = \frac{M \frac{b J_\rho}{c J_k}}{\left(1 + \frac{b J_\rho}{c J_k}\right) W_\rho}.$$

Звідси знайдемо співвідношення між b і c :
$$\frac{b}{c} = \frac{W_\rho}{W_k} \cdot \frac{J_k}{J_\rho}.$$

Підставивши значення W_ρ , W_k , $J_k = \alpha a^4$ і $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$,

одержимо
$$\frac{b}{c} = \frac{\pi d^3}{16\beta a^3} \cdot \frac{\alpha a^4 \cdot 32}{\pi d^4}.$$
 Але $a = d$ і для квадратного перерізу

$\beta = 0,208$, а $\alpha = 0,141$ (див. таблицю на с. 11).

Тоді
$$\frac{b}{c} = \frac{2 \cdot 0,141}{0,208} \approx 1,36.$$

4.2.5. Визначаємо опорні крутні моменти (рис. 4.13). З умови рівноваги

$$1) \Sigma X = 0; \quad M_a + M_b - M_{\text{кр}} = 0.$$

Задача статично невизначна. Складаємо рівняння спільності деформацій – кут закручування на опорі «b» дорівнює нулю:

$$2) \varphi_b = 0.$$

Запишемо це рівняння в явній формі через крутні моменти. З огляду на те, що жорсткість по довжині постійна, позначаємо її умовно $G J_\rho$.

Отже,

$$\frac{M_b (a+b)}{G J_\rho} - \frac{M_{\text{кр}} a}{G J_\rho} = 0.$$

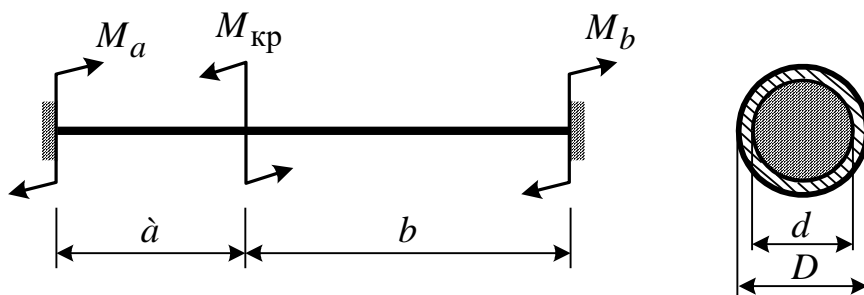


Рис. 4.13. До задачі 4.2.5

Звідси
$$M_b = M_{\text{кр}} \frac{a}{a+b} = M_{\text{кр}} \frac{0,1}{0,1+0,15} = 0,4 M_{\text{кр}},$$

$$а \quad M_a = M_{кр} - M_b = 0,6 M_{кр}.$$

Найбільший момент буде діяти на ділянці «а». Знайдемо розподіл цього моменту між складовими перерізу:

$$\Sigma X = 0, \quad M_c + M_m - 0,6 M_{кр} = 0. \quad (4.6)$$

Оскільки перекручування виключене, їхні відносні кути повороту будуть однаковими: $\theta_{ст} = \theta_m$ або

$$\frac{M_c}{G_c J_\rho^c} = \frac{M_m}{G_m J_\rho^m}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad M_c &= M_m \frac{G_c J_\rho^c}{G_m J_\rho^m} = M_m \frac{G_c}{G_m} \frac{\pi D^4 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] \cdot 32}{32 \pi d^4} = \\ &= M_m \frac{8 \cdot 10^4}{3,5 \cdot 10^4} \cdot \frac{4^4 \cdot 10^{-8} \left[1 - \left(\frac{3,2}{4} \right)^4 \right]}{3,2^4 \cdot 10^{-8}} = 3,3 M_m. \end{aligned}$$

$$\text{З (4.6)} \quad 3,3 M_m + M_m - 0,6 M_{кр} = 0, \quad \text{маємо}$$

$$M_m = \frac{0,6}{4,3} M_{кр} = 0,14 M_{кр}.$$

$$\text{Тоді} \quad M_c = 0,6 M_{кр} - 0,14 M_{кр} = 0,46 M_{кр}.$$

Визначаємо допустиме значення $M_{кр}$ з умови міцності сталевий трубки:

$$\tau_c = \frac{M_c}{W_\rho^c} \leq [\tau]_c, \quad \frac{0,46 M_{кр}}{W_\rho^c} \leq [\tau]_c.$$

Отже,

$$\begin{aligned} [M_{кр}]_c &\leq \frac{W_\rho^c [\tau]_c}{0,46} = \frac{\pi D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] [\tau]_c}{16 \cdot 0,46} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6} (1 - 0,8^4) \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 0,46} = 1,29 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Аналогічно – мідного стержня.

$$\tau_m = \frac{M_m}{W_\rho^m} \leq [\tau]_m, \quad \frac{0,14 M_{кр}}{W_\rho^m} \leq [\tau]_m.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad [M_{кр}]_m &\leq \frac{W_\rho^m [\tau]_m}{0,14} = \frac{\pi d^3 [\tau]_m}{16 \cdot 0,14} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 3,2^3 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 0,14} = 1,84 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Допустиме значення $[M_{кр}]$ для комплексного стержня буде найменшим з двох отриманих, тобто $[M_{кр}] = 1,29 \text{ кНм}$.

4.2.6. При нагріванні стержнів 1 вони збільшують свої довжини і повертають траверсу АВС. Повороту траверси перешкоджає стержень 2, який при цьому відчуває деформацію крутіння (рис. 4.14). У стержнях 1 виникають зусилля R_1 , а в стержні 2 крутний момент $M_{кр}$. Для їхнього визначення можна записати тільки одне рівняння статички. Невідомих же 2, отже, задача статично невизначна і необхідно скласти додаткове рівняння сумісності деформацій:

$$1) \Sigma M_x = 0; \quad M_{кр} - R_1 \cdot 2b = 0;$$

$$2) \Delta_{1r} + \Delta_{1M} = \Delta_{1t},$$

де $\Delta_{1t} = \alpha_1 \ell_1 \Delta t$ – збільшення довжини стержнів 1 від t ;

$$\Delta_{1r} = \frac{R_1 \ell_1}{E_1 A_1} - \text{укорочення довжин стержнів 1 від зусиль } R_1, \text{ що}$$

виникають у них;

$$\Delta_{1M} = \varphi_{кр} b - \text{збільшення довжин стержнів 1 в результаті деформації}$$

кручення стержня 2, а $\varphi_{кр} = \frac{M_{кр} \ell}{G_2 J_k}$ – кут закручування.

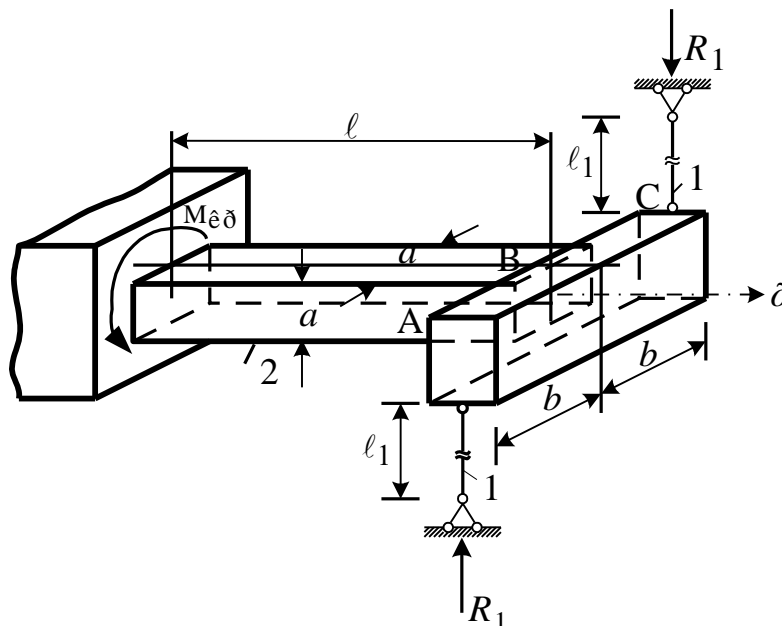


Рис. 4.14. До задачі 4.2.6

З першого рівняння знаходимо $M_{кр} = R_1 \cdot 2b$ і підставляємо в друге з урахуванням значень Δ : $\frac{R_1 \ell_1}{E_1 A_1} + \frac{R_1 2b^2 \ell}{G_2 J_k} = \alpha_1 \ell_1 \Delta t$, звідки

$$R_1 = \frac{\alpha_1 \ell_1 \Delta t}{\frac{\ell_1}{E_1 A_1} + \frac{2b^2 \ell}{G_2 J_k}} = \frac{125 \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-3}}{\frac{400 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{2(100 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 200 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,14 (40 \cdot 10^{-3})^4}} =$$

$$= 2,67 \text{ кН.}$$

Тепер визначаємо необхідне:

$$1. \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{R_1 2b}{0,21 a^3} = \frac{2,67 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{0,21 (40 \cdot 10^{-3})^3} \cdot 10^{-6} = 39,73 \text{ МПа.}$$

$$2. \sigma = -\frac{R_1}{A_1} = -\frac{2,67 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -13,35 \text{ МПа.}$$

$$3. \varphi_{кр} = \frac{M_{кр} \ell}{G_2 J_k} = \frac{R_1 \cdot 2b \ell}{G_2 0,14 a^4} = \frac{2,67 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,14 \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= 0,0037 \text{ рад} = 0,21^\circ.$$

Розділ 5

5.2.1. Побудуємо епюру згинальних моментів у першій балці окремо при дії моменту, а потім – сили (рис. 5.20):

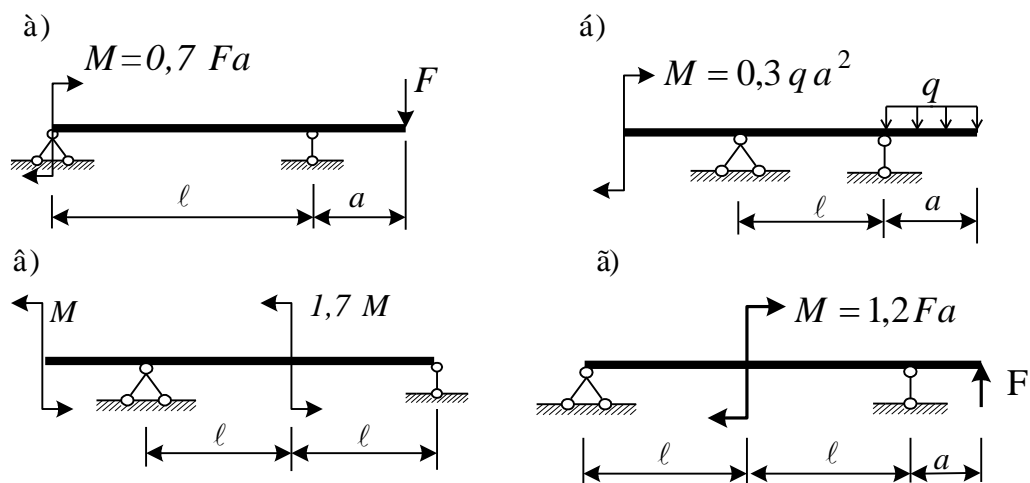


Рис. 5.20. До задачі 5.2.1

а) від моменту $M = 0,7 Fa$ згинальний момент в опорному перерізі лівої опори буде дорівнювати цьому моменту, а на правій опорі і в усіх перерізах консолі згинальні моменти дорівнюють нулю. Між опорами згинальні моменти змінюються по прямій;

б) від сили F згинальний момент на кінці консолі дорівнює нулю і в перерізі над правою опорою Fa . Між ними – змінюється по прямій. На лівій опорі згинальний момент дорівнює нулю. Між лівою і правою опорами згинальні моменти також змінюються по прямій. Тепер складемо ці дві епюри (рис. 5.21).

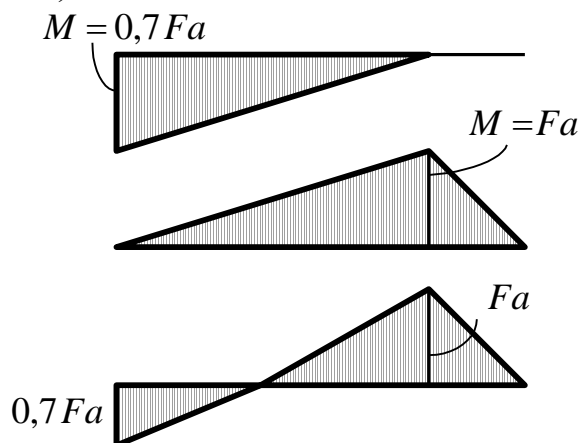


Рис. 5.21. До задачі 5.2.1

У другій балці від моменту згинальні моменти у перерізах нової консолі однакові і дорівнюють цьому моменту. У перерізах правої консолі – дорівнюють нулю. Між опорами – пряма.

Від розподіленого навантаження нулю будуть дорівнювати моменти в перерізах лівої опори. Найбільший момент над правою опорою від розподіленого навантаження $M = -\frac{qa^2}{2}$, на правій консолі епюра моментів – квадратна парабола, між опорами – пряма. Складаємо епюри, наведені на рис. 5.22.

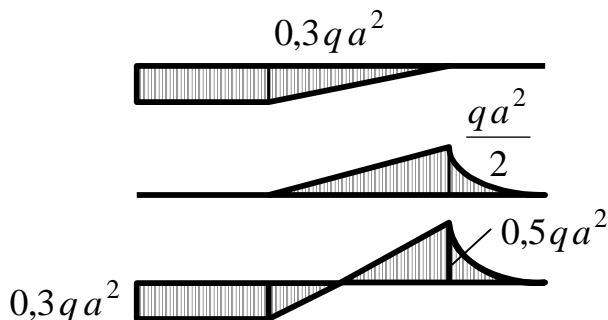


Рис. 5.22. К задаче 5.2.1

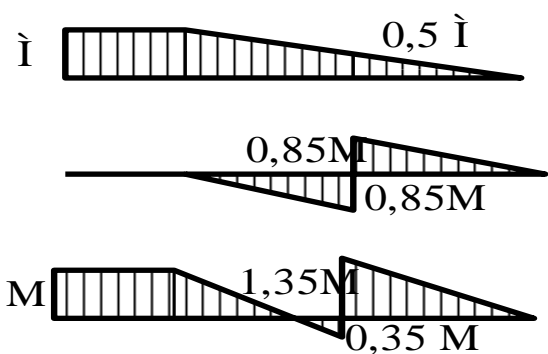


Рис. 5.23. Епюри у третій балці

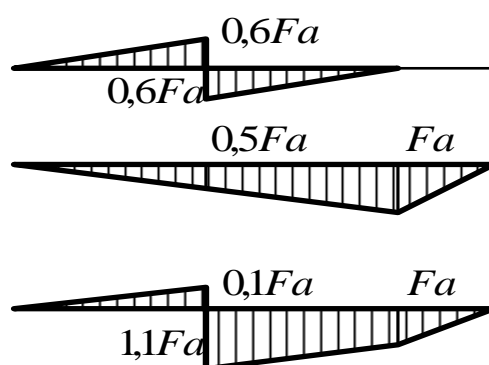
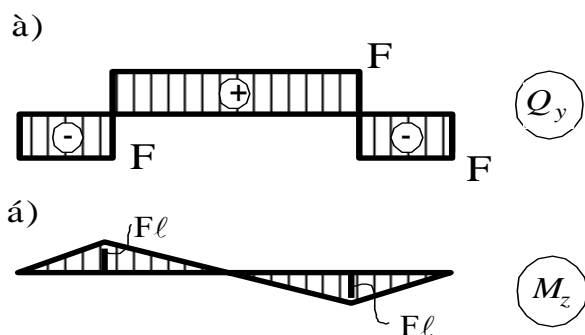


Рис. 5.24. Епюри у четвертій балці

У двох інших балках епюри будуються аналогічно (рис. 5.23, 5.24).

5.2.2. У перерізах, де на епюрі поперечних сил є «стрибки» (кінцеві розриви), повинні діяти зосереджені сили (зовнішні або реакції опор), які дорівнюють величинам кінцевих розривів і спрямовані відповідно до правила знаків Q (рис. 5.25).



Опорні закріплення можуть бути довільними. Наприклад, як на рис. 5.26, а, б, в (рис. 5.26).

Рис. 5.25. До задачі 5.2.2

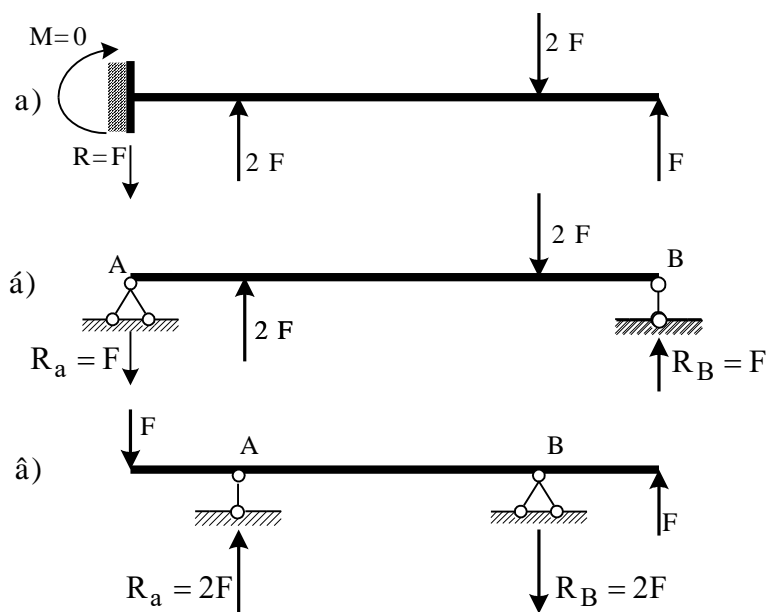


Рис. 5.26. До задачі 5.2.2

5.2.3. Рівнодіюча параболічного розподіленого навантаження $R_q = \frac{2}{3} q_{\max} \ell = \frac{2}{3} q_o \cdot \frac{1}{4} \ell = \frac{q_o \cdot \ell}{6} = \frac{20 \cdot 2}{6} = 6,67 \text{ кН}$ і розташована посередині ділянки АС (рис. 5.27). Знаючи її величину і положення, знайдемо опорні реакції:

$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0, \quad R_b (\ell + a) - R_q \cdot \frac{\ell}{2} = 0, \quad R_b = R_q \frac{\ell}{2(\ell + a)} = \\ = \frac{6,67 \cdot 2}{2(2+1)} = 2,22 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\text{Із } \Sigma Y = 0 \quad R_a = R_q - R_b = 6,67 - 2,22 = 4,45 \text{ кН}.$$

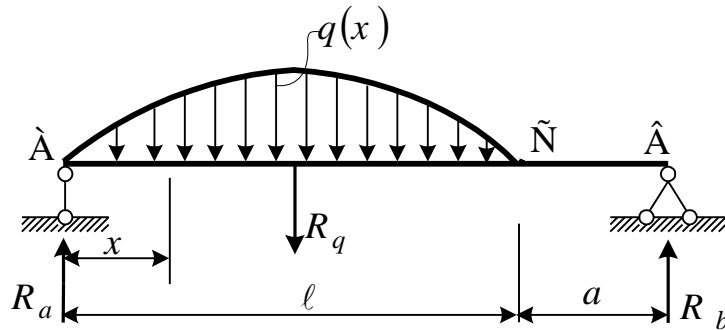


Рис. 5.27. До задачі 5.2.3

Знайдемо функції поперечних сил і згинальних моментів на ділянці АС (рис. 5.28):

1) із $\Sigma Y = 0$

$$\begin{aligned} Q_y = R_a - \int_0^x q(\xi) d\xi = R_a - \int_0^x q_o \left(\frac{\xi}{\ell} - \frac{\xi^2}{\ell^2} \right) d\xi = \\ = R_a - \frac{q_o}{\ell^2} \left(\frac{\xi^2 \ell}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_0^x = R_a - \frac{q_o x^2}{6\ell^2} (3\ell - 2x). \end{aligned}$$

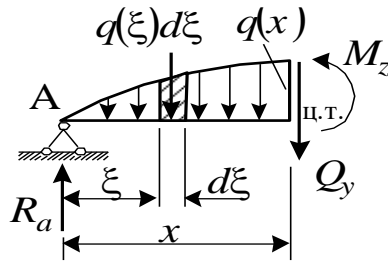


Рис. 5.28. До задачі 5.2.3

Досліджуємо на екстремум:

$$\frac{dQ_y}{dx} = -\frac{q_0}{6l^2} (6xl - 6x^2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = l.$$

Обчислюємо ординати для побудови епюри:

$$\text{при } x = 0, \quad Q_0 = R_a = 4,45 \text{ кН},$$

$$\text{при } x = l/2, \quad Q_{l/2} = R_a - \frac{q_0 l}{12} = 4,45 - \frac{20 \cdot 2}{12} = 1,12 \text{ кН},$$

$$\text{при } x = l, \quad Q_l = R_a - \frac{q_0 l}{6} = 4,45 - \frac{20 \cdot 2}{6} = -2,22 \text{ кН}.$$

На ділянці СВ поперечна сила постійна $Q_b = -R_b = -2,22 \text{ кН}$.

Будуємо епюру Q_y ;

$$2) \text{ із } \Sigma M_{\text{ц.т.}} = 0$$

$$\begin{aligned} M_z &= R_a x - \int_0^x q(\xi)(x - \xi) d\xi = R_a x - \int_0^x q_0 \left(\frac{\xi}{l} - \frac{\xi^2}{l^2} \right) (x - \xi) d\xi = \\ &= R_a x - \frac{q_0}{l^2} \left(\frac{l x \xi^2}{2} - \frac{x \xi^3}{3} - \frac{l \xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{4} \right) \Big|_0^x = \\ &= R_a x - \frac{q_0}{l^2} \left(\frac{l x^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{l x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) = R_a x - \frac{q_0 x^3}{12 l^2} (2l - x). \end{aligned}$$

Знайдемо, насамперед, положення перерізу, де виникає екстремальне значення моменту:

$$\frac{d M_z}{d x} = Q_y = 0, \quad R_a - \frac{q_0 x^2}{6 \ell^2} (3 \ell - 2x) = 0.$$

Якщо розв'язати це алгебраїчне рівняння третього ступеня будь-яким способом, у тому числі можна і способом добору, одержимо $x = 1,226$ м.

Обчислюємо ординати епюри згинальних моментів:

при $x = 0 \quad M_0 = 0,$

при $x = 1,226$ м

$$M_{\max} = 4,45 \cdot 1,226 - \frac{20 \cdot 1,226^3}{12 \cdot 2^2} (2 \cdot 2 - 1,226) = 3,32 \text{ кНм},$$

при $x = \ell \quad M_\ell = 4,45 \cdot 2 - \frac{20 \cdot 2^3}{12 \cdot 2^2} (2 \cdot 2 - 2) = 2,22 \text{ кНм}.$

На опорі В $M_b = 0$, на ділянці СВ момент змінюється за лінійним законом. Епюри M і Q показані на рис. 5.29.

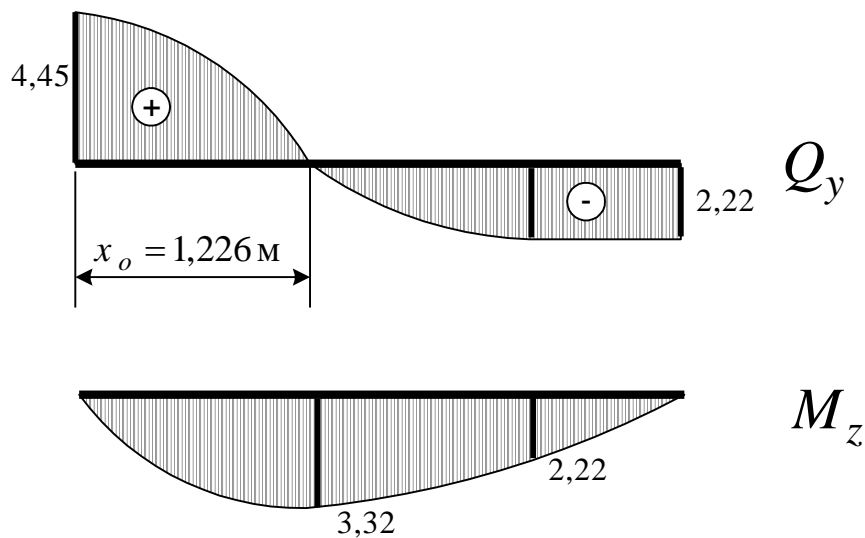
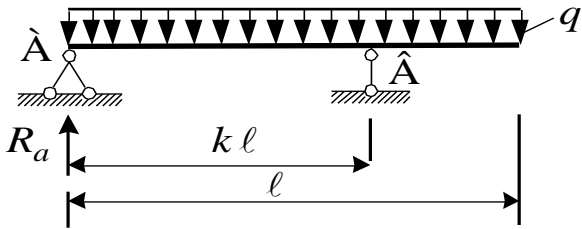


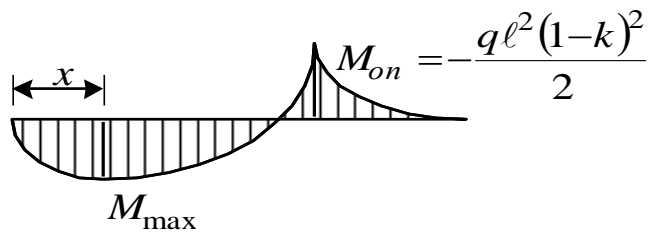
Рис. 5.29. До задачі 5.2.3

5.2.4. У балці при заданому навантаженні епюра моментів буде мати вигляд, показаний на рис. 5.30. При $k \rightarrow 1$ $M_{on} \rightarrow 0$, а $M_{\max} \rightarrow \frac{q \ell^2}{8}$.

а)



а)



При $k \rightarrow 0$

$$M_{on} \rightarrow \frac{q \ell^2}{2}, \text{ а } M_{\max} \rightarrow 0.$$

Отже, найменше значення розрахункового згинального моменту у балці буде виникати при досягненні рівності

$$|M_{\max}| = |M_{on}|.$$

$$|M_{bn}| = \frac{q \ell^2 (1-k)^2}{2}. \text{ Для}$$

визначення M_{\max} знайдемо

Рис. 5.30. До задачі 5.2.4

реакцію R_a . Візьмемо $\Sigma M_b = 0$ $R_a k \ell - q \ell (k \ell - 0,5 \ell) = 0$, звідки

$$R_a = \frac{2k-1}{2k} q \ell.$$

Положення x максимального моменту знайдемо з умови $\frac{dM}{dx} = 0$

або, це те саме, $Q = 0$. Тоді $R_a - q x = 0$ і $x = \frac{R_a}{q} = \frac{2k-1}{2k} \ell$.

$$M_{\max} = R_a x - \frac{q x^2}{2} = q \ell^2 \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 - \frac{q \ell^2}{2} \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 = \frac{q \ell^2}{2} \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2.$$

Прирівняємо опорний і прогоновий моменти і знайдемо «к», при якому розрахунковий згинальний момент буде мати найменше значення.

Отже, $|M_{\max}| = |M_{on}|$, $\frac{q \ell^2}{2} (1-k)^2 = \frac{q \ell^2}{2} \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2$, звідки, якщо

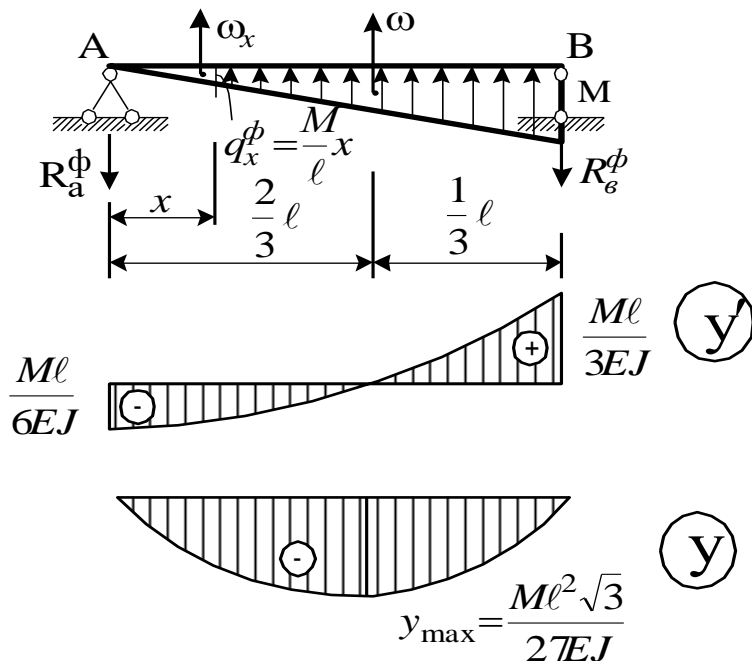
скоротити обидві частини рівності на $\frac{q \ell^2}{2}$ і добути корені квадратні,

одержимо $1-k = \frac{2k-1}{2k}$. Звідси після перенесення на праву сторону і

скорочення, відкинувши знаменник, маємо $2k^2 - 1 = 0$ і, отже,

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

5.2.5. Розв'язати задачу можна, використовуючи різноманітні методи



для визначення переміщень. Застосуємо графоаналітичний метод. Будуємо епюру згинальних моментів і завантажуюмо нею, як фіктивним навантаженням, фіктивну балку. Кут повороту і прогин дійсної балки будуть відповідати фіктивним поперечній силі і згинальному моменту, поділеним на жорсткість при згинанні (рис. 5.31).

Рис. 5.31. До задачі 5.2.5

Згинальний момент у дійсній балці в опорному перерізі В дорівнює зовнішньому моменту, у шарнірі А дорівнює нулю. У проміжку моменти змінюються по прямій лінії.

При шарнірному опиранні дійсної балки фіктивна буде мати такі саме опори. Напрямок фіктивного навантаження q_x^ϕ до осі балки. Визначаємо фіктивну реакцію R_a^ϕ , фіктивне навантаження заміняємо рівнодіючою ω , прикладеною в центрі тяжіння фіктивного навантаження:

$$\Sigma M_b^\phi = 0, \quad R_a^\phi \ell - \omega \frac{\ell}{3} = 0, \quad R_a^\phi = \frac{\omega}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot M = \frac{M \ell}{6}.$$

Записуємо формули для фіктивних поперечної сили і згинального моменту у довільному перерізі:

$$Q_x^\phi = -R_a^\phi + \omega_x = -\frac{M \ell}{6} + \frac{1}{2} \frac{M}{\ell} x \cdot x = -\frac{M \ell}{6} \left(1 - 3 \frac{x^2}{\ell^2} \right).$$

$$M_x^\phi = -R_a^\phi x + \omega_x \frac{x}{3} = -\frac{M \ell}{6} x + \frac{1}{2} \frac{M}{\ell} x^2 \frac{x}{3} = -\frac{M \ell x}{6} \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2} \right).$$

Відповідно кут повороту і прогин будуть визначатись за формулами

$$y'_x = \frac{Q_x^\phi}{EJ} = -\frac{M\ell}{6EJ} \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2}\right); \quad y_x = \frac{M^\phi_x}{EJ} = -\frac{M\ell x}{6EJ} \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right).$$

Знайдемо їх максимальні значення $\frac{dy'_x}{dx} = 0, \quad 6\frac{x}{\ell^2} = 0 \rightarrow x = 0.$

Екстремальне значення функції y'_x при $x = 0$, а найбільше абсолютне значення при $x = \ell \quad y'_\ell = \frac{M\ell}{3}$. Максимальне значення прогину буде в перерізі, де кут повороту $y'_x = 0$,

$$-\frac{M\ell}{6EJ} \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2}\right) = 0, \quad \frac{x}{\ell} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1,732}{3} = 0,577,$$

$$y_{\max} = -\frac{M\ell^2\sqrt{3}}{6 \cdot 3EJ} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{M\ell^2\sqrt{3}}{27EJ}.$$

Варіант розв'язання. Ту саму задачу можна розв'язати, використовуючи для визначення переміщень метод початкових параметрів. Попередньо знайдемо реакцію R_a :

$$\sum M_b = 0, \quad R_a \ell - M = 0, \quad R_a = \frac{M}{\ell}.$$

Тепер запишемо рівняння початкових параметрів для кутів повороту і прогинів балки в довільному перерізі:

$$EJy'_x = EJy'_0 + R_a \frac{x^2}{2!}, \quad (5.1)$$

$$EJy_x = EJy_0 + EJy'_0 x + R_a \frac{x^3}{3!}. \quad (5.2)$$

Перед тим як ними скористаємося, знайдемо значення початкових параметрів із умов закріплення балки:

при $x = 0 \quad y_0 = 0$;

при $x = \ell \quad y_\ell = 0$.

Один параметр уже знайдений – він дорівнює нулю. Для визначення другого скористаємося рівнянням (5.2) і другою граничною умовою.

$EJy'_0 \ell + R_a \frac{\ell^3}{6} = 0$, звідки $EJy'_0 = -\frac{R_a \ell^2}{6} = -\frac{M\ell}{6}$. Тепер рівняння (5.1) і

(5.2) в розгорнутому вигляді будуть такими:

$$EJy'_x = -\frac{M\ell}{6} + \frac{Mx^2}{2\ell} = -\frac{M\ell}{6} \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2}\right),$$

$$EJy_x = -\frac{Mlx}{6} + \frac{Mx^3}{6\ell} = -\frac{Mlx}{6} \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right).$$

Подальше розв'язання співпадає з першим варіантом.

5.2.6. Епюра згинальних моментів має вигляд, показаний на рис. 5.32.

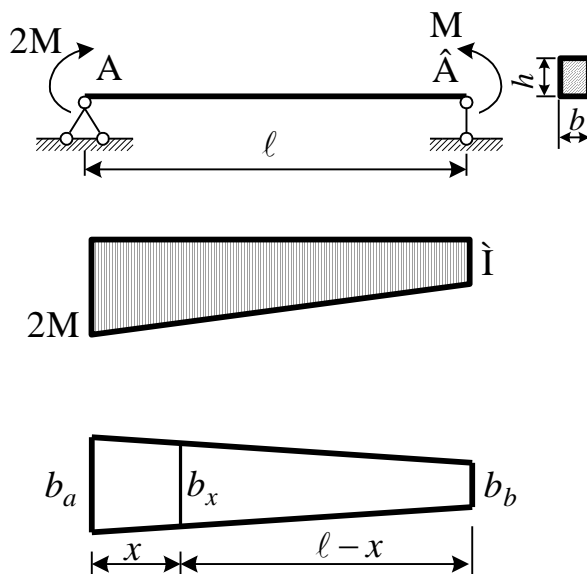


Рис. 5.32. До задачі 5.2.6

Моменти опору в перерізах А і В з умови рівномірності $\frac{2M}{W_a} = [\sigma]$ і $\frac{M}{W_b} = [\sigma]$ будуть $W_a = \frac{b_a h^2}{6}$; $W_b = \frac{b_b h^2}{6}$, тоді $b_a = \frac{12M}{[\sigma]h^2}$ і $b_b = \frac{6M}{[\sigma]h^2}$. Оскільки ширина « b » залежить від M в першому ступені, то закон їх зміни щодо довжини балки буде лінійним:

$$b_x = b_b + \frac{b_a - b_b}{\ell} (\ell - x).$$

5.2.7. При торканні кінцями балки опор А і В кути нахилу, наприклад, α_1 правої консолі і α_2 дотичної до вигнутої осі балки в прогоні будуть $\alpha_1 = \alpha_2$, а отже, будуть дорівнювати $tq \alpha_1$ і $tq \alpha_2$. Але $tq \alpha_1 = \frac{a}{\ell}$, а $tq \alpha_2 = y'$ (рис. 5.33).

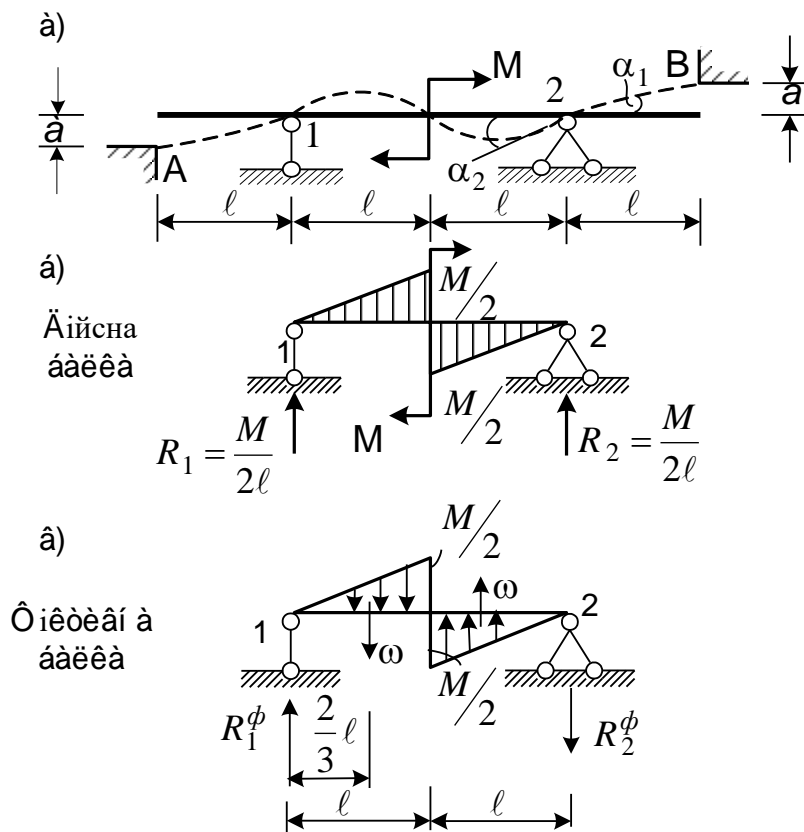


Рис. 5.33. До задачі 5.2.7

Для знаходження y' скористаємося графоаналітичним методом. Побудуємо епюру M в дійсній балці і завантажимо нею фіктивну балку (попередньо відкинувши непрацюючі консолі). Знайдемо фіктивну реакцію R_2^ϕ :

$$\sum M_1^\phi = 0; \quad R_2^\phi \cdot 2l - \omega \left(l + \frac{1}{3}l \right) + \omega \cdot \frac{2}{3}l = 0,$$

$$R_2^\phi = \frac{\omega \cdot \frac{2}{3}l}{2l}; \quad \omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{2} \cdot l = \frac{Ml}{4},$$

$$\text{Тоді } tq \alpha_2 = y' = \frac{Q_2^\phi}{EJ} = \frac{R_2^\phi}{EJ} = \frac{Ml}{12EJ}.$$

З огляду на те, що

$$tq \alpha_1 = tq \alpha_2, \text{ маємо } \frac{M \ell}{12 E J} = \frac{a}{\ell},$$

$$\text{тоді } M = \frac{12 a E J}{\ell^2} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^4 \cdot 20 \cdot 10^{-8}}{400^2 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-3} = 30 \text{ кНм}.$$

5.2.8. Нормальне напруження в перерізі на відстані x від лівого кінця консолі $\sigma_x = \frac{M_x}{W_x}$, де $M_x = F \cdot x$, $W_x = \frac{\pi d_x^3}{32}$ (рис. 5.34).

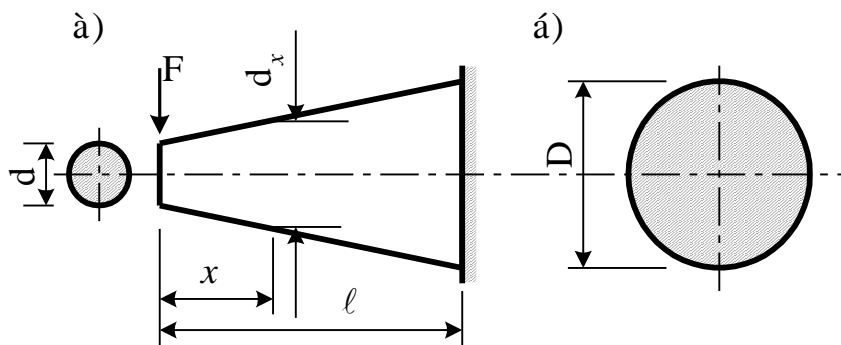


Рис. 5.34. До задачі 5.2.8

Виразимо d_x через d , D і $D/d = 2$:

$$d_x = d + \frac{D-d}{\ell} \cdot x = d \left(1 + \frac{D/d-1}{\ell} \cdot x \right) = d \left(1 + \frac{x}{\ell} \right).$$

Це врахуємо і запишемо $\sigma_x = \frac{32 F x}{\pi d^3 \left(1 + \frac{x}{\ell} \right)^3} = \frac{32 F \ell}{\pi d^3} \cdot \frac{\frac{x}{\ell}}{\left(1 + \frac{x}{\ell} \right)^3}$ або

$$\sigma_\xi = \frac{32 F \ell}{\pi d^3} \cdot \frac{\xi}{(1+\xi)^3}, \text{ де } \xi = \frac{x}{\ell}. \text{ Знайдемо положення перерізу з}$$

максимальним нормальним напруженням і прирівняємо до нуля похідну від σ_ξ :

$$\frac{d \sigma_\xi}{d \xi} = \frac{32 F \ell}{\pi d^3} \cdot \frac{(1+\xi)^3 - 3(1+\xi)^2 \xi}{(1+\xi)^6} = 0.$$

Звідси $(1+\xi)^2 \cdot (1+\xi-3\xi) = 0$ і дійсний корінь $\xi = \frac{x}{\ell} = 0,5$. Тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{32 F \ell}{\pi d^3} \cdot \frac{0,5}{(1 + 0,5)^3} = \frac{32 F \ell}{6,75 \pi d^3}.$$

5.2.9. Вид епюр згинальних моментів і поперечних сил показаний на рис. 5.35. З епюри Q випливає, що поперечні сили в перерізах «к» і «с»

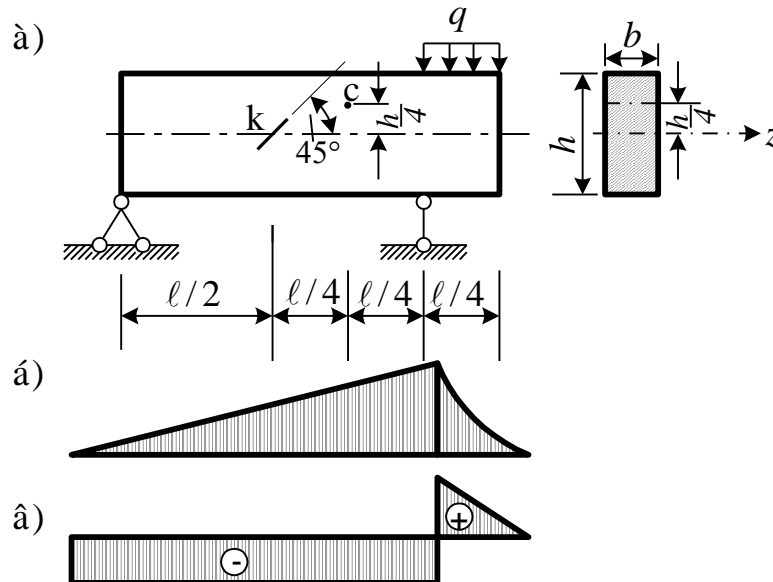


Рис. 5.35. До задачі 5.2.9

однакові. У точці «к» по нейтральній осі бруса виникають тільки дотичні напруження, а нормальні дорівнюють нулю, тобто тут виникає деформація чистого зсуву, де головні напруження нахилені під кутом 45° до нормального перерізу і дорівнюють за величиною дотичним $\sigma_{\text{гл}} = \tau_{\text{max}}$.

За законом Гука $\sigma_{\text{гл}} = \varepsilon_{45^\circ} E$, а $\tau_{\text{max}} = \frac{Q S_z^{0,5}}{b J_z} = \frac{Q \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{b \cdot \frac{b h^3}{12}} = \frac{3Q}{2bh}$.

Звідси знайдемо значення $Q = \frac{2bh \varepsilon_{45^\circ} E}{3}$. Тоді

$$\tau_c = \frac{Q S_z^{0,25}}{b J_z} = \frac{Q b \frac{h}{4} \left(\frac{h}{4} + \frac{h}{8} \right)}{b \frac{b h^3}{12}} = \frac{3 \cdot 12 \cdot Q}{32 \cdot b h} = \frac{9Q}{8bh}. \quad \text{Підставимо сюди}$$

значення Q і одержимо $\tau_c = \frac{3 \varepsilon_{45^\circ} E}{4}$.

5.2.10. Знайдемо положення нейтральної осі (рис. 5.36). Як відомо, вона проходить через центр ваги перерізу. z_1 - вісь, що проведена через основу.

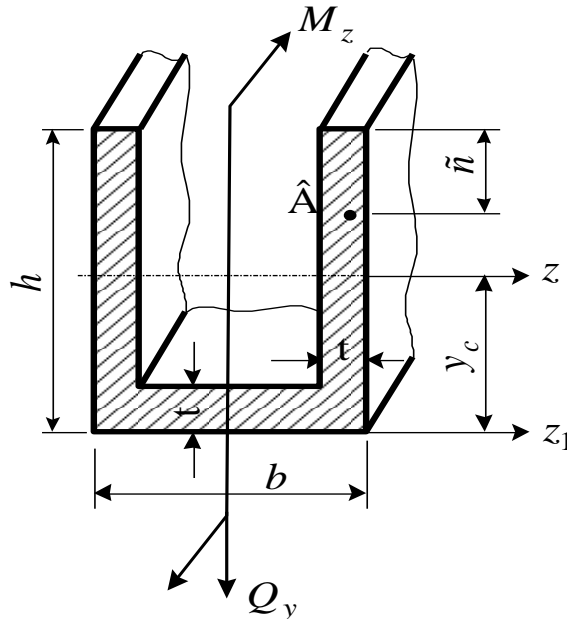


Рис. 5.36. До задачі 5.2.10

Тоді

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{2th \cdot 0,5h + (b-2t)t \cdot 0,5t}{2th + (b-2t)t} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 24 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot 24 \cdot 10^{-2} + (20 - 2 \cdot 4) \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 24 \cdot 10^{-2} + (20 - 2 \cdot 4) \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 14 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Визначимо момент інерції перерізу:

$$J_z = 2 \left(\frac{th^3}{12} + th \left(\frac{h}{2} - y_c \right)^2 \right) + \frac{(b-2t)t^3}{12} + (b-2t)t (y_c - t/2)^2 =$$

$$= 2 \left(\frac{4 \cdot 24^3}{12} + 4 \cdot 24 (12 - 14)^2 \right) \cdot 10^{-8} + \frac{(20 - 2 \cdot 4) \cdot 4^3}{12} \cdot 10^{-8} +$$

$$+ (20 - 2 \cdot 4) \cdot 4 (14 - 2)^2 \cdot 10^{-8} = 15328 \cdot 10^{-8} + 64 \cdot 10^{-8} + 6912 \cdot 10^{-8} =$$

$$= 22304 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Нормальні напруження в точці В

$$\sigma_b = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{34 \cdot 10^3 \cdot (24 - 14 - 5) \cdot 10^{-2}}{22304 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 7,6 \text{ МПа.}$$

Знайдемо статичний момент площі перетину, розташований вище точки В:

$$S_z^{\text{отс}} = 2 t c \left(h - y_c - \frac{c}{2} \right) = 2 \cdot 4 \cdot 5 (24 - 14 - 2,5) \cdot 10^{-6} = 300 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Дотичні напруження в точці В

$$\tau_b = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{\delta J_z} = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 22304 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 0,047 \text{ МПа.}$$

5.2.11. Задача статично невизначна: $n = C_o - 3 = 4 - 3 = 1$ (рис. 5.37).

Під дією реакції R_c балка і понтон одержать переміщення

$$y_r = \frac{R_c \ell^3}{48 E J} + \frac{R_c}{S_n \gamma}.$$

переміщення середини
балки від зосередженої
сили

переміщення понтона
(γ – об'ємна вага води)

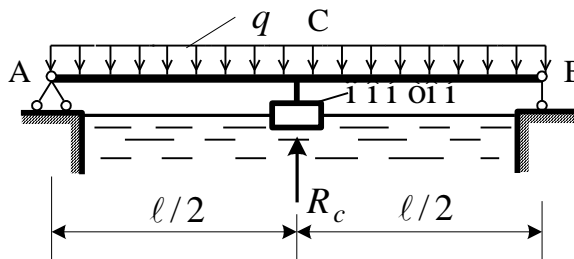


Рис. 5.37. До задачі 5.2.11

Під дією рівномірно розподіленого навантаження балка прогнеться і прогин, як відомо, посередині її буде дорівнювати $y_q = -\frac{5 q \ell^4}{384 E J}$.

З умови нерозривності деформацій сума цих переміщень дорівнює нулю $y_r + y_q = 0$. З цього рівняння одержимо формулу для визначення реакції R_c :

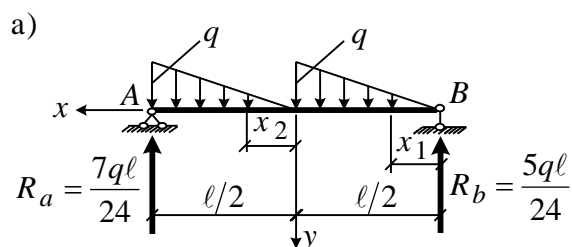
$$R_c \left(\frac{\ell^3}{48 E J} + \frac{1}{S_n \gamma} \right) - \frac{5 q \ell^4}{384 E J} = 0, \quad R_c = \frac{5 q \ell^4}{384 E J \left(\frac{\ell^3}{48 E J} + \frac{1}{S_n \gamma} \right)}.$$

Але відповідно до умови задачі $R_c = 0,25 q \ell$. Підставимо це значення

у формулу для R_c і знайдемо необхідну величину площі понтона S_{Π} :

$$S_{\Pi} = \frac{32EJ}{\gamma \ell^3}.$$

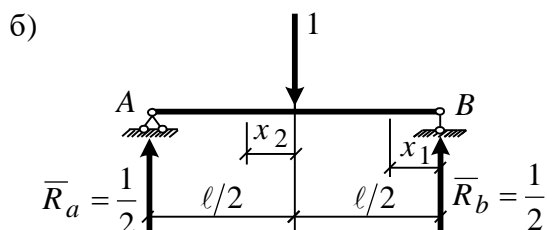
5.2.12. Для визначення прогину посередині балки скористаємося методом безпосереднього інтегрування наближеного диференціального рівняння вигнутої осі балки. Маємо дві ділянки (рис. 5.38, а). За початок координат ділянок приймаємо праві крайні їхні точки. Позитивний напрямок осей x для обох ділянок – уліво. Осі y – униз.



Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_a = 0$$

$$R_b \ell - \frac{1}{2} \frac{q\ell}{2} \left(\frac{\ell}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} = 0.$$



Звідки $R_b = \frac{5q\ell}{24}$.

$$\sum y = 0 \quad R_a - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} + R_b = 0,$$

$$R_a = \frac{7q\ell}{24}.$$

Рис. 5.38. До задачі 5.2.12

Записуємо наближені диференціальні рівняння по ділянках й інтегруємо їх:

ділянка 1. $0 \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2}$:

$$EJy_1'' = -\frac{5q\ell}{24}x_1 + \frac{2q}{\ell}x_1 \cdot \frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{1}{3}x_1 = -\frac{5q\ell}{24}x_1 + \frac{qx_1^3}{3\ell},$$

$$EJy_1' = -\frac{5q\ell}{48}x_1^2 + \frac{qx_1^4}{12\ell} + C_1,$$

$$EJy_1 = -\frac{5q\ell}{144}x_1^3 + \frac{qx_1^5}{60\ell} + C_1x_1 + D_1;$$

ділянка 2. $0 \leq x_2 \leq \frac{\ell}{2}$:

$$EJy_2'' = -\frac{5ql}{24}\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) + \frac{1}{2}q \cdot \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + x_2\right) + \frac{qx_2^3}{3\ell} = -\frac{3ql^2}{48} + \frac{ql}{24}x_2 + \frac{qx_2^3}{3\ell},$$

$$EJy_2' = \frac{3ql^2}{48}x_2 - \frac{ql}{48}x_2^2 - \frac{qx_2^4}{12\ell} + C_2,$$

$$EJy_2 = \frac{3ql^2}{96}x_2^2 - \frac{ql}{144}x_2^3 - \frac{qx_2^5}{60\ell} + C_2x_2 + D_2.$$

Визначаємо довільні постійні із граничних умов на кінцях ділянок:

- 1) при $x_1 = 0$ $y_1 = 0$; 2) при $x_1 = \frac{\ell}{2}$ $y_1' = y_2'$; 3) при $x_2 = 0$ $y_1 = y_2$;
4) при $x_2 = \frac{\ell}{2}$ $y_2 = 0$.

1) $D_1 = 0$;

$$2) -\frac{5ql}{48} \cdot \frac{\ell^2}{4} + \frac{ql^4}{12 \cdot 16\ell} + C_1 = C_2, \quad C_2 - C_1 = -\frac{ql^3}{48};$$

$$3) -\frac{5ql}{144} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{ql^5}{60 \cdot 32\ell} + C_1 \frac{\ell}{2} = D_2;$$

$$D_2 - C_1 \frac{\ell}{2} = -\frac{11ql^4}{192 \cdot 3 \cdot 5};$$

$$4) -\frac{3ql^2}{96} \cdot \frac{\ell^2}{4} + \frac{ql}{144} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{ql^5}{60 \cdot 32\ell} + C_2 \frac{\ell}{2} + D_2 = 0;$$

$$D_2 + C_2 \frac{\ell}{2} = \frac{37ql^4}{384 \cdot 15}.$$

Розв'язуючи спільно ці рівняння, одержуємо

$$C_1 = +\frac{119ql^3}{5760}, \quad C_2 = -\frac{ql^3}{5760}, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{5ql^3}{768}.$$

Шуканий прогин посередині балки знайдемо з рівняння прогинів для другої ділянки при $x_2 = 0$:

$$EJf = D_2,$$

або

$$f = \frac{D_2}{EJ} = + \frac{5q\ell^3}{768EJ}.$$

Варіант розв'язання.

Застосуємо метод Мора для визначення прогину, для чого необхідно записати функції M і \bar{M}_1 для двох ділянок і взяти інтеграл або обчислити його за формулою Верещагіна:

$$f = \sum \int \frac{M\bar{M}_1 dx}{EJ} = \sum \frac{\omega y_c}{EJ}.$$

Запишемо функції згинальних моментів для двох ділянок. Початок осей приймаємо на правій опорі та посередині прогону, направляючи осі вліво:

$$M^I = \frac{5q\ell}{24}x_1 - \frac{qx_1^3}{3\ell}; \quad \bar{M}_1^I = \frac{1}{2}x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2};$$

$$\begin{aligned} M^{II} &= \frac{5q\ell}{24}\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) - \frac{1}{2}q \cdot \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{2} + x_2\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{\ell}x_2 \cdot x_2 \cdot \frac{1}{3}x_2^2 = \\ &= \frac{3q\ell^2}{48} - \frac{q\ell}{24}x_2 - \frac{qx_2^3}{3\ell}; \end{aligned}$$

$$\bar{M}_1^{II} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2} + x_2\right) - 1 \cdot x_2 = \frac{\ell}{4} - \frac{x_2}{2}; \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{\ell}{2}.$$

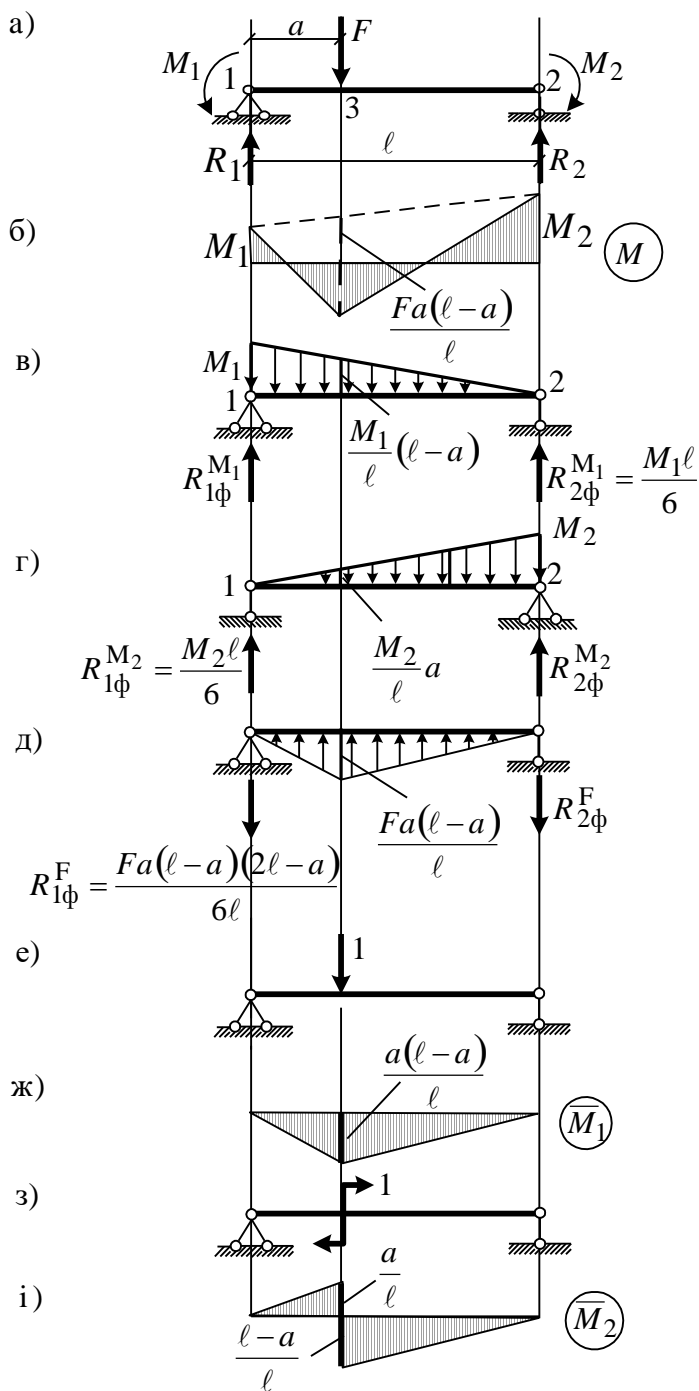
Підставляємо їх в інтеграл Мора:

$$f = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{5q\ell}{24}x_1 - \frac{qx_1^3}{3\ell} \right) \frac{1}{2}x_1 dx_1 + \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{3q\ell^2}{48} - \frac{q\ell}{24}x_2 - \frac{qx_2^3}{3\ell} \right) x dx$$

$$x \left(\frac{\ell}{4} - \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{3q\ell^3}{192} - \frac{q\ell^2}{24}x + \frac{q\ell}{8}x^2 - \frac{qx^3}{12} \right) dx = \frac{5q\ell^4}{768EJ}.$$

Цей варіант розв'язання трохи коротше від першого.

5.2.13.



Отже, M_1 -?, M_2 -?
 за умови $y'_3 = 0$;
 $y_3 = 0$. Таким чином,
 необхідно одержати
 вирази для кута
 повороту і прогину в
 точці 3 від M_1 , F і
 M_2 , прирівняти їх до
 нуля та знайти
 значення M_1 і M_2 .
 Для визначення
 переміщень при
 вигині можна
 застосувати три
 методи:
 1. Метод початкових
 параметрів.
 2. Графо-аналітичний
 метод.
 3. Метод Мору з обчисленням інтегралів за допомогою способу Верещагіна або Сімпсона-Корноухова.
 Покажемо, як розв'язати подану задачу, використовуючи кожен із цих методів. Проаналізуємо і встановимо, при якому із них мета досягається з меншою витратою часу.

Рисунок 5.39. До задачі 5.2.13

1. *Метод початкових параметрів.* Тут спочатку необхідно визначити всі сили (активні й реактивні), що діють на балку. Визначаємо реакції опор. Для застосування методу початкових параметрів досить визначити одну – ліву, R_1 (рис. 5.39, а). Складаємо рівняння рівноваги $\sum M_2 = 0$:

$$R_1 \ell - M_1 - F(\ell - a) + M_2 = 0, \text{ звідки } R_1 = \frac{M_1 - M_2}{\ell} + \frac{F(\ell - a)}{\ell}.$$

Записуємо рівняння методу початкових параметрів для кутів повороту і прогинів з обліком тільки наявних видів навантажень (M і F):

$$EJy' = EJy'_0 + \frac{M_1 x}{1!} - \frac{R_1 x^2}{2!} \Big|_I + \frac{F(x-a)^2}{2!} \Big|_{II},$$

$$EJy = EJy_0 + EJy'_0 x + \frac{M_1 x^2}{2!} - \frac{R_1 x^3}{3!} \Big|_I + \frac{F(x-a)^3}{3!} \Big|_{II}.$$

Визначаємо початкові параметри з умов закріплення балки:

1) при $x = 0$ $y = y_0 = 0$;

2) при $x = \ell$ $y_\ell = 0$.

З першої умови параметр $y_0 = 0$. Початковий параметр y'_0 знайдемо із другої умови:

$$EJy'_0 \ell + \frac{M_1 \ell^2}{2!} - \frac{R_1 \ell^3}{3!} + \frac{F(\ell - a)^3}{3!} = 0,$$

звідки $EJy'_0 = -\frac{M_1 \ell}{2} + \frac{R_1 \ell^2}{6} - \frac{F(\ell - a)^3}{6\ell}$.

Записуємо умови для визначення моментів M_1 і M_2 :

1) $y'_3 = 0$, $\frac{M_1 \ell}{2} - \frac{R_1 \ell^2}{6} + \frac{F(\ell - a)^3}{6\ell} - M_1 a + \frac{R_1 a^2}{2} = 0$,

2) $y_3 = 0$, $\frac{M_1 a \ell}{2} - \frac{R_1 a \ell^2}{6} + \frac{F a (\ell - a)^3}{6\ell} - \frac{M_1 a^2}{2} + \frac{R_1 a^3}{6} = 0$.

Заміняємо R_1 її значенням, групуємо члени з M_1 , M_2 і F і, розв'язуючи рівняння, одержуємо

$$M_1 = M_2 = \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell}.$$

2. *Графоаналітичний метод.* Користуючись принципом незалежності дії сил будуємо три епюри (рис. 5.39, в, г, д) і завантажуюмо ними, як фіктивними навантаженнями, фіктивні балки (вони з такими саме опорними закріпленнями, як і дійсні). Визначаємо по одній реакції від кожного навантаження у балках (рис. 5.39, в – праву $R_{2\phi}^{M_1}$, рис. 5.39, г – ліву $R_{1\phi}^{M_2}$ і рис. 5.39, д – ліву $R_{1\phi}^F$):

$$\sum M_1 = 0; \quad \frac{1}{2} M_1 \ell \cdot \frac{1}{3} \ell - R_{2\Phi}^{M_1} \ell = 0, \quad R_{2\Phi}^{M_1} = \frac{M_1 \ell}{6};$$

$$\sum M_2 = 0; \quad \frac{1}{2} M_2 \ell \cdot \frac{1}{3} \ell - R_{1\Phi}^{M_2} \ell = 0, \quad R_{1\Phi}^{M_2} = \frac{M_2 \ell}{6};$$

$$\sum M_2 = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{Fa(\ell - a)}{\ell} \cdot \ell \cdot \frac{0 + \ell - a + \ell}{3} - R_{1\Phi}^F \ell = 0;$$

$$R_{1\Phi}^F = \frac{Fa(\ell - a)(2\ell - a)}{6\ell}.$$

Кут повороту дотичної у точці 3 балки за графоаналітичним методом визначається за формулою $y'_3 = \frac{Q_{3\Phi}}{EJ}$, а прогин $y_3 = \frac{M_{3\Phi}}{EJ}$. Тоді, помноживши ліві й праві частини цих формул на EJ і знайшовши $Q_{3\Phi}$ та $M_{3\Phi}$ від кожного з навантажень, складаючи їх, будемо мати

$$EJy'_3 = -\frac{M_1 \ell}{6} + \frac{1}{2} \frac{M_1(\ell - a)^2}{\ell} + \frac{M_2 \ell}{6} - \frac{1}{2} \frac{M_2 a^2}{\ell} - \frac{Fa(\ell - a)(2\ell - a)}{6\ell} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{Fa^2(\ell - a)}{\ell} = \frac{M_1}{6\ell} (2\ell^2 - 6a\ell + 3a^2) + \frac{M_2}{6\ell} (\ell^2 - 3a^2) + \frac{Fa(\ell - a)(2a - \ell)}{3\ell};$$

$$EJy_3 = \frac{M_1 \ell}{6} (\ell - a) - \frac{M_1(\ell - a)^2}{2\ell} \cdot \frac{1}{3} (\ell - a) + \frac{M_2 \ell}{6} a - \frac{M_2 a^2}{2\ell} \cdot \frac{a}{3} -$$

$$- \frac{Fa^2(\ell - a)(2\ell - a)}{6\ell} + \frac{Fa^2(\ell - a)}{2\ell} \cdot \frac{1}{3} a = \frac{M_1 a(\ell - a)}{6\ell} (2\ell - a) +$$

$$+ \frac{M_2 a(\ell - a)}{6\ell} (\ell + a) - \frac{Fa^2(\ell - a)^2}{3\ell}.$$

Відповідно до умови задачі необхідно знайти значення M_1 та M_2 , при яких $y'_3 = 0$ і $y_3 = 0$. Прирівняємо праві частини цих виразів до нуля й одержимо два рівняння, з яких знайдемо M_1 і M_2 (див. розв'язання за методом початкових параметрів).

3. *Метод Мора.* Необхідно побудувати вантажну епюру моментів від моментів M_1 , M_2 і сили F (рис. 5.39, б) і одиничні – від одиничних сили та моменту, прикладених у перерізі 3, для якого необхідно визначити прогин (рис. 5.39, е, ж) і кут повороту (рис. 5.39, и, к). Якщо спряжити

епюри M з \bar{M}_1 і M з \bar{M}_2 , одержимо вирази для визначення опорних моментів M_1 і M_2 . Використаємо для спрощення принцип суперпозиції. Епюра M (рис. 5.39, б) складається із трьох (див. рис. 5.39, в, г, д).

$$\begin{aligned}
 y_3 = \Delta_{1f} &= \sum \int \frac{M\bar{M}_1 dx}{EJ} = \sum \frac{\omega y_c}{EJ} = -\frac{a^2(\ell - a)}{2\ell EJ} \left[\frac{1}{3} M_1 + \frac{2M_1(\ell - a)}{3\ell} \right] - \\
 &- \frac{a(\ell - a)^2}{2\ell EJ} \cdot \frac{2M_1(\ell - a)}{3\ell} - \frac{a^2(\ell - a)}{2\ell EJ} \cdot \frac{2M_2 a}{3\ell} - \frac{a(\ell - a)^2}{2\ell EJ} \left(\frac{2M_2 a}{3\ell} + \frac{M_2}{3} \right) + \\
 &+ \frac{a^2(\ell - a)}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell EJ} + \frac{a(\ell - a)^2}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell EJ} = \\
 &= -\frac{a(\ell - a)}{6\ell EJ} [M_1(2\ell - a) + M_2(\ell + a) - 2Fa(\ell - a)].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'_3 = \Delta_{2f} &= \sum \int \frac{M\bar{M}_2 dx}{EJ} = \sum \frac{\omega y_c}{EJ} = \frac{a^2}{2\ell EJ} \left\{ M_1 \left[\frac{2(\ell - a)}{3\ell} + \frac{1}{3} \right] \right\} - \\
 &- \frac{(\ell - a)^2}{2\ell} \cdot \frac{2M_1[\ell - a]}{3\ell EJ} + \frac{a^2}{2\ell} \cdot \frac{2M_2 a}{3\ell EJ} - \frac{(\ell - a)^2}{2\ell EJ} \left[\frac{2M_2 a}{3\ell} + \frac{M_2}{3} \right] - \\
 &- \frac{a^2}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell EJ} + \frac{(\ell - a)^2}{2\ell} \cdot \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell EJ} = \\
 &= -\frac{1}{6\ell EJ} [M_1(2\ell^2 - 6a\ell + 3a^2) + M_2(\ell^2 - 3a^2) - 2Fa(\ell - a)(\ell - 2a)].
 \end{aligned}$$

Якщо прирівняти y'_3 і y_3 до нуля й скоротити на множники перед квадратними дужками, одержимо аналогічні, як і раніше, рівняння відносно невідомих M_1 і M_2 , а також і їх вирази у функції від F .

Аналізуючи застосування трьох методів для розв'язання поставленої задачі, можна зробити такі висновки:

1. Застосовувати той метод, яким розраховувач володіє найбільшою мірою.

2. Якщо всі три методи можуть бути застосовані без ускладнення, необхідно зупинитися на тому, який швидше приводить до мети. У цьому випадку – це графоаналітичний метод.

3. Варто подумати, а чи не існує ще якогось підходу, за допомогою якого задача може бути розв'язана ще швидше.

4. Застосування принципу незалежності дії сил, або інакше принципу суперпозиції, істотно спрощує розв'язання.

5.2.14. Силу F_1 , при якій відбудеться зіткнення трубчастої консольної балки із суцільним стержнем, знайдемо з умови (рис. 5.40)

$$\frac{F_1 \ell^3}{3E J_6} + \frac{5F_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{2 \cdot 3E J_6} = D - 2t - d, \quad (5.3)$$

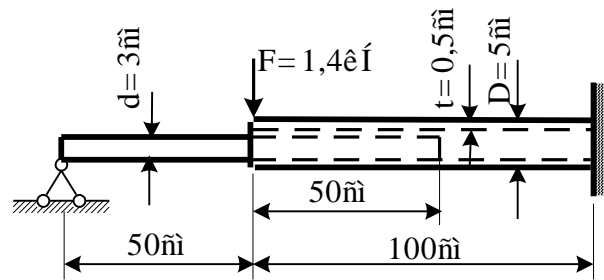


Рис. 5.40. До задачі 5.2.14

де перший доданок – прогин кінця трубчастої балки, другий – половина прогину середини трубчастої балки, на величину якого опуститься середина стержня, де відбудеться зіткнення. Різниця між діаметром стержня (d) і діаметром отвору (d_1) труби дорівнює 1 см.

З (5.3) випливає

$$F_1 = \frac{2 \cdot 3E J_6}{2 \ell^3 + 5 \left(\frac{\ell}{2}\right)^3} \cdot (D - 2t - d), \quad (5.4)$$

де $E = 2 \cdot 10^5$ МПа ; $\ell = 100$ см.

$$J_6 = \frac{\pi (D^4 - d_1^4)}{64} = \frac{3,1416 (5^4 - 4^4)}{64} = 18 \text{ см}^3.$$

Тоді

$$F_1 = \frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-8}}{21 \cdot 100^3 \cdot 10^{-6}} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 0,823 \text{ кН.}$$

Розподіл залишкової сили $F - F_1 = F_2$ між балкою і стержнем знайдемо з рівності спільного прогину:

$$f_\sigma = f_c, \quad (5.5)$$

Прогин кінця консольної балки буде відбуватися в результаті вигину її від сили F_σ , прикладеної на кінці, і сили $F_c/2$ – у середині (у точці опирання на неї правим кінцем стержня).

Прогин середини стержня виникає від сили F_c в середині стержня,

що опирається на дві опори, від опускання правого кінця стержня в результаті прогину середини консольної балки від F_{δ} , а також і від $F_c/2$ на кінці стержня. Одержимо вирази для прогину на кінці консолі від сили, прикладеної в середині неї (рис. 5.41). Скористаємося методом початкових параметрів.

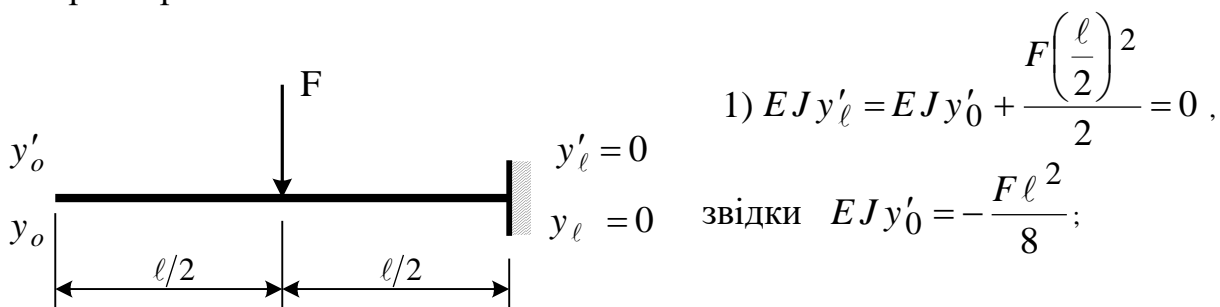


Рис. 5.41. До задачі 5.2.14

$$1) EJy'_l = EJy'_0 + \frac{F\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = 0,$$

$$\text{звідки } EJy'_0 = -\frac{F\ell^2}{8};$$

$$2) EJy_l = EJy_0 + EJy'_0 + \frac{F\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} = 0,$$

$$\text{звідки } EJy_0 = \frac{5F\ell^3}{48}.$$

$$\text{Абсолютне значення прогину кінця консолі } y = y_0 = \frac{5F\ell^3}{48EJ}. \quad (5.6)$$

Якщо знаємо цей вираз, а також вирази для прогину кінця консолі від сили на кінці і прогину в середині балки від сили в середині, розкриємо рівність (5.5):

$$\frac{F_{\delta}\ell^3}{3EJ_{\delta}} + \frac{5\frac{F_c}{2}\ell^3}{48EJ_{\delta}} = \frac{F_c\ell^3}{48EJ_c} + \frac{1}{2}\frac{5F_{\delta}\ell^3}{48EJ_{\delta}} + \frac{1}{2}\frac{F_c}{3EJ_{\delta}}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3.$$

Примітка. Якщо в пам'яті ці вирази не збереглися, їх можна легко одержати, застосовуючи або метод початкових параметрів, або графоаналітичний метод.

$$\text{Отже, } F_{\delta} = \frac{2}{27}\left(\frac{J_{\delta}}{J_c} - 2\right)F_c, \quad (5.7)$$

$$\text{де } \frac{J_{\delta}}{J_c} = \frac{\pi[D^4 - (D-2t)^4]64}{64\pi d^4} = \frac{D^4 - (D-2t)^4}{d^4}.$$

Тоді

$$F_{\delta} = \frac{2}{27}\left[\frac{D^4 - (D-2t)^4}{d^4} - 2\right]F_c = \frac{2}{27}\left(\frac{5^4 - 4^4}{3^4} - 2\right)F_c,$$

$$\text{або } F_{\delta} = \frac{46}{243}F_c.$$

Але

$$F_6 + F_c = F_2 = F - F_1 = 1,4 - 0,823 = 0,577 \text{ кН},$$

звідки

$$\frac{46}{243} F_c + F_c = 0,577 \text{ кН}, \quad F_c = \frac{0,577 \cdot 243}{289} = 0,485 \text{ кН}, \quad \text{а } F_6 = 0,092 \text{ кН}.$$

Визначимо найбільші напруження:

а) у стержні

$$\sigma_c = \frac{M_c^{\max}}{W_c} = \frac{F_c \ell}{4 W_c} = \frac{0,485 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 32}{4 \pi \cdot 3^3 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 45,7 \text{ МПа};$$

б) у трубчастій балці

$$\sigma_6 = \frac{(F_1 + F_6) \ell + \frac{F_c \ell}{4}}{W_6} = \frac{\left(0,915 \cdot 1 \cdot 10^3 + \frac{0,485 \cdot 1}{4} \cdot 10^3\right) D \cdot 64}{2 \pi [D^4 - (D - 2t)^4]} =$$

$$= \frac{1,036 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 64}{2 \cdot 3,1416 (5^4 - 4^4) \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 143,0 \text{ МПа}$$

(без стержня – 193,2 МПа).

Визначаємо максимальний прогин системи:

$$f = \frac{(F_1 + F_6) \ell^3}{3 E J_6} + \frac{5 F_c \cdot \ell^3}{2 \cdot 48 E J_6} = \frac{\ell^3}{96 E J_6} [32 (F_1 + F_6) + 5 F_c] =$$

$$= \frac{1^3 [32 (0,823 + 0,092) + 5 \cdot 0,485] \cdot 10^3}{96 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^2 \approx 0,92 \text{ см}$$

(без стержня – 1,30 см).

5.2.15. Розглянемо спочатку умову контакту балки і жорсткої основи

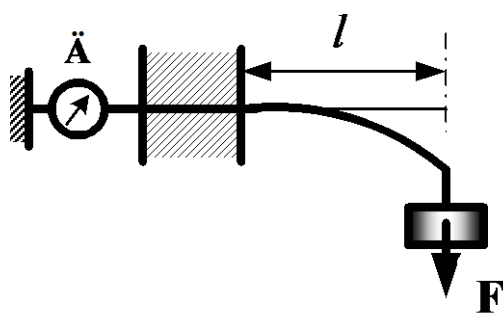


Рис. 5.42. До задачі 5.2.15

за наявності малого зазора (рис. 5.42). Нехай величина зазора буде Δ . У лівій частині балка залишається прямою і щільно прилягає до верхньої поверхні отвору. У точці відриву балки від цієї поверхні виникає реакція. Величина плеча «а» залишається поки що невизначеною (рис. 5.43).

На виході бруса з отвору виникає реакція B , спрямована за відсутності сил тертя по нормалі до поверхні балки. Оскільки кут відхилення цієї сили від вертикалі малий, то

$$B = F + A = F \left(1 + \frac{\ell}{a} \right).$$

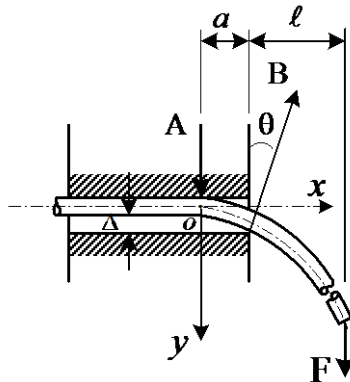


Рис. 5.43. До задачі 5.2.15

Прийmemo точку «О» за початок відліку переміщень. При $x = a$ вертикальне переміщення балки дорівнює Δ :

$$\Delta = \frac{A a^3}{6 E J} = \frac{F \ell a^2}{6 E J}, \quad \text{звідки} \quad a = \sqrt{\frac{6 E J \Delta}{F \ell}}.$$

Знайдемо кут повороту θ :

$$\theta = \frac{A a^2}{2 E J} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F \ell}{E J}} 6 \Delta.$$

Зі зменшенням зазору Δ кут θ і величина "a" будуть прагнути до нуля, а сили A і B необмежено зростають. Подивимось, як змінюється при цьому горизонтальна складова сили B:

$$B \theta = F \left(1 + \frac{\ell}{a} \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F \ell}{E J}} 6 \Delta,$$

або

$$B \theta = \frac{F}{2} \left(\frac{F \ell^2}{E J} + \sqrt{\frac{F \ell}{E J}} 6 \Delta \right).$$

Як бачимо, при $\Delta \rightarrow 0$ горизонтальна складова сили B прагне до визначеної межі $B \theta = \frac{F^2 \ell^2}{2 E J}$. Це значення сили і покаже динамометр.

5.2.16. Маса погонного метра двотавра № 20 дорівнює $q = 21$ кг/м. Після прикладання сили $F = \frac{q\ell}{4}$ середня частина балки підніметься на деякій довжині ℓ_0 (рис. 5.44).

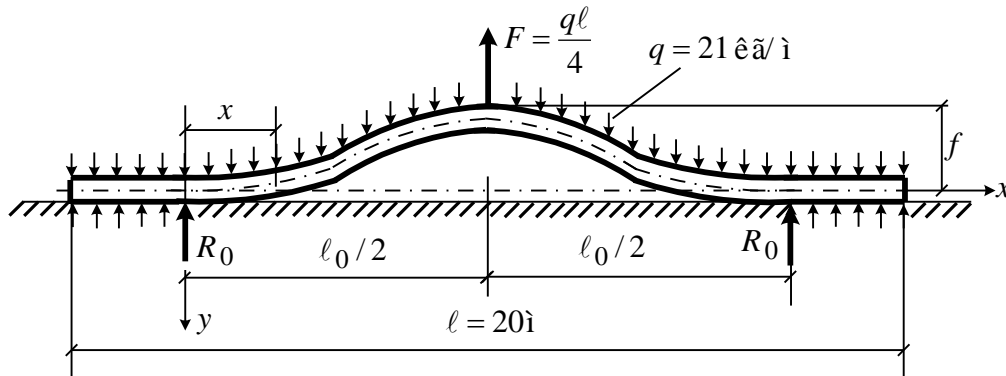


Рис. 5.44. До задачі 5.2.16

Ліва й права частини будуть лежати на площині і залишаться прямими. При $x = 0$ будуть дорівнювати нулю прогин, кут повороту і згинальний момент. З умови рівності нулю суми проєкцій всіх сил на вертикальну вісь і симетрії деформації випливає, що в точках дотику двотавра із площиною виникають реакції

$$R_0 = \frac{q\ell_0 - F}{2} = \frac{q\ell_0}{8} \left(4 - \frac{\ell}{\ell_0} \right).$$

Для визначення величини ℓ_0 скористаємося методом початкових параметрів і умовою, що при $x = \frac{\ell_0}{2}$ $y' = 0$.

$$-\frac{R_0 \left(\frac{\ell_0}{2} \right)^2}{2EJ_z} + \frac{q \left(\frac{\ell_0}{2} \right)^3}{6EJ_z} = 0, \quad \text{звідки} \quad R_0 = \frac{q\ell_0}{6}.$$

Тепер прирівнюючи значення R_0 , одержимо

$$\frac{q\ell_0}{6} = \frac{q\ell_0}{8} \left(4 - \frac{\ell}{\ell_0} \right),$$

або
$$\ell_0 = \frac{3\ell}{8} = \frac{3 \cdot 20}{8} = 7,5 \text{ м.}$$

Знайдемо переміщення точки підвісу двотавра:

$$y_c = -\frac{R_0 \left(\frac{\ell_0}{2}\right)^3}{6EJ_z} + \frac{q \left(\frac{\ell_0}{2}\right)^4}{24EJ_z} = -\frac{q\ell_0^4}{6 \cdot 8 \cdot 6EJ_z} + \frac{q\ell_0^4}{16 \cdot 24EJ_z} = -\frac{q\ell_0^4}{3^2 \cdot 128EJ_z} =$$

$$= -\frac{21 \cdot 10 \cdot 7,5^4 \cdot 10^2}{1152 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 10^{-8}} = -0,25 \text{ см.}$$

Варіант розв'язання.

Найцікавішим і повчальним моментом у розглянутій задачі, та й взагалі у всіх задачах, де має місце стикання пружної балки із жорсткою поверхнею, є виникнення зосередженої реакції R_0 на границі ділянки прилягання. На перший погляд, поява цієї сили трохи неочікувана, хоча формально її існування повністю погоджується з рівняннями рівноваги і деформацій.

Виникнення цієї сили обумовлено вибором розрахункової схеми. При розв'язанні задачі розглядалася тільки згинальна жорсткість балки EJ_z і негласно тим самим передбачалося (через не зовсім повне подання про роботу матеріалу балки при вигині), що деформації зсуву в поперечних перерізах відсутні. Урахування цих деформацій уже досить, щоб виявити, що схема контактних сил у вигляді рівномірно розподіленого навантаження й зосередженої сили R_0 є наближеною. При цьому немає навіть необхідності зупинятися на тім, що за рахунок стиску балки в поперечному напрямку (як у звичайних контактних задачах) сила R_0 буде розподілятися по деякій малій площадці.

Розглянемо деформації зсуву в балці (рис. 5.45)..

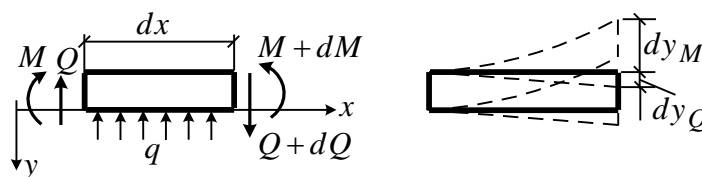


Рис. 5.45. До задачі 5.2.16

Кривизна балки, пов'язана зі згинальним моментом, визначається величиною

$$\frac{1}{\rho} = y''_M = -\frac{M}{EJ} . \quad (5.8)$$

Якщо позначити через y_Q прогини, викликані зсувом, то для будь-якого перерізу одержимо кут додаткового нахилу пружної лінії у вигляді

$$y'Q = \frac{kQ}{GF}, \quad (2)$$

де k – числовий коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу балки,

$$k = \frac{A}{J_z^2} \int \frac{S_z^2}{z^2} dy.$$

Для двотавра № 20 (рис. 5.46) $A = 26,8 \text{ см}^2$; $J_z = 115 \text{ см}^4$;

$$S_z^{\text{II}} = t \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right); \quad S_z^{\text{CT}} = \frac{h-2t}{2} \left(\frac{\delta^2}{4} - y^2 \right); \quad z^{\text{II}} = 2t; \quad z^{\text{CT}} = h - 2t.$$

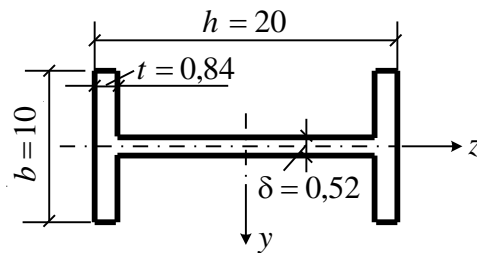


Рис. 5.46. До задачі 5.2.16

Знехтуємо впливом стінки.

Тоді

$$k = \frac{26,8}{115^2} \left[\frac{1 \cdot 0,84^2}{4 \cdot 0,84^2} \int_{-b/2}^{b/2} (25 - y^2)^2 dy \right] = \frac{26,8}{115^2 \cdot 4} \left[625y - \frac{50}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-5}^5 =$$

$$= \frac{26,8}{115^2 \cdot 4} \cdot 2 \left(625 \cdot 5 - \frac{50 \cdot 125}{3} + \frac{3125}{5} \right) = 1,69.$$

Таким чином, з огляду на (5.8) і (5.9), одержуємо

$$y'' = -\frac{M}{EJ} + \frac{kQ'}{GA}.$$

Знак плюс при $\frac{kQ'}{GA}$ поставлений з тієї причини, що при додатному значенні M і Q обидва ці фактори дають зміну кривизни різного знака (рис. 5.45). оскільки $Q = \frac{dM}{dx}$ і $Q' = \frac{d^2M}{dx} = M''$, то диференціальне рівняння набуває вигляду

$$y'' = -\frac{M}{EJ} + \frac{kM''}{GA}. \quad (5.10)$$

У розв'язуваній задачі напружено-деформований стан двотаврової балки є симетричним. Тому розглянемо тільки праву її половину (рис. 5.47).

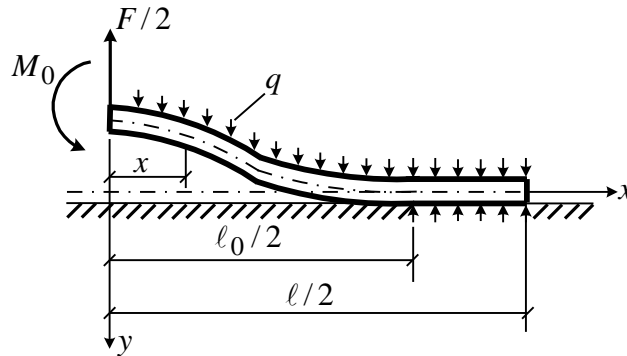


Рис. 5.47. До задачі 5.2.16

На першій ділянці при $x < \frac{\ell_0}{2}$ згинальний момент $M = -M_0 + \frac{F}{2}x - \frac{qx^2}{2}$, а $M'' = -q$. З огляду на це відповідно до виразу (5.10), одержуємо

$$y'' = \frac{1}{EJ} \left(M_0 - \frac{F}{2}x + \frac{qx^2}{2} \right) - \frac{kq}{GA}.$$

Або з огляду на те, що $F = \frac{q\ell}{4}$, маємо

$$y'' = \frac{1}{EJ} \left[M_0 - \frac{qx}{2} \left(\frac{\ell}{4} - x \right) \right] - \frac{kq}{GA}.$$

Інтегруючи, одержимо

$$y' = \frac{1}{EJ} \left(M_0 x - \frac{q\ell x^2}{16} + \frac{qx^3}{6} \right) - \frac{kqx}{GA} + C_1,$$

$$y = \frac{1}{EJ} \left(M_0 \frac{x^2}{2} - \frac{q\ell x^3}{48} + \frac{qx^4}{24} \right) - \frac{kqx^2}{2GA} + C_1 x + C_2.$$

Граничні умови для першої ділянки:

- 1) при $x = 0$ $y' = 0$;
- 2) при $x = \frac{\ell_0}{2}$ $y' = 0$;
- 3) при $x = \frac{\ell_0}{2}$ $y = 0$.

З першої умови випливає, що $C_1 = 0$. З наступних двох маємо

$$M_0 = \frac{qll_0}{32} - \frac{ql_0^2}{24} + kq \frac{EJ}{GA};$$

$$C_2 = -\frac{1}{EJ} \left(M_0 \frac{l_0^2}{8} - \frac{qll_0^3}{384} + \frac{ql_0^4}{384} \right) + \frac{kq l_0^2 EJ}{8GA} =$$

$$= -\frac{1}{EJ} \left(\frac{qll_0^3}{256} - \frac{ql_0^4}{192} + \frac{kq l_0^2}{8} \cdot \frac{EJ}{GA} - \frac{qll_0^3}{384} + \frac{ql_0^4}{384} \right) + \frac{kq l_0^2}{8GA} =$$

$$= -\frac{1}{EJ} \left(\frac{qll_0^3}{768} - \frac{ql_0^4}{384} \right) = -\frac{qll_0^3}{768EJ} \left(1 - 2 \frac{l_0}{l} \right).$$

На другій ділянці кривизна дорівнює нулю. Отже, згідно з (5.10)

$$M'' - \alpha^2 M = 0,$$

де $\alpha^2 = \frac{GA}{EJk}$.

Звідки

$$M = C_3 sh \alpha x + C_4 ch \alpha x. \quad (5.11)$$

При $x = \frac{l_0}{2}$ $M = \frac{qll_0}{32} - \frac{ql_0^2}{12} - kq \frac{EJ}{GA}$,

при $x = \frac{l}{2}$ $M = 0$.

Із цих умов визначаємо довільні постійні C_3 і C_4 :

$$\begin{cases} C_3 sh \frac{\alpha l_0}{2} + C_4 ch \frac{\alpha l_0}{2} = \frac{qll_0}{32} - \frac{ql_0^2}{12} - kq \frac{EJ}{GA}; \\ C_3 sh \frac{\alpha l}{2} + C_4 ch \frac{\alpha l}{2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} ch \frac{\alpha l}{2} \\ -ch \frac{\alpha l_0}{2} \end{cases}$$

$$C_3 \left(sh \frac{\alpha l_0}{2} ch \frac{\alpha l}{2} - sh \frac{\alpha l}{2} ch \frac{\alpha l_0}{2} \right) = \left(\frac{qll_0}{32} - \frac{ql_0^2}{12} - \frac{EJ}{GA} \right) ch \frac{\alpha l}{2};$$

$$C_3 = - \left(\frac{qll_0}{32} - \frac{ql_0^2}{12} - kq \frac{EJ}{GA} \right) \frac{ch \frac{\alpha l}{2}}{sh \alpha \frac{l - l_0}{2}};$$

$$C_4 = \left(\frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - kq \frac{EJ}{GA} \right) \frac{sh \frac{\alpha\ell}{2}}{sh \alpha \frac{\ell - \ell_0}{2}}.$$

Величина $\frac{\ell_0}{2}$ визначається з умови рівності поперечних сил у точці сполучення ділянок. При $x = \frac{\ell_0}{2}$ похідна моменту на першій ділянці дорівнює похідній моменту на другій ділянці

$$\frac{q\ell}{8} - \frac{q\ell_0}{2} = C_3 \alpha ch \frac{\alpha\ell_0}{2} + C_4 \alpha sh \frac{\alpha\ell_0}{2},$$

звідки

$$\frac{q\ell}{8} - \frac{q\ell_0}{2} = - \left(\frac{q\ell\ell_0}{32} - \frac{q\ell_0^2}{12} - kq \frac{EJ}{GA} \right) \frac{\alpha}{th \frac{\alpha\ell}{2} \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell} \right)},$$

або

$$1 - 4 \frac{\ell_0}{\ell} = - \left(\frac{1}{4} - \frac{2\ell_0}{3\ell} - 8 \frac{\ell}{\ell_0} \frac{k}{\ell^2} \frac{EJ}{GA} \right) 2 \frac{\ell_0}{\ell} \frac{\frac{\alpha\ell}{2}}{th \frac{\alpha\ell}{2} \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell} \right)}. \quad (5.12)$$

Із цього трансцендентного рівняння визначається $\frac{\ell_0}{\ell}$ при заданому

$$\frac{\alpha\ell}{2} = \sqrt{\frac{GA\ell^2}{4EJk}}.$$

У нашому випадку

$$\frac{\alpha\ell}{2} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^4 \cdot 26,8 \cdot 20^2 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,69 \cdot 115 \cdot 4}} = 235.$$

Розв'язуючи рівняння (5.12), одержимо $\frac{\ell_0}{\ell} = 0,371$, тобто $\ell_0 = 0,371 \cdot 20 = 7,42$ м.

Тепер визначимо розподілене навантаження q_1 по другій ділянці балки (q_1 – різниця між розподіленою реакцією площини і власної ваги q).

З (5.11) одержуємо

$$q_1 = M'' = \alpha^2 (C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x),$$

звідки

$$q_1 = \alpha^2 \left(\frac{q \ell \ell_0}{32} - \frac{q \ell_0^2}{12} - kq \frac{EJ}{GA} \right) \frac{\operatorname{sh} \alpha \left(\frac{\ell}{2} - x \right)}{\operatorname{sh} \alpha \frac{\ell - \ell_0}{2}},$$

або

$$q_1 = q \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{\ell_0}{\ell} - \frac{1}{3} \left(\frac{\ell_0}{\ell} \right)^2 - 4 \frac{kEJ}{\ell^2 GA} \right] \left(\frac{\alpha \ell}{2} \right)^2 \frac{\operatorname{sh} \alpha \left(\frac{\ell}{2} - x \right)}{\operatorname{sh} \alpha \frac{\ell - \ell_0}{2}}. \quad (5.13)$$

При $x = \frac{\ell}{2}$ $q_1 = 0$, тобто реакція опорної площини дорівнює погонній вазі балки.

При $x = \frac{\ell_0}{2}$ маємо $q_1 = q \left(\frac{\alpha \ell}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{\ell_0}{\ell} - \frac{1}{3} \left(\frac{\ell_0}{\ell} \right)^2 - 4 \frac{kEJ}{\ell^2 GA} \right]$.

Для розв'язуваної задачі

$$q_1 = 21 \cdot 235^2 \left(\frac{1}{8} 0,371 - \frac{1}{3} 0,371^2 - 4 \frac{1,69 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 115}{20^2 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 26,8} \right) = 553 \text{ кг/м},$$

або $q_1 = 26,32q$.

Зміна розподілу реакції площини показана на рис. 5.48.

Переміщення точки підвісу двотавра

$$y_c = C_2 = -\frac{q \ell \ell_0^3}{768EJ} \left(1 - 2 \frac{\ell_0}{\ell} \right) = -\frac{21 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 7,42^3 \cdot 10^2}{768 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 10^{-8}} \times \\ \times (1 - 2 \cdot 0,371) = -0,25 \text{ см}.$$

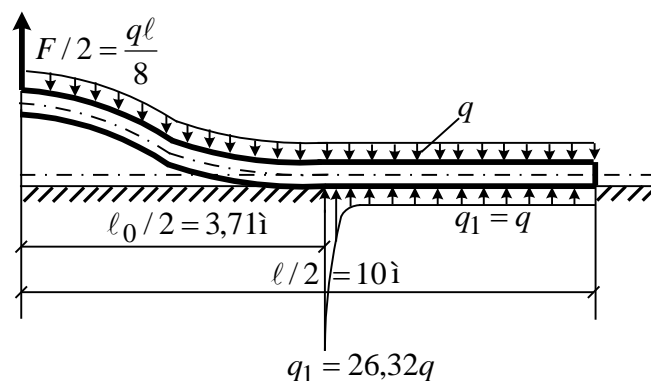


Рис. 5.48. До задачі 5.2.16

Розділ 6

6.2.1. Якщо прийняти, що тиск на підбалку передається по всій її довжині, то можна припустити, що дві балки, які знаходяться в різних умовах навантаження, згинаються по однакових кривих. Це не так, отже, така передача тиску неможлива. Тиск балки на підбалку приводиться до сили X (рис. 6.7), яка прикладена в точці В. Величину її знайдемо з порівняння прогинів у перерізі В для балки під дією сил F і X і підбалки під дією сили X :

$$y_{\bar{v}} = y_v^{n\bar{b}}. \quad (6.1)$$

Прогин підбалки буде

$$y_v^{n\bar{b}} = \frac{X \ell_1^3}{3EJ}.$$

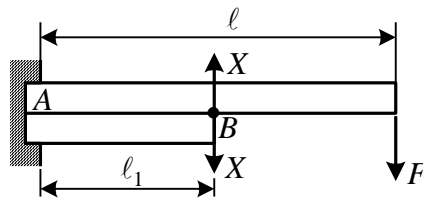


Рис. 6.7. До задачі 6.2.1

Прогин балки під дією навантаження F в перерізі В знайдемо, використовуючи, наприклад, графоаналітичний метод (рис. 6.8).

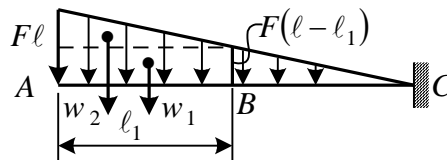


Рис. 6.8. До задачі 6.2.1

Завантажимо епюрою згинальних моментів у дійсній балці АС від сили F фіктивну балку і визначимо фіктивний момент у перерізі В:

$$\begin{aligned} M_{\bar{v}}^{\phi} &= w_1 \frac{\ell_1}{2} + w_2 \frac{2}{3} \ell_1 = F(\ell - \ell_1) \ell_1 \frac{\ell_1}{2} + \frac{1}{2} [F\ell - F(\ell - \ell_1)] \ell_1 \frac{2}{3} \ell_1 = \\ &= \frac{F \ell_1^2}{6} (3\ell - 3\ell_1 + 2\ell_1) = \frac{F \ell_1^2}{6} (3\ell - \ell_1). \end{aligned}$$

Тоді

$$y_{1\bar{v}}^{\bar{v}} = \frac{M_{\bar{v}}^{\phi}}{EJ} = \frac{F \ell_1^2}{6EJ} (3\ell - \ell_1).$$

Переміщення перерізу В балки від сили X буде

$$y_{2в}^{\bar{b}} = \frac{X \ell_1^3}{3EJ}.$$

Прогин балки в перерізі В утвориться як різниця знайдених переміщень:

$$y_{в}^{\bar{b}} = y_{1в}^{\bar{b}} - y_{2в}^{\bar{b}} = \frac{F \ell_1^2}{6EJ} (3\ell - \ell_1) - \frac{X \ell_1^3}{3EJ}.$$

Прирівнюючи цей прогин прогину балки відповідно до (6.1), одержимо таке рівняння:

$$\frac{F \ell_1^2}{6EJ} (3\ell - \ell_1) - \frac{X \ell_1^3}{3EJ} = \frac{X \ell_1^3}{3EJ},$$

тоді

$$X = \frac{3}{4} F \left(\frac{\ell}{\ell_1} - \frac{1}{3} \right).$$

6.2.2. 1. Позначимо силу взаємодії між балками АВ і CD (рис. 6.9) через X. Тоді на балку АВ будуть діяти розподілене навантаження q і сила X у перерізі E (рис. 6.10, а), а на балку CD – протилежно спрямована сила X у перерізі E (рис. 6.10, б).

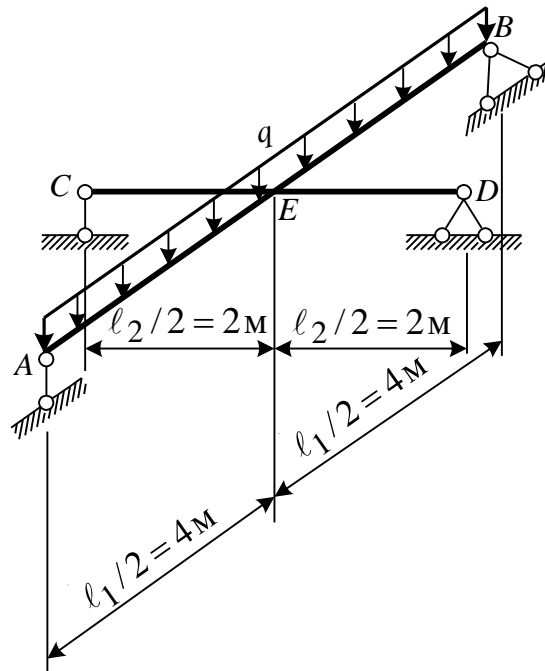


Рис. 6.9. До задачі 6.2.2

Умовою їхньої спільної роботи буде рівність прогинів балок у перерізі E, тобто

$$f_e^{ab} = f_e^{cd}. \quad (6.2)$$

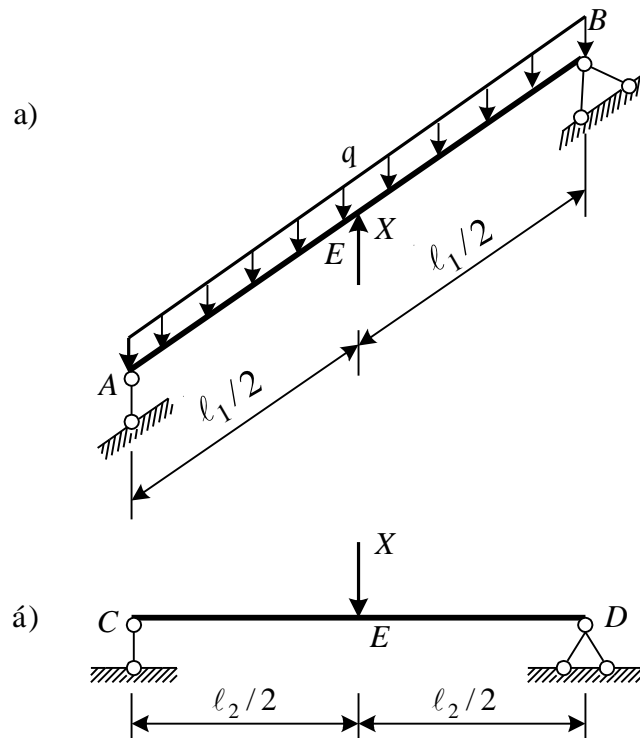


Рис. 6.10. До задачі 6.2.2

Значення прогинів у серединах прогонів розподіленого навантаження і зосередженої сили відомі (якщо невідомі, то їх легко знайти). Позначимо жорсткості балок відповідно EJ_1 і EJ_2 . Тоді

$$f_e^{ab} = \frac{5ql_1^4}{384EJ_1} - \frac{Xl_1^3}{48EJ_1},$$

$$f_e^{cd} = \frac{Xl_2^3}{48EJ_2}.$$

Прирівнюючи ці прогини відповідно до (6.2), одержимо рівняння, із якого можна визначити силу взаємодії X :

$$\frac{5ql_1^4}{384EJ_1} - \frac{Xl_1^3}{48EJ_1} = \frac{Xl_2^3}{48EJ_2},$$

$$X = \frac{5ql_1}{1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \frac{J_1}{J_2}}. \quad (6.3)$$

Оскільки співвідношення між моментами інерції перерізів балок невідомі (перерізи ще не підбрані), подальше розв'язання задачі будемо робити способом послідовних наближень.

1-е наближення. Задаємося $\frac{J_1}{J_2} = 1$ й обчислюємо силу взаємодії:

$$X = \frac{5 \cdot 8,1 \cdot 8}{1 + \left(\frac{4}{8}\right)^3} = 36 \text{ кН.}$$

Будуємо епюри згинальних моментів (рис. 6.11).

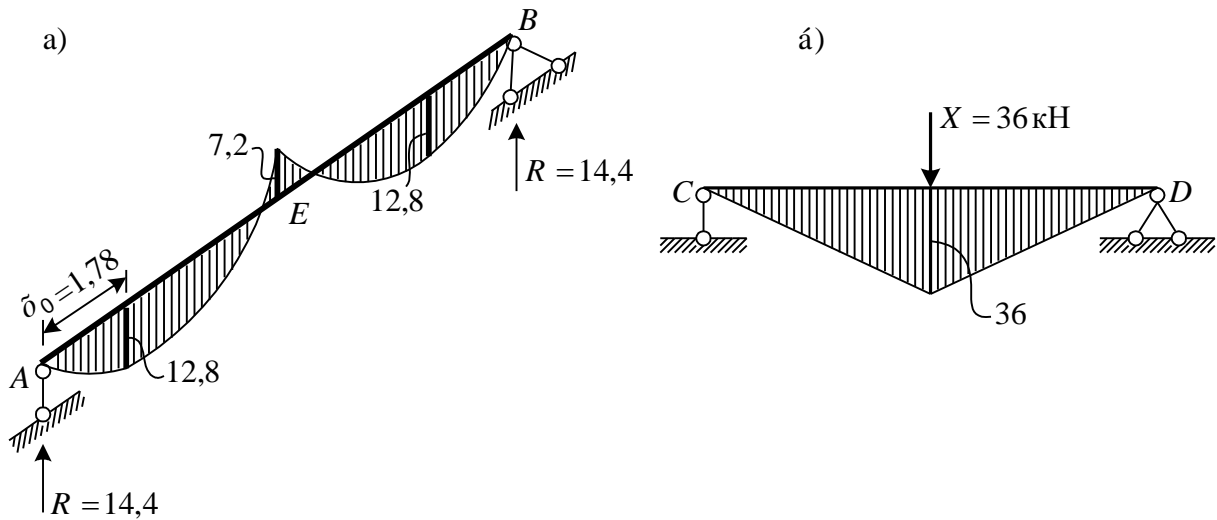


Рис. 6.11. До задачі 6.2.2

Підбираємо перерізи балок за ГОСТ 8239-89 (дод. 2).

Балка АВ:

$$W_1 \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{12,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 80 \text{ см}^3,$$

приймаємо двотавр № 14, $W_1 = 81,7 \text{ см}^3$, $J_1 = 572 \text{ см}^4$.

Балка CD:

$$W_2 \geq \frac{36 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 225 \text{ см}^3,$$

приймаємо двотавр № 22, $W_2 = 232 \text{ см}^3$, $J_2 = 2550 \text{ см}^4$.

2-е наближення. $\frac{J_1}{J_2} = \frac{572}{2550} = 0,224$, $X = 39,4 \text{ кН}$, $R_a = 12,7 \text{ кН}$,

$x_0 = 1,568 \text{ м}$, $M_{\max} = 9,96 \text{ кНм}$, $M_e^{ab} = -14 \text{ кНм}$, $M_e^{cd} = 39,4 \text{ кНм}$.

$W_1 \geq \frac{14 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 87,5 \text{ см}^3$, двотавр № 16, $W_1 = 109 \text{ см}^3$, $J_1 = 873 \text{ см}^4$,

$$W_2 \geq \frac{39,4 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 246,25 \text{ см}^3, \quad \text{двотавр № 24}, \quad W_2 = 289 \text{ см}^3, \\ J_2 = 3460 \text{ см}^4.$$

3-е приближення. $\frac{J_1}{J_2} = 0,252$, $X = 39,26$ кН, $R_a = 12,77$ кН, $x_0 = 1,576$ м,
 $M_{\max} = 10,07$ кНм, $M_e^{ab} = -13,72$ кНм, $M_e^{cd} = 39,26$ кНм.

$$W_1 \geq \frac{13,72 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 85,75 \text{ см}^3, \quad \text{двотавр №16}, \quad W_1 = 109 \text{ см}^3, \quad J_1 = 873 \text{ см}^4,$$

$$W_2 \geq \frac{39,26 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 245,4 \text{ см}^3, \quad \text{двотавр № 24}, \quad W_2 = 289 \text{ см}^3, \\ J_2 = 3460 \text{ см}^4.$$

Отже, підібрано перерізи: балка АВ - двотавр № 16, балка CD – двотавр № 24. Маса металу конструкції

$$m = m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2 = 15 \cdot 8 + 27,3 \cdot 4 = 229,2 \text{ кг}.$$

2. Щоб зменшити витрати матеріалу, необхідно зменшити розрахункові згинальні моменти в обох балках, що пов'язано зі зменшенням розміру сили взаємодії X . Конструктивно це можна здійснити, залишаючи деякий зазор у перерізі Е між балками.

Перший варіант зменшення розрахункових згинальних моментів пов'язаний із рівністю згинальних моментів у балці АВ:

$$M_{\max} = |M_e^{ab}|. \quad (6.4)$$

При щільному зіткненні балок $|M_e^{ab}| > M_{\max} (|-13,72| > 10,07)$.

Виразимо моменти M_{\max} і M_e^{ab} через X .

$$R_a = \frac{q\ell_1 - X}{2},$$

$$M_{\max} = R_a x_0 - \frac{qx_0^2}{2} = R_a \frac{R_a}{q} - \frac{q}{2} \left(\frac{R_a}{q} \right)^2 = \frac{R_a^2}{2q} = \frac{(q\ell_1 - X)^2}{8q},$$

$$M_e^{ab} = R_a \frac{\ell_1}{2} - \frac{q\ell_1^2}{8} = \frac{q\ell_1 - X}{4} \ell_1 - \frac{q\ell_1^2}{8} = \frac{q\ell_1^2}{8} - \frac{X\ell_1}{4}.$$

Прирівнюємо відповідно до (6.4) ці моменти

$$\frac{(q\ell_1 - X)^2}{8q} = \left| \frac{q\ell_1^2}{8} - \frac{X\ell_1}{4} \right|,$$

одержуємо рівняння відносно X

$$X^2 - 4q\ell_1 X + 2q^2 \ell_1^2 = 0.$$

Корені рівняння

$$X = 2ql_1 \pm \sqrt{4q^2 \ell_1^2 - 2q^2 \ell_1^2}.$$

Дійсний другий корінь

$$X = (2 - \sqrt{2})ql_1 = (2 - \sqrt{2})8,1 \cdot 8 = 37,96 \text{ кН}.$$

Розрахунковий момент балки АВ при цьому буде

$$M_{\max} = \frac{(q\ell_1 - X)^2}{8q} = \frac{(8,1 \cdot 8 - 37,96)^2}{8 \cdot 8,1} = 11,12 \text{ кНм}.$$

Переріз балки АВ:

$$W_1 \geq \frac{11,12 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 69,5 \text{ см}^3,$$

приймаємо двотавр № 14, $W_1 = 81,7 \text{ см}^3$, $J_1 = 572 \text{ см}^4$.

Розрахунковий момент балки CD:

$$M_e^{cd} = \frac{X\ell_2}{4} = \frac{37,96 \cdot 4}{4} = 37,96 \text{ кНм}.$$

Переріз

$$W_2 \geq \frac{37,96 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 237,25 \text{ см}^3.$$

Залишається двотавр № 24, $W_2 = 289 \text{ см}^3$, $J_2 = 3460 \text{ см}^4$.

При цьому зазор між балками повинен бути

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{5q\ell_1^4}{384EJ_1} - \frac{X\ell_1^3}{48EJ_1} - \frac{X\ell_2^3}{48EJ_2} = \frac{5 \cdot 8,18^4 \cdot 10^3}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} 10^3 - \\ &- \frac{37,96 \cdot 8^3 \cdot 10^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} 10^3 - \frac{37,96 \cdot 4^3 \cdot 10^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} 10^3 = \\ &= 377,622 - 353,939 - 7,784 = 15,9 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Маса металу конструкції в цьому випадку буде:

$$m_0 = 13,7 \cdot 8 + 27,3 \cdot 4 = 218,8 \text{ кг}.$$

Економія порівняно з першим випадком складе 5%.

Задача розв'язана. Але виникла думка, чи не можна уніфікувати елементи перехресної системи, тобто виготовити обидві балки з перерізами з однакових двотаврів. Це теж іноді буває корисним. Щоб балки виготовлялися з двотаврів однакових номерів, необхідно мати рівність розрахункових моментів.

Отже,

$$M_{\max} = M_e^{cd}, \quad (6.5)$$

або

$$\frac{(q\ell_1 - X)^2}{8q} = \frac{X\ell_2}{4}.$$

Тоді

$$X^2 - 2q(\ell_1 + \ell_2)X + q^2\ell_1^2 = 0.$$

Знаходимо корені:

$$X = q(\ell_1 + \ell_2) \pm \sqrt{q^2(\ell_1 + \ell_2)^2 - q^2\ell_1^2} = q(\ell_1 + \ell_2) \pm q\sqrt{\ell_2(2\ell_1 + \ell_2)}.$$

Дійсний другий корінь

$$X = 8,1(8 + 4) - 8,1\sqrt{4(2 \cdot 8 + 4)} = 8,1(12 - 4\sqrt{5}) = 24,75 \text{ кН}.$$

Розрахункові моменти будуть

$$M_e^{cd} = \frac{24,75 \cdot 4}{4} = 24,75 \text{ кНм}.$$

Перерізи обох балок

$$W \geq \frac{24,75 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} 10^6 = 154,7 \text{ см}^3.$$

Приймаємо двотавр № 20, $W = 184 \text{ см}^3$, $J = 1840 \text{ см}^4$.

Зазор між балками в цьому випадку повинен бути

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{5q\ell_1^4}{384EJ_1} - \frac{X\ell_1^3}{48EJ_1} - \frac{X\ell_2^3}{48EJ_2} = \frac{5q\ell_1^4}{384EJ} \left(1 - \frac{8X}{5q\ell_1} \left(1 + \frac{\ell_2^3}{\ell_1^3} \right) \right) = \\ &= \frac{5 \cdot 8,1 \cdot 8^4 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{384 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \left(1 - \frac{8 \cdot 24,75}{5 \cdot 8,1 \cdot 8} \left(1 + \frac{4^3}{8^3} \right) \right) = 36,7 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Якщо такої величини зазор між балками, на який повинна прогнутися поздовжня, перед тим як система їх буде працювати спільно, можна допустити з інших міркувань, тоді уніфікацію перерізів можна здійснити. Необхідно зауважити, що повний прогин верхньої балки буде ще більшим, тобто 45,6 мм.

Маса металу конструкції

$$m = 21,0 \cdot 12 = 252 \text{ кг},$$

тобто більше на 10 %, ніж у першому випадку, і на 15 % – у другому. Варто подумати, робити уніфікацію в такий спосіб чи ні.

6.2.3. Балку зі шпренгелем (рис. 6.12), якщо знехтувати впливом деформацій стиску її, можна уявити як балку, що спирається в перерізі С на пружно-піддатливу опору (рис. 6.13).

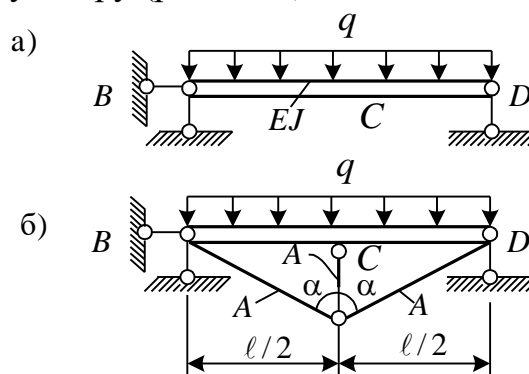


Рис. 6.12. До задачі 6.2.3

Піддатливість опори дорівнює переміщенню шарніра С при дії на шпренгель одиничної сили, розташованої у вузлі С (рис. 6.14).

$$\delta = \Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = \frac{\bar{N}_1 l_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_2 l_2}{EA_2 \cos \alpha}. \quad (6.6)$$

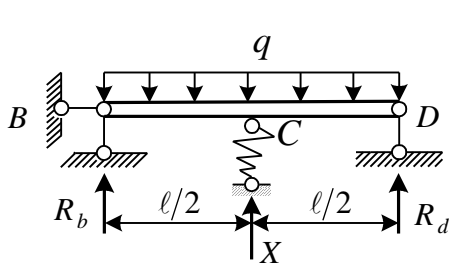


Рис. 6.13. До задачі 6.2.3

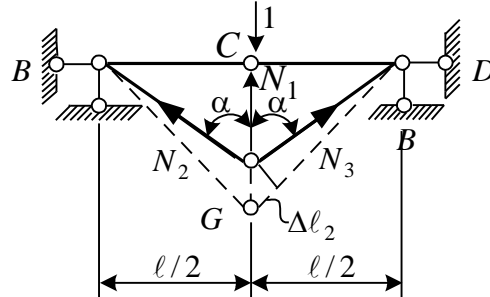


Рис. 6.14. До задачі 6.2.3

Знайдемо зусилля в стержнях шпренгеля від одиничної сили. Вирізуємо вузол С:

$$\sum y = 0; \quad 1 + \bar{N}_1 = 0, \quad \bar{N}_1 = -1.$$

Розглядаємо рівновагу вузла G:

$$\sum x = 0, \quad -\bar{N}_2 \sin \alpha + \bar{N}_3 \sin \alpha = 0, \quad \bar{N}_3 = \bar{N}_2.$$

$$\sum y = 0, \quad \bar{N}_1 + 2\bar{N}_2 \cos \alpha = 0, \quad \bar{N}_2 = \frac{1}{2 \cos \alpha}.$$

Тепер, враховуючи, що $A_1 = A_2 = A_3 = A$,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1 \cdot \frac{l}{2 \cos \alpha}}{EA} + \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{l}{2 \sin \alpha} = \frac{l}{2EA \sin \alpha} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \right) = \\ &= \frac{l}{2EA \cos \alpha \sin 2\alpha} (1 + 2 \cos^3 \alpha). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для визначення реакції X складемо рівняння спільності деформацій. Прогин балки в перерізі С від зовнішнього навантаження і від X дорівнює деформації пружно-піддатливої опори від X:

$$f_c^q - f_c^X = \Delta_c, \quad (6.8)$$

де

$$f_c^X = \frac{X l^3}{48 E J}; \quad \Delta_c = X \delta.$$

Підставляючи у (6.8) ці значення, одержимо

$$f_c^q - \frac{X\ell^3}{48EJ} = X\delta,$$

тоді

$$X = \frac{f_c^q}{\frac{\ell^3}{48EJ} + \delta}. \quad (6.9)$$

Відповідно до умови задачі прогин шпренгельної балки (рис. 6.12, б) повинен дорівнювати половині прогину балки (рис. 6.12, а). Але прогин шпренгельної балки можна визначити як переміщення перерізу за рахунок деформації пружно-піддатливої опори при дії на неї силою, яка дорівнює X . Таким чином, $\Delta_c = X\delta = 0,5f_c^q$. Підставивши сюди значення X з (6.9),

одержимо
$$\frac{f_c^q \cdot \delta}{\frac{\ell^3}{48EJ} + \delta} = 0,5f_c^q.$$

Скоротивши на f_c^q і позбавившись від знаменника, одержимо

$$\delta = \frac{\ell^3}{96EJ} + 0,5\delta,$$

або
$$\delta = \frac{\ell^3}{48EJ}.$$

Розкривши за (6.7) δ , знаходимо значення площі перерізів стержнів шпренгеля, що задовольняє умову задачі:

$$\frac{\ell(1 + 2\cos^3 \alpha)}{2\cos \alpha \sin 2\alpha EA} = \frac{\ell^3}{48EJ},$$

тоді

$$A = \frac{24J(1 + 2\cos^3 \alpha)}{\ell^2 \sin 2\alpha \cos \alpha}.$$

6.2.4. Позначимо крайні прогони балки через ℓ , а середній – $n\ell$ (рис. 6.15, а). Балка двічі статично невизначна

$$L = C_0 - 3 = 5 - 3 = 2.$$

Для розкриття статичної невизначеності необхідно записати два рівняння трьох моментів. Але через симетрію балки і прикладеного навантаження, невідомі опорні моменти будуть рівні між собою: $M_2 = M_1$. Отже, достатньо буде одного рівняння

$$M_0\ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2\ell_2 = -6R_1^{\phi},$$

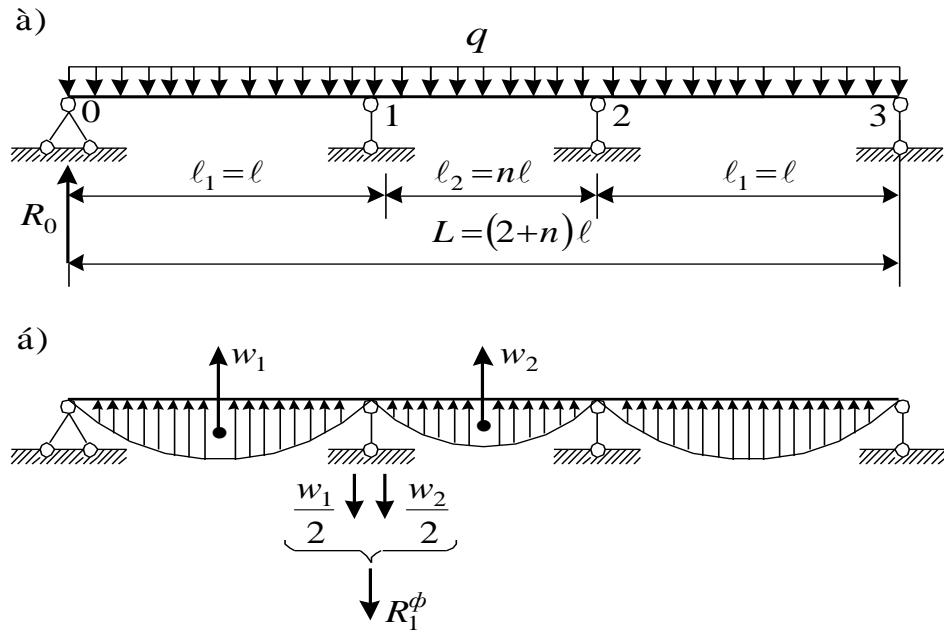


Рис. 6.15. До задачі 6.2.4

або, з урахуванням вищесказаного і того, що $M_0 = 0$, будемо мати

$$2M_1(l + nl) + M_1nl = -6R_1^\phi.$$

Після перетворення з рівняння знаходимо

$$M_1 = -\frac{6R_1^\phi}{(2+3n)\ell}.$$

Знайдемо фіктивну опорну реакцію на опорі 1 (рис. 6.15, б):

$$R_1^\phi = \frac{w_1}{2} + \frac{w_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2q\ell^2}{3 \cdot 8} \ell + \frac{1}{2} \cdot \frac{2qn^2\ell^2}{3 \cdot 8} n\ell = \frac{q\ell^3}{24} (1+n^3).$$

Тоді

$$M_1 = -\frac{q\ell^2}{8} \cdot \frac{2(1+n^3)}{2+3n}. \quad (6.10)$$

При такому опорному моменті максимальні моменти в першому і в другому прогонах будуть

$$M_{\max 1} = R_0x - \frac{qx^2}{2} = \frac{R_0^2}{q} - \frac{qR_0^2}{2q^2} = \frac{R_0^2}{2q}, \quad (6.11)$$

$$M_{\max 2} = \frac{qn^2\ell^2}{8} - M_1, \quad (6.12)$$

де

$$R_0 = \frac{q\ell}{2} - \frac{M_1}{\ell}. \quad (6.13)$$

З огляду на (6.10) і (6.13) після перетворення остаточно маємо

$$M_{\max 1} = \frac{ql^2}{8} \frac{(3 + 6n - n^3)^2}{4(2 + 3n)^2}, \quad (6.14)$$

$$M_{\max 2} = \frac{ql^2}{8} \frac{n + 2n^2 - 2}{2 + 3n}. \quad (6.15)$$

При $n = 1$ (рівні прогони)

$$M_1 = -\frac{ql^2}{8} \cdot 0,8, \quad M_{\max 1} = \frac{ql^2}{8} \cdot 0,64, \quad M_{\max 2} = \frac{ql^2}{8} \cdot 0,2,$$

тобто опорний момент

$$M_1 > M_{\max 1} > M_{\max 2}$$

буде розрахунковим.

Якщо ж $n < 1$, моменти M_1 і $M_{\max 2}$ будуть зменшуватися, а $M_{\max 1}$ збільшуватися. Звідси маємо, що оптимальному значенню "n" буде відповідати рівність опорного моменту з максимальним моментом першого прогону

$$|M_1| = M_{\max 1}.$$

Прирівнявши праві частини виразів (6.10) і (6.14) і скоротивши все на $\frac{ql^2}{8}$, будемо мати

$$\frac{2(1 + n^3)}{2 + 3n} = \frac{(3 + 6n - n^3)^2}{4(2 + 3n)^2}.$$

Після перетворення одержимо

$$n^6 - 24n^4 - 30n^3 + 20n^2 + 24n + 25 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння шляхом добору, знаходимо, що $n = 0,7863$. Отже, прогони балки будуть дорівнювати

$$\ell_1 = 32,3 \text{ м}, \quad \ell_2 = 25,4 \text{ м}, \quad \ell_3 = 32,3 \text{ м}.$$

Розрахунковими моментами будуть $|M_1| = M_2 = \frac{ql^2}{8} \cdot 0,682$.

Цей момент на

$$\frac{0,8 - 0,682}{0,8} 100 = 14,75 \%$$

менший розрахункового при рівних прогонах. Отже, і маса балки буде приблизно на 14 % меншою від балки з рівними прогонами.

Розділ 7

7.2.1. Обчислюємо характеристику:

$$s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{30}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1223}} = \frac{1}{75} \text{ см}^{-1}.$$

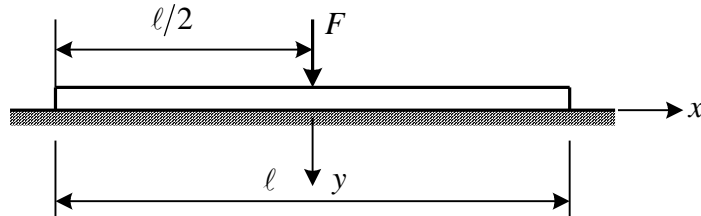


Рис. 7.5. До задачі 7.2.1

Приведена довжина балки (рис. 7.5)

$$s\ell = 1500 / 75 = 20 > 6.$$

Отже, розрахунок можна вести як нескінченно довгої балки.

Прогин, см, і згинальний момент, кНм, можна записати так:

$$y(x) = \frac{F}{8EJs^3} e^{-sx} (\sin sx + \cos sx) = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 75^3 \cdot 10^4}{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1223} \eta(x) = 0,216\eta(x),$$

$$M(x) = \frac{F}{4s} e^{-sx} (\cos sx - \sin sx) = \frac{100 \cdot 75 \cdot 10^{-4}}{4} \eta_1(x) = 18,85\eta_1(x).$$

Обчислення за цими формулами дають $y(x)$ і $M(x)$ (значення $\eta(x)$ й $\eta_1(x)$), узяті з дод. 3) (див. табл. 7.1).

Таблиця 7.1

x , см	$sx = \frac{x}{75}$	$\eta(x)$	$\eta_1(x)$	$y(x) = 0,216\eta(x)$, см	$M(x) = 18,75\eta_1(x)$, кНм
0	0	1	1	0,216	18,75
25	0,333	0,91	0,44	0,197	8,14
50	0,667	0,62	0,08	0,134	1,50
75	1,000	0,51	-0,11	0,110	-2,06
100	1,333	0,32	-0,19	0,069	-3,56
150	2,000	0,07	-0,18	0,015	-3,38
200	2,667	-0,03	-0,09	-0,006	-1,69
300	4,000	-0,03	0,00	-0,006	0,00
400	5,333	0,00	0,01	0,000	0,19
500	6,667	0,00	0,00	0,000	0,00

Максимальний прогин $y_{\max} = y(0) = 0,216$ см.

Максимальний згинальний момент $M_{\max} = M(0) = 18,75$ кНм.

Епюри $y(x)$ і $M(x)$ показані на рис. 7.6.

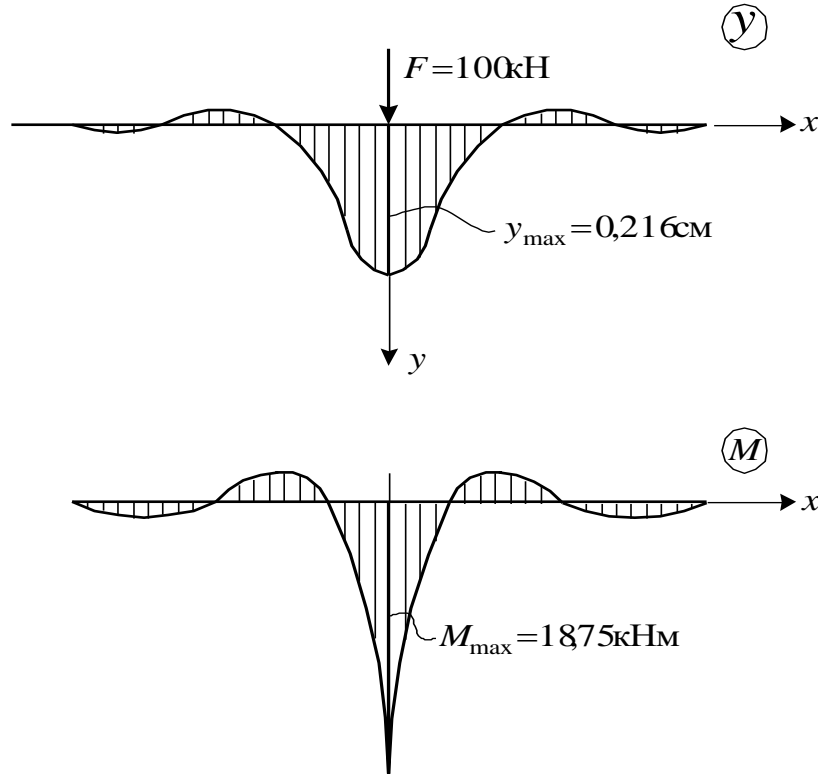


Рис. 7.6. До задачі 7.2.1

7.2.2. Характеристика: $s = \frac{1}{75} \text{ см}^{-1}$. Приведена довжина балки $s\ell = 200/75 = 2,67$. Оскільки $1,2 < 2,67 < 4$, балка повинна бути розрахована як коротка.

Скористаємося методом початкових параметрів. Спочатку необхідно знайти початкові параметри y_0 , y'_0 , M_0 і Q_0 . З них два дорівнюють нулю, тому що лівий кінець вільний $M_0 = 0$, $Q_0 = 0$. Для знаходження y_0 і y'_0 запишемо умови закріплення правого кінця балки. При вільному кінці $M_\ell = 0$ і $Q_\ell = 0$.

Запишемо формули для згинального моменту і поперечної сили при $x = \ell$:

$$4EJs^2 y_0 Y_{3sl} + 4EJs y'_0 Y_{4sl} - \frac{F}{s} Y_{2\frac{sl}{2}} = 0,$$

$$4EJs^3 y_0 Y_{2sl} + 4EJs^2 y'_0 Y_{3sl} - FY_{1\frac{sl}{2}} = 0.$$

Якщо розв'язати ці рівняння відносно y_0 і y'_0 за допомогою визначників, одержимо

$$y_0 = \frac{D_{y_0}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{F}{s} Y_{2\frac{sl}{2}} & 4EJs Y_{4sl} \\ FY_{1\frac{sl}{2}} & 4EJs^2 Y_{3sl} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4EJs^2 Y_{3sl} & 4EJs Y_{4sl} \\ 4EJs^3 Y_{2sl} & 4EJs^2 Y_{3sl} \end{vmatrix}} = \frac{Fs}{k} \frac{Y_{2\frac{sl}{2}} Y_{3sl} - Y_{1\frac{sl}{2}} Y_{4sl}}{Y_{3sl}^2 - Y_{2sl} Y_{4sl}},$$

$$y'_0 = \frac{Fs^2}{k} \frac{Y_{1\frac{sl}{2}} Y_{3sl} - Y_{2sl} Y_{2\frac{sl}{2}}}{Y_{3sl}^2 - Y_{2sl} Y_{4sl}},$$

де $k = 4s^4 EJ$.

З таблиці значень функцій О.М. Крилова (дод. 4) для $sl = \frac{1}{75} 200 = 2,67$ і $\frac{sl}{2} = \frac{1}{75} 100 = 1,33$ знаходимо:

$$Y_1(1,33) = 0,4824, \quad Y_2(1,33) = 1,1919,$$

$$Y_3(1,33) = 0,8538, \quad Y_4(1,33) = 0,3863,$$

$$Y_2(2,67) = -1,5527, \quad Y_3(2,67) = 1,6322,$$

$$Y_4(2,67) = 2,4242.$$

Початкові параметри

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{75 \cdot 30 \cdot 10^6} \cdot \frac{1,1919 \cdot 1,6322 - 0,4824 \cdot 0,3863}{1,6322^2 + 1,5527 \cdot 2,4242} = \\ &= 0,444 \frac{1,945 - 0,186}{6,428} = 0,1215 \text{ см,} \end{aligned}$$

$$y'_0 = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{75^2 \cdot 30 \cdot 10^6} \cdot \frac{0,4824 \cdot 1,6322 - 1,1919 (-1,5527)}{6,428} = 0,002432 \text{ рад.}$$

Формули для обчислення прогинів і згинальних моментів для лівої половини балки будуть мати такий вигляд:

$$y(x) = y_0 Y_{1sx} + \frac{y'_0}{s} Y_{2sx},$$

$$M(x) = 4EJs^2 y_0 Y_{3sx} + 4EJs y'_0 Y_{4sx}.$$

Обчислення ординат епюр $y(x)$ і $M(x)$ наведено в табл. 7.2.

Таблиця 7.2

x , см	0	25	50	75	100
sx	0	0,33	0,67	1,00	1,33
Y_{1sx}	1	0,9980	0,9664	0,8337	0,4824
Y_{2sx}	0	0,3299	0,6655	0,9668	1,1919
Y_{3sx}	0	0,0545	0,2240	0,4945	0,8538
Y_{4sx}	0	0,0060	0,0501	0,1659	0,3863
$0,1215 Y_{1sx}$	0,122	0,121	0,117	0,101	0,059
$0,1824 Y_{2sx}$	0	0,060	0,121	0,175	0,218
$y(x)$, см	0,122	0,181	0,238	0,276	0,277
$21,13 Y_{3sx}$	0	1,15	4,73	10,45	18,04
$31,73 Y_{4sx}$	0	0,19	1,59	5,26	12,26
$M(x)$, кНм	0	1,34	6,32	15,71	30,30

Епюри симетричні, вони наведені на рис. 7.7.

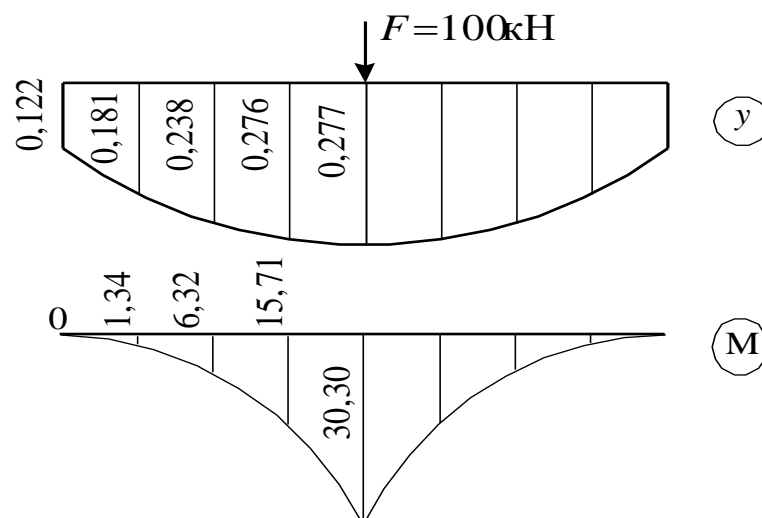


Рис. 7.7. До задачі 7.2.2

7.2.3. Коефіцієнт постелі, коли основою є вода, дорівнює $k = b\gamma$, де γ – питома вага води (рис. 7.8).

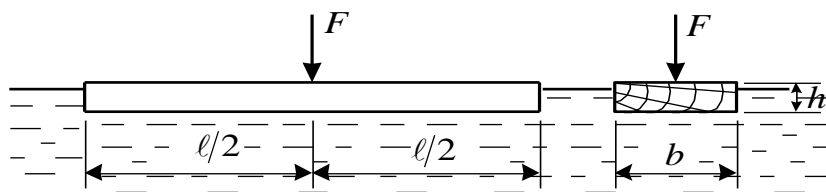


Рис. 7.8. До задачі 7.2.3

Параметр, що характеризує пружні властивості балки і основи,

$$s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{12b\gamma}{4Ebh^3}} = \sqrt[4]{\frac{3\gamma}{Eh^3}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 10 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}}{10^4 \cdot 10^6 \cdot 10^3}} = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}.$$

Щоб вибрати розрахункову схему балки, знайдемо $s\ell = 2,34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 2,34$. Оскільки $1,2 < 2,34 < 4$, розрахунковою схемою буде коротка балка.

Визначаємо початкові параметри. Відмінні від нуля початкові параметри при вільному лівому кінці балки – y_0 і y'_0 . Їх можна визначити або з умов закріплення правого кінця балки, або, урахувавши симетрію схеми завантаження, з умов посередині балки. При $x = \frac{\ell}{2}$ $y'_{\frac{\ell}{2}} = 0$ і

$Q_{\frac{\ell}{2}} = \frac{F}{2}$. Використання цих умов краще з погляду збільшення точності

значень початкових параметрів, що розраховуються, а також зменшення кількості дій при рахуванні. Запишемо рівняння, що враховують ці граничні умови:

$$-4sy_0 Y_{4\frac{s\ell}{2}} + y'_0 Y_{1\frac{s\ell}{2}} = 0,$$

$$4EJs^3 y_0 Y_{2\frac{s\ell}{2}} + 4EJs^2 y'_0 Y_{3\frac{s\ell}{2}} = \frac{F}{2}.$$

Розв'язуючи ці рівняння, одержимо

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_{1\frac{s\ell}{2}} \\ \frac{F}{2} & 4EJs^2 Y_{3\frac{s\ell}{2}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4sY_{4\frac{s\ell}{2}} & Y_{1\frac{s\ell}{2}} \\ 4EJs^3 Y_{2\frac{s\ell}{2}} & 4EJs^2 Y_{3\frac{s\ell}{2}} \end{vmatrix}} = \frac{F Y_{1\frac{s\ell}{2}}}{8EJs^3 \left(4Y_{4\frac{s\ell}{2}} Y_{3\frac{s\ell}{2}} + Y_{1\frac{s\ell}{2}} Y_{2\frac{s\ell}{2}} \right)},$$

$$\frac{y'_0}{s} = \frac{\begin{vmatrix} -4sY_{4\frac{s\ell}{2}} & 0 \\ 4EJs^3 Y_{2\frac{s\ell}{2}} & \frac{F}{2} \end{vmatrix}}{4Y_{4\frac{s\ell}{2}} Y_{3\frac{s\ell}{2}} + Y_{1\frac{s\ell}{2}} Y_{2\frac{s\ell}{2}}} = \frac{F Y_{4\frac{s\ell}{2}}}{8EJs^3 \left(4Y_{4\frac{s\ell}{2}} Y_{3\frac{s\ell}{2}} + Y_{1\frac{s\ell}{2}} Y_{2\frac{s\ell}{2}} \right)}.$$

y'_0 ділиться на s для зручності розрахунків.

Знаходимо функції О.М. Крилова при $\frac{s\ell}{2} = \frac{2,34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{2} = 1,17$:

$$Y_1(1,17) = 0,6891, \quad Y_2(1,17) = 1,0971,$$

$$Y_3(1,17) = 0,6702, \quad Y_4(1,17) = 0,2646$$

і розраховуємо значення початкових параметрів

$$y_0 = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 2,34^3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,6891}{4 \cdot 0,2646 \cdot 0,6702 + 0,6891 \cdot 1,0971} =$$

$$= 2,9267 \frac{0,6891}{1,46535} = 1,3763 \text{ см.}$$

$$\frac{y'_0}{s} = 2,9267 \frac{4 \cdot 0,2646}{1,46535} = 2,1139 \text{ см.}$$

Максимальні прогин і згинальний момент будуть посередині балки.

$$y_{\max} = y_0 Y_{1\frac{s\ell}{2}} + \frac{y'_0}{s} Y_{2\frac{s\ell}{2}} = 1,3763 \cdot 0,6891 + 2,1139 \cdot 1,0971 = 3,27 \text{ см.}$$

$$M_{\max} = 4EJs^2 y_0 Y_{3\frac{s\ell}{2}} + 4EJs^2 \frac{y'_0}{s} Y_{4\frac{s\ell}{2}} = 4EJs^2 \left(y_0 Y_{3\frac{s\ell}{2}} + \frac{y'_0}{s} Y_{4\frac{s\ell}{2}} \right) =$$

$$= 4 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \frac{20 \cdot 10^3}{12} 10^{-8} \cdot 2,34^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 (1,3763 \cdot 0,6702 +$$

$$+ 2,1139 \cdot 0,2646) 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 0,54 \text{ кНм.}$$

Найбільші напруження в брусі

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6M_{\max}}{bh^2} = \frac{6 \cdot 0,54 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 1,62 \text{ МПа.}$$

Необхідно зауважити, що отриманий розв'язок буде правильним тільки в тому випадку, якщо на всій довжині брус верхньою своєю площиною буде виступати над поверхнею води. Тільки в цьому випадку можна вважати реакцію води пропорційною вертикальному зсуву. Таким чином, можливість отриманого розв'язку визначається максимальним переміщенням y_{\max} . За відсутності навантаження балка буде занурена у воду на величину, яка дорівнює $0,6h$ (оскільки її питома вага складає $0,6$ питомої ваги води). Верхня площина бруса піднімається над рівнем води на $0,4h \approx 4 \text{ см}$. Отже, умовою можливості отриманого розв'язку буде $y_{\max} \leq 4 \text{ см}$. У нашому випадку

$$y_{\max} = 3,27 \text{ см} < 4 \text{ см.}$$

7.2.4. Визначимо жорсткість пружної основи:
 $k = b\gamma = 3 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ кПа.}$

Характеристика

$$s = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{30 \cdot 10^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^6}} = \frac{1}{2270} \text{ см}^{-1}.$$

Приведена довжина понтона, як балки, $s\ell = \frac{1000}{2270} = 0,44 < 0,8$. Отже,

понтон можна розраховувати як нескінченно жорстку балку. А це означає, що тиск з боку основи на понтон буде розподілятися по прямій. Нехай осідання біля носу дорівнює y_1 і біля корми y_2 . На рис. 7.9, а показана епюра тиску води на понтон.

Для визначення y_1 і y_2 складаємо рівняння рівноваги:

$$\Sigma y = 0, \quad F - \frac{y_1 + y_2}{2} b\gamma\ell = 0;$$

$$\Sigma M_a = 0, \quad Fa - \frac{b\gamma y_1 \ell^2}{2} - \frac{b\gamma(y_2 - y_1)\ell}{2} \frac{2}{3} \ell = 0.$$

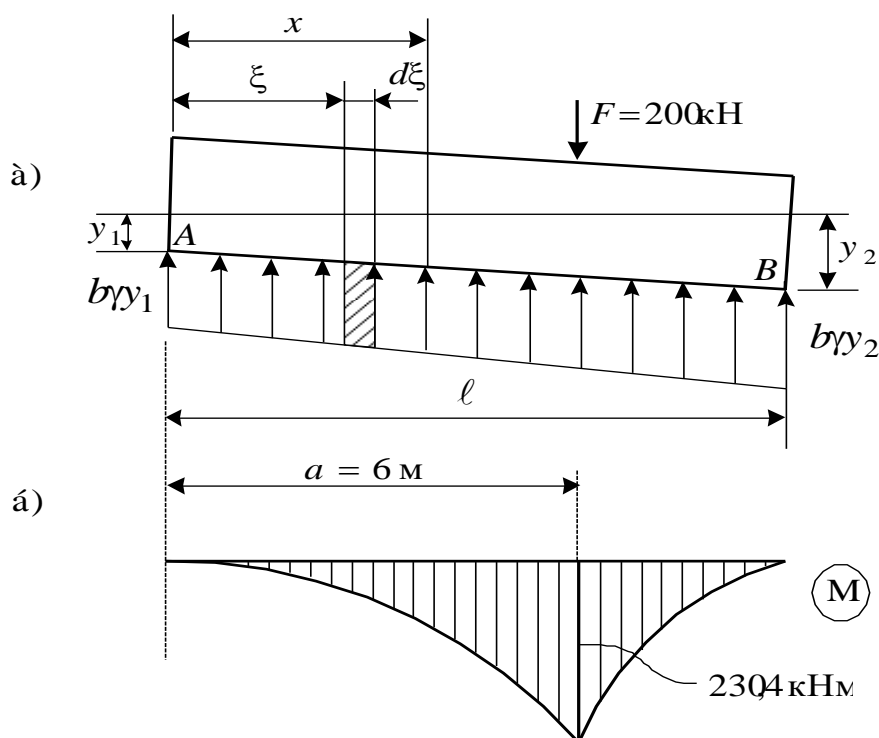


Рис. 7.9. До задачі 7.2.4

Розв'язуючи спільно рівняння, одержимо

$$y_1 = \frac{6F}{b\gamma\ell^2} \left(\frac{2}{3}\ell - a \right) = \frac{6 \cdot 200}{3 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2} \left(\frac{2}{3} \cdot 10 - 6 \right) \cdot 10^2 = 26,67 \approx 27 \text{ см,}$$

$$y_2 = \frac{6F}{b\gamma\ell^2} \left(a - \frac{\ell}{3} \right) = \frac{6 \cdot 200}{3 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2} \left(6 - \frac{10}{3} \right) \cdot 10^2 = 106,67 \approx 107 \text{ см.}$$

Якщо знати осідання понтона, одержуємо інтенсивність тиску води на понтон $q = b\gamma \left[y_1 + (y_2 - y) \frac{x}{\ell} \right]$.

Згинальний момент на ділянці I понтона (див. рис. 7.9, а)

$$M^I(x) = \int_0^x (x - \xi) q d\xi = \frac{F}{\ell^2} x^2 \left[2\ell - 3a + \left(\frac{2a}{\ell} - 1 \right) x \right].$$

На ділянці II

$$M^{II}(x) = M^I(x) - F(x - a) = \frac{F}{\ell^2} x^2 \left[2\ell - 3a + \left(\frac{2a}{\ell} - 1 \right) x \right] - F(x - a).$$

За цими рівняннями будуюмо епюру згинальних моментів (рис.7.9,б). Максимальний момент під силою F (при $x = a$)

$$M_{\max} = \frac{2Fa^2}{\ell^2} \left(\ell - 2a + \frac{a^2}{\ell} \right) = \frac{2 \cdot 200 \cdot 6^2}{10^2} \left(10 - 2 \cdot 6 + \frac{6^2}{10} \right) = 230,4 \text{ кНм.}$$

Розділ 8

8.2.1. Знайдемо положення нейтральної осі, якщо вантажна площина $p-p$ проходить через діагональ перерізу (рис. 8.8).

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{bh^3 \cdot 12}{12 \cdot hb^3} \cdot \frac{b}{h} = -\frac{h}{b}.$$

Нейтральна вісь збігається з іншою діагоналлю перерізу.

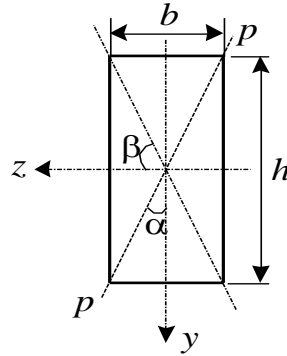


Рис. 8.8. До задачі 8.2.1

8.2.2. Найбільше напруження в балці буде (рис. 8.9)

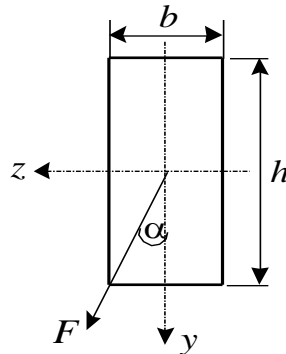


Рис. 8.9. До задачі 8.2.2

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= M_{\max} \left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) = M_{\max} \left(\frac{6 \cos \alpha}{bh^2} + \frac{6 \sin \alpha}{hb^2} \right) = \\ &= \frac{6M_{\max}}{b^2h^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha) = \frac{6M_{\max}}{A^2} (b \cos \alpha + h \sin \alpha). \end{aligned} \quad (8.1)$$

З умови міцності за нормальними напруженнями $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.
З огляду на це із (8.1) площа перерізу буде

$$A^2 \geq \frac{6M_{\max}}{[\sigma]} (h \sin \alpha + b \cos \alpha).$$

Замінімо "b" через $\frac{A}{h}$ і позначимо для краткості $\frac{6M_{\max}}{[\sigma]}$ через C:

$$A^2 = C \left(h \sin \alpha + \frac{A}{h} \cos \alpha \right)$$

або

$$A^2 - \frac{C \cos \alpha}{h} A - Ch \sin \alpha = 0. \quad (8.2)$$

Ліва частина отриманої рівності є функцією h і A :

$$f(h, A) = 0,$$

причому A у свою чергу залежить від h . Для того щоб знайти мінімум A , знайдемо похідну $\frac{dA}{dh}$ за правилом диференціювання неявної функції і прирівняємо до нуля:

$$\frac{dA}{dh} = - \frac{\frac{df}{dh}}{\frac{df}{dA}} = 0.$$

Отримана рівність буде задовільнена, якщо $\frac{df}{dh} = 0$, тобто

$$\frac{C \cos \alpha}{h^2} A - C \sin \alpha = 0.$$

Звідси $A = h^2 \operatorname{tg} \alpha$ або

$$bh = h^2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.3)$$

Отже, шукане співвідношення сторін перерізу

$$\frac{b}{h} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Необхідна висота перерізу визначиться з рівностей (8.2) і (8.3)

$$h = \sqrt[3]{\frac{2C \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \sqrt[3]{\frac{12M_{\max} \cos^2 \alpha}{[\sigma] \sin \alpha}}.$$

Неважко переконатися, що інші дві умови існування мінімуму, а саме

$$\frac{df}{dA} \neq 0 \quad \text{і} \quad \frac{\frac{d^2 f}{dh^2}}{\frac{df}{dA}} > 0,$$

задовольняються.

8.2.3. Знайдемо геометричні характеристики посиленого перерізу (рис. 8.10, б) (дод. 2):

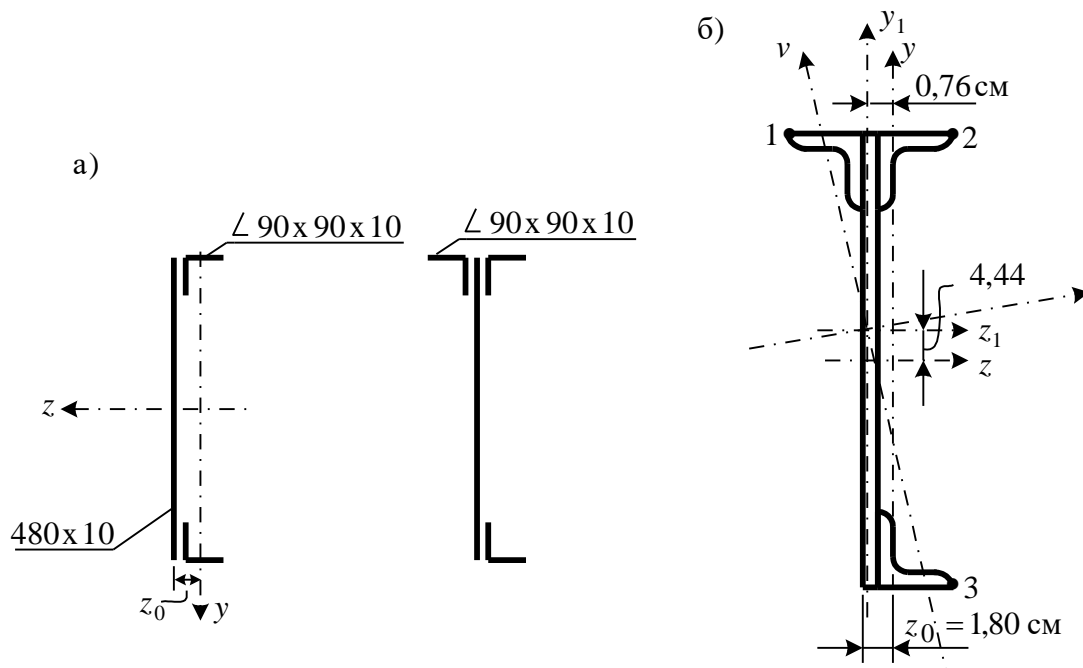


Рис. 8.10. До задачі 8.2.3

– площа $A_1 = 98,4 + 19,2 = 117,6 \text{ см}^2$, координати центра тяжіння відносно осей yoz

$$y_c = \frac{S_z}{A_1} = \frac{19,2(30 - 2,83)}{117,6} = 4,44 \text{ см},$$

$$z_c = \frac{S_y}{A_1} = \frac{-19,2(2,83 + 1,80)}{117,6} = -0,76 \text{ см};$$

– осьові моменти інерції

$$J_z = 49735 + 98,4 \cdot 4,44^2 + 179 + 19,2(30 - 2,83 - 4,44)^2 = 61774 \text{ см}^4,$$

$$J_y = 623 + 98,4 \cdot 0,76^2 + 179 + 19,2(2,83 + 1,80 - 0,76)^2 = 1146 \text{ см}^4;$$

– відцентровий момент інерції

$$J_{zy} = -98,4 \cdot 4,44 \cdot 0,76 - \frac{284 + 74,1}{2} -$$

$$-19,2(30 - 2,83 - 4,44) (2,83 + 1,80 - 0,76) = -2200 \text{ см}^4,$$

– кут нахилу головних осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2(-2200)}{61774 - 1146} = 0,0726, \quad 2\alpha_0 = 4,15^\circ, \quad \alpha_0 = 2,08^\circ;$$

– головні моменти інерції

$$J_{u, v} = \frac{61774 + 1146}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(61774 - 1146)^2 + 4 \cdot 2200^2} = \begin{cases} 61854 \text{ нм}^4, \\ 1066 \text{ нм}^4; \end{cases}$$

– координати найбільш віддалених точок

$$v_1 = y_1 \cos \alpha_0 - z_1 \sin \alpha_0 = (30 - 4,44) \cdot 0,9993 + (10 + 1,80 - 0,76) \times \\ \times 0,0362 = 25,14 \text{ см},$$

$$u_1 = y \sin \alpha_0 + z \cos \alpha_0 = (30 - 4,44)0,0362 - (10 + 1,80 - 0,76) \times \\ \times 0,9993 = -10,11 \text{ см},$$

$$v_2 = (30 - 4,44)0,9993 - (10 + 1 - 1,8 + 0,76)0,0362 = 25,18 \text{ см},$$

$$u_2 = 25,56 \cdot 0,0362 + 9,96 \cdot 0,9993 = 10,88 \text{ см},$$

$$v_3 = -(30 + 4,44)0,9993 - 9,96 \cdot 0,0362 = -34,78 \text{ см},$$

$$u_3 = -34,44 \cdot 0,0362 + 9,96 \cdot 0,9993 = 8,71 \text{ см}.$$

Найбільш напруженою точкою буде, скоріш за все, точка 2. Нормальні напруження в ній

$$\sigma_2 = M_{\max} \left(-\frac{v_2 \cos \alpha}{J_u} - \frac{u_2 \sin \alpha}{J_v} \right) = M_{\max} \left(-\frac{25,18 \cdot 0,9993}{61854} - \frac{10,88 \cdot 0,0362}{1066} \right) = \\ = -7,76 \cdot 10^{-4} M_{\max}.$$

До посилення

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\max} = \frac{M_{\max}}{49735} 30 = 6,03 \cdot 10^{-4} M_{\max}.$$

Отже,

$$\sigma_2 = \left| \frac{7,76 \cdot 10^{-4}}{6,03 \cdot 10^{-4}} \right| \sigma_{\max} = 1,29 \sigma_{\max}.$$

Таким чином, при подібному “посиленні” напруження не зменшилися, як очікувалося, а збільшилися приблизно на 30 %. Відбулося не посилення, а ослаблення перерізу, через зміну виду напруженого стану. До посилення балка відчувала плоске згинання, а після – косе. При посиленні необхідно стежити за тим, щоб не змінювався вид напруженого стану.

8.2.4. Під дією навантаження балка відчуває згинання у двох площинах, причому вигнута вісь її буде просторовою кривою, тому що відношення $\frac{M_y}{M_z}$ змінюється за довжиною балки (рис. 8.11).

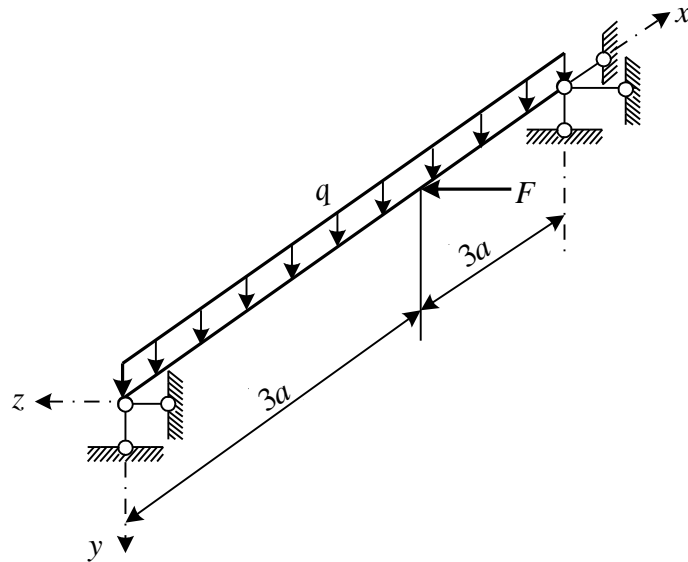


Рис. 8.11. До задачі 8.2.4

Напруження в балці знайдеться за формулою

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

де

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{k^2 b^3}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{k b^3}{6}.$$

Тоді

$$\sigma = \frac{6}{k^2 b^3} (M_z + kM_y). \quad (8.4)$$

Найбільші напруження будуть виникати в небезпечному перерізі. Для того щоб знайти небезпечний переріз, необхідно побудувати окремо епюри M_z і M_y . Опорні реакції

$$R_a = R_b = \frac{q4a}{2} = 2qa;$$

$$H_a = \frac{F a}{4a} = \frac{2qa^2}{4a} = 0,5qa;$$

$$H_b = 1,5qa.$$

Епюри показані на рис. 8.12. Співставляючи обидві епюри, бачимо, що абсциса небезпечного перерізу лежить між значеннями $x_1 = 2a$ і $x_2 = 3a$:

$$2a \leq x \leq 3a.$$

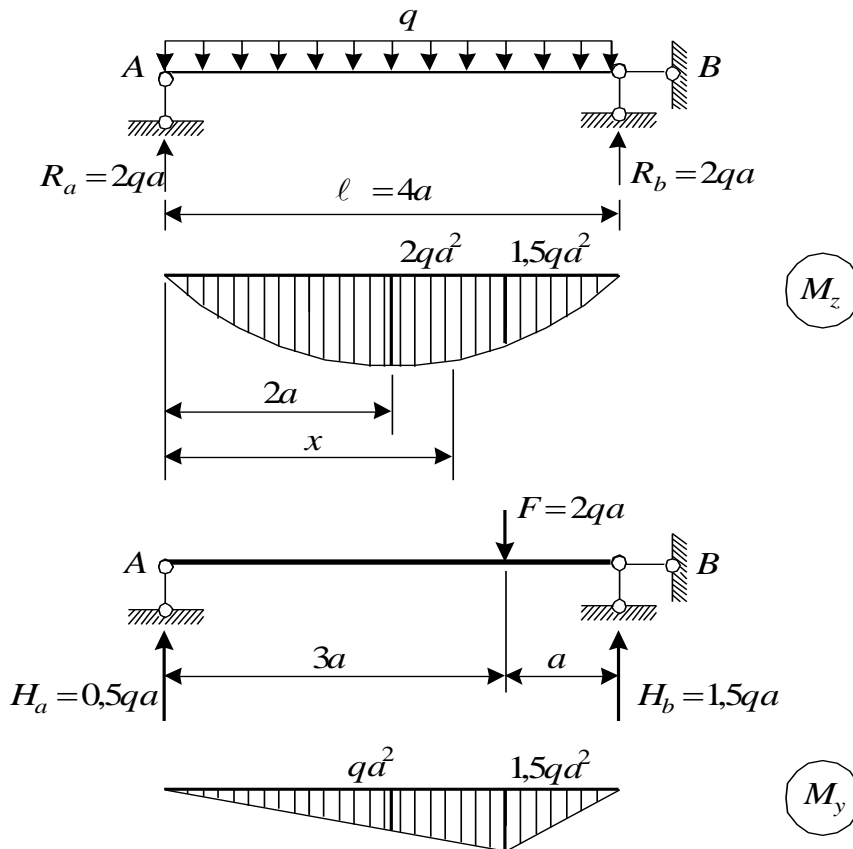


Рис. 8.12. До задачі 8.2.4

Формули M_z і M_y залежно від абсциси x будуть такими:

$$M_z = R_a x - \frac{qx^2}{2} = 2qax - \frac{qx^2}{2},$$

$$M_y = H_a x = 0,5qax.$$

Для того щоб знайти положення небезпечного перерізу, де нормальне напруження буде найбільшим, першу похідну від (8.4) прирівняємо до нуля:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{6}{k^2 b^3} \left(\frac{dM_z}{dx} + k \frac{dM_y}{dx} \right) = 0.$$

Підставляючи сюди формули M_z і M_y , одержуємо значення абсциси небезпечного перерізу:

$$x = 2a + \frac{ka}{2}.$$

Звідси очевидно, що положення небезпечного перерізу залежить не тільки від характеристики і розподілу навантаження, але і від співвідношення сторін перерізу, і тому небезпечний переріз взагалі не збігається з перерізом, у якому результуючий момент $M_p = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ досягає максимуму. При співвідношенні сторін $k = 2$

$$x = 3a; \quad \sigma_{\max} = \frac{6,75qa^2}{b^3}.$$

8.2.5. З умови міцності при косому згинанні

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \leq [\sigma]$$

вантажопідйомність балки

$$M \leq \frac{[\sigma]}{\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y}}.$$

Знайдемо значення кута нахилу вантажної площини α (рис. 8.13), при якому вантажопідйомність буде найменшою. Для чого знайдемо першу похідну $\frac{dM}{d\alpha}$ і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dM}{d\alpha} = - \frac{[\sigma] \left(-\frac{\sin \alpha}{W_z} + \frac{\cos \alpha}{W_y} \right)}{\left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^2} = 0. \quad (8.5)$$

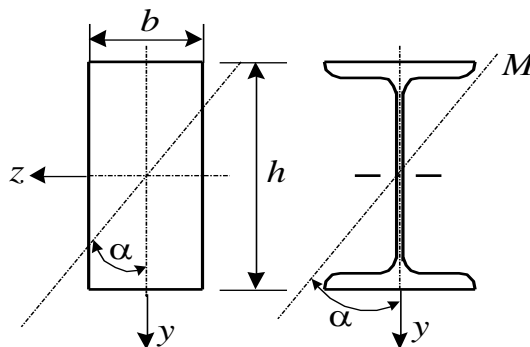


Рис. 8.13. До задачі 8.2.5

Знаменник при будь-яких α завжди більший нуля, отже, чисельник повинен дорівнювати нулю

$$-\frac{\sin \alpha}{W_z} + \frac{\cos \alpha}{W_y} = 0.$$

Якщо поділити все на $\frac{\cos \alpha}{W_z}$, маємо

$$-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{W_z}{W_y} = 0,$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_z}{W_y} = n.$$

В окремому випадку для прямокутного перерізу

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b} = n.$$

Кут нахилу α вантажної площини до осі y буде

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} n.$$

Для того щоб переконатися, що при цьому α вантажопідйомність буде найменшою, знайдемо знак другої похідної. Коли беремо другу похідну, використовуємо формулу (8.5) першої похідної:

$$\frac{d^2 M}{d\alpha^2} = -[\sigma] \left[\frac{\left(-\frac{\cos \alpha}{W_z} - \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^2}{\left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^4} - \frac{2 \left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right) \left(-\frac{\sin \alpha}{W_z} + \frac{\cos \alpha}{W_y} \right)^2}{\left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)^4} \right].$$

Аналізуємо отриманий вираз. У чисельнику з першої дужки виносимо знак мінус і змінюємо всі знаки на додатні. Тоді в чисельнику маємо два додатних доданки, знаменник теж число додатне при будь-яких α . Отже,

$$\frac{d^2 M}{d\alpha^2} > 0,$$

а вантажопідйомність дійсно буде найменшою. Цікаво зауважити, що при цьому вантажопідйомність балки нижча від вантажопідйомності її при плоскому згинанні в горизонтальній площині. Це співвідношення матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{M_y}{M} &= \frac{W_y [\sigma] \left(\frac{\cos \alpha}{W_z} + \frac{\sin \alpha}{W_y} \right)}{[\sigma]} = \cos \alpha \frac{W_y}{W_z} + \sin \alpha = \sin \alpha \left(\frac{W_y \cos \alpha}{W_z \sin \alpha} + 1 \right) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1 \right) = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}. \end{aligned}$$

Таким чином, чим більший високий переріз, тим менше це співвідношення. Для двотавра (дод. 2) кут змінюється від $80^{\circ}42'56''$ (№ 10) до $85^{\circ}56'$ (№ 60), а вантажопідйомність відповідно знижується на 1,33 % (№ 10) і 0,25 % (№ 60).

8.2.6. Спочатку обчислимо геометричні характеристики перерізу балки (рис. 8.14, б). Центр тяжіння перерізу відносно осі z_1 (рис. 8.14, б)

$$y_0 = \frac{S_{z_1}}{A},$$

де

$$\begin{aligned} S_{z_1} &= \int_A y dA = \int_A b(y) y dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi d\varphi = 4r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= 4r^3 \frac{\sin^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r^3}{3}. \end{aligned}$$

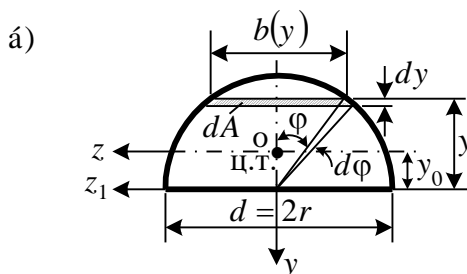
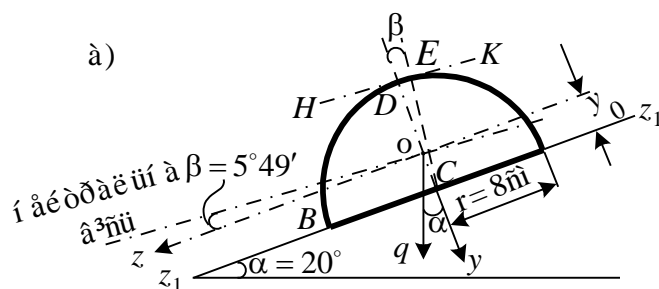


Рис. 8.14. До задачі 8.2.6

Тоді

$$y_0 = \frac{4r^3}{3\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 3,14} = 3,4 \text{ см.}$$

Моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей

$$J_y = \frac{1}{2} \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{8} = 1608 \text{ см}^4,$$

$$J_z = J_{z_1} - Ay_0^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi r^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 8^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9 \cdot 3,14^2} \right) = 450 \text{ см}^4.$$

Кут нахилу нейтральної осі до осі z

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha = \frac{450}{1608} \operatorname{tg} 20^\circ = 0,1019;$$

кут $\beta = 5^\circ 49'$; $\cos \beta = 0,995$; $\sin \beta = 0,1013$.

Найбільші нормальні напруження виникнуть у точках, найбільш віддалених від нейтральної осі; це будуть точки В і Е (точка, у якій лінія НК, паралельна нейтральній осі, торкається контуру перерізу).

Нормальні напруження в небезпечному перерізі балки (посередині її прогону) визначаємо за формулою

$$\sigma = M_{\max} \left(\frac{\cos \alpha}{J_z} y + \frac{\sin \alpha}{J_y} z \right).$$

Оскільки

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 2^2}{8} = 1 \text{ кНм},$$

то

$$\sigma = 1 \cdot 10^3 \left(\frac{0,940}{450} y + \frac{0,342}{1608} z \right) 10^8 \cdot 10^{-6} = 208,89y + 21,27z \text{ (МПа)}.$$

Нормальні напруження в точці В з координатами $y_b = y_0 = 3,4 \text{ см}$ і $z_b = r = 8 \text{ см}$ будуть розтягувальними, вони дорівнюють

$$\sigma_b = 208,89 y_b + 21,27 z_b = 208,89 \cdot 3,4 \cdot 10^{-2} + 21,27 \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 8,80 \text{ МПа}.$$

Координати точки Е

$$|y_e| = OE = CD - OC = r \cos \beta - y_0 = 8 \cdot 0,995 - 3,4 = 4,56 \text{ см}$$

і

$$|z_e| = ED = CE \sin \alpha = r \sin \alpha = 8 \cdot 0,1013 = 0,81 \text{ см},$$

обидві координати від'ємні, напруження в точці Е буде стискальним, воно дорівнює

$$\sigma_e = 208,89 y_e + 21,27 z_e = -208,89 \cdot 4,56 \cdot 10^{-2} - 21,27 \cdot 0,81 \cdot 10^{-2} = -9,70 \text{ МПа}.$$

Розділ 9

9.2.1. При завантаженні стержня АВ симетрично двома однаковими силами F він буде відчувати просту деформацію плоского згинання (рис. 9.6). Максимальний згинальний момент у перерізі В буде дорівнювати

$$M_u = 2F\ell = 2 \cdot 1 \cdot 40 \cdot 10^{-2} = 0,8 \text{ кНм.}$$

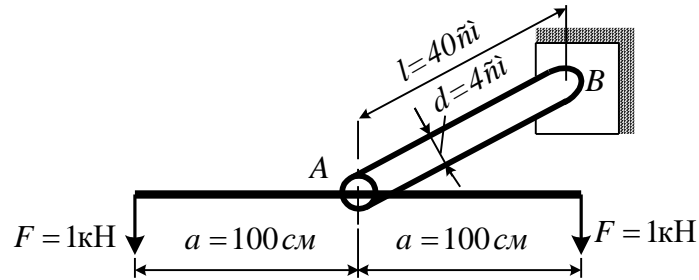


Рис. 9.6. До задачі 9.2.1

Осьовий момент опору перерізу стержня

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}}{32} = 6,283 \cdot 10^{-6} \text{ м.}^3$$

Розрахункове напруження при цьому буде

$$\sigma_u = \frac{M_u}{W} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{6,283 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 127,3 \text{ МПа.}$$

Якщо зняти один з вантажів, то стержень уже буде відчувати складний опір, як-от вигин з крутінням.

Згинальний момент буде у два рази меншим, ніж у першому випадку,

$$M_u = F\ell = 1 \cdot 40 \cdot 10^{-2} = 0,4 \text{ кНм,}$$

а крутний дорівнюватиме

$$M_k = Fa = 1 \cdot 100 \cdot 10^{-2} = 1 \text{ кНм.}$$

За четвертою, енергетичною, теорією міцності розрахунковий момент у небезпечному перерізі В буде

$$M_{p4} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_k^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,75 \cdot 1^2} = 0,954 \text{ кНм,}$$

а розрахункове напруження

$$\sigma_{p4} = \frac{M_{p4}}{W} = \frac{0,954 \cdot 10^3}{6 \cdot 283 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 151,8 \text{ МПа.}$$

Напруження при згинанні з крученням, коли діє одна сила, більше від напруження при плоскому згинанні, коли діють дві такі сили

$$\sigma_{p4} > \sigma_u, \quad 151,8 > 127,4,$$

на $\frac{151,8 - 127,4}{127,4} 100 = 19\%$.

Із зроблених розрахунків видно, що не при кожному зменшенні навантаження розрахункові напруження зменшуються. Це буде відбуватися тільки в тому випадку, якщо при зменшенні навантаження не буде змінюватися вид напруженого стану.

9.2.2. Розрахункове напруження за третьою теорією – теорією найбільших дотичних напружень – має вигляд (рис. 9.7)

$$\sigma_{p3} = \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_{кр}^2}.$$

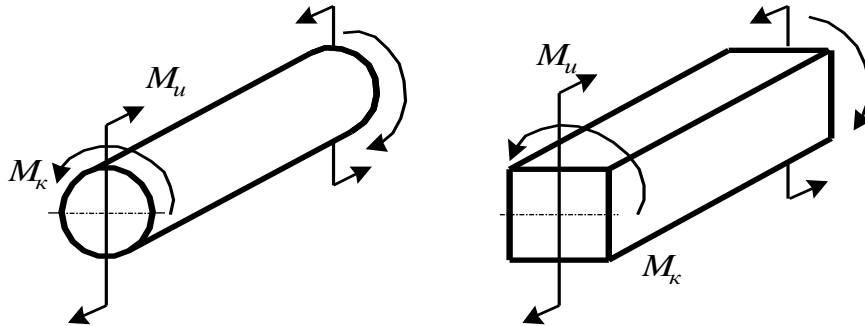


Рис. 9.7. До задач 9.2.2 і 9.2.3

Піднесемо обидві частини рівності в другий ступінь і запишемо напруження правої частини через статичні величини і геометричні характеристики:

$$\sigma_{p3}^2 = \left(\frac{M_u}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{W_{кр}}\right)^2.$$

Запишемо ці вирази для бруса круглого перерізу, замінивши моменти опору через діаметр перерізу d і з огляду на задану умову $M_u = 3M_{кр}$:

$$\left(\sigma_{p3}^{кр}\right)^2 = \left(\frac{32 M_u}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16 M_{кр}}{\pi d^3}\right)^2 = \frac{10240 M_u^2}{9\pi^2 d^6},$$

або

$$\left(\sigma_{p3}^{кр}\right)^2 = 55,85 \frac{M_u^2}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^3} = 55,85 \frac{M_u^2}{A_{кр}^3}. \quad (9.1)$$

Для бруса квадратного перерізу з розмірами $a \times a$

$$\left(\sigma_{p3}^{кв}\right)^2 = \left(\frac{6M_u}{a^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{\beta a^3}\right)^2 = 46,27 \frac{M_u^2}{A_{кв}^3}, \quad (9.2)$$

де $\beta = 0,208$ (табл. 2.1, с. 11), $A_{кв} = a^2$.

Через рівномірність обох брусів

$$55,85 \frac{M_u^2}{A_{кр}^3} = 46,27 \frac{M_u^2}{A_{кв}^3}.$$

Звідки

$$A_{кв} = \sqrt[3]{\frac{46,27}{55,85}} A_{кр} = 0,94 A_{кр}.$$

Таким чином, при рівності довжин брус квадратного перерізу легший на 6 %.

9.2.3. Розрахункове напруження для бруса круглого перерізу за теорією найбільших дотичних напружень (див. рис. 9.7) складає

$$\sigma_{p3}^{кр} = \frac{M_p}{W} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}}{W} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}; \quad (3.3)$$

для бруса квадратного перерізу

$$\sigma_{p3}^{кв} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{W_{кр}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6M_u}{a^3}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{0,208a^3}\right)^2}, \quad (9.4)$$

де $W_{кр} = \beta a^3 = 0,208 a^3$ (табл. 2.1, с.11).

Оскільки бруси мають однакові вагу і довжину, то і площі перерізів у них дорівнюють одна одній

$$\frac{\pi d^2}{4} = a^2,$$

або

$$a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} d. \quad (9.5)$$

Тоді

$$\sigma_{p3}^{кв} = \sqrt{\frac{2304 M_u^2}{\pi^3 d^6} + \frac{5917 M_{кр}^2}{\pi^3 d^6}}.$$

Прирівняємо формули розрахункових напружень для двох видів брусів, підведемо кожне з них у квадрат:

$$\frac{1024}{\pi^2 d^6} (M_u^2 + M_{кр}^2) = \frac{1024}{\pi^2 d^6} \left(\frac{2,25 M_u^2}{\pi} + \frac{5,78 M_{кр}^2}{\pi} \right),$$

звідки

$$M_u^2 + M_{кр}^2 = \frac{2,25 M_u^2}{\pi} + \frac{5,78 M_{кр}^2}{\pi},$$

або

$$\left(1 - \frac{2,25}{\pi}\right) M_u^2 = \left(\frac{5,78}{\pi} - 1\right) M_{кр}^2.$$

Співвідношення між згинальним і крутним моментами буде

$$\frac{M_u}{M_{кр}} = \sqrt{\frac{5,78 - \pi}{\pi - 2,25}} = 1,72.$$

Звідси маємо, що при $\frac{M_u}{M_{кр}} < 1,72$ більш міцним є брус круглого перерізу, а при $\frac{M_u}{M_{кр}} > 1,72$ – більш міцним брус квадратного перерізу.

9.2.4. Задача щодо визначення зусиль у скобі є статично невизначною. У кожній опорі, що защемляє, буде виникати по три опорних складових реактивних зусилля - вертикальні реакції R_a, R_b , згинальні моменти M_a^u, M_b^u , крутні моменти $M_a^{кр}, M_b^{кр}$. Внаслідок симетрії системи і симетричного впливу навантаження

$$R_a = R_b, M_a^u = M_b^u, M_a^{кр} = -M_b^{кр}.$$

З умов рівноваги легко визначаються

$$R_a = R_b = \frac{F}{2} = 0,4 \text{ кН}, M_a^u = M_b^u = \frac{1}{2}F \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{F\ell}{4} = \frac{0,8 \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,08 \text{ кНм}.$$

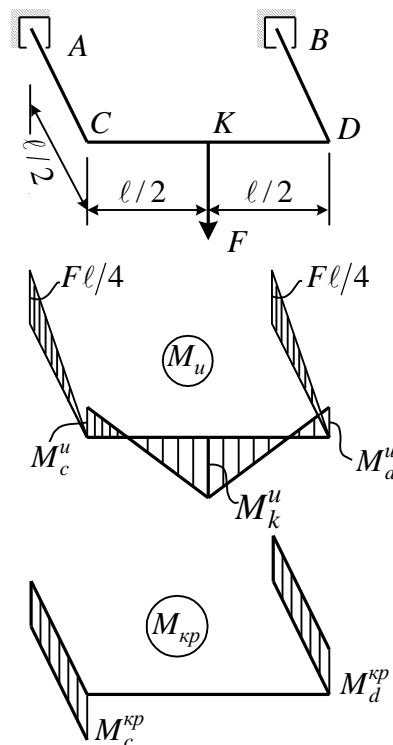


Рис. 9.8. До задачі 9.2.4

Для визначення опорних крутних моментів необхідно скласти додаткове рівняння – рівняння сумісності деформацій. Покажемо вид епюр згинальних і крутних моментів (рис. 9.8). З умови рівноваги вузла С маємо

$M_c^{kp} = M_c^u = M$. Аналогічно для D. Під дією крутного моменту M_c^{kp} стержень AC зазнає деформацію кручення, а стержень CD під дією згинального моменту M_c^u і зовнішньої сили F згинається. Через нерозривність деформацій кут закручування стержня AC у С повинен дорівнювати куту нахилу дотичної до пружної лінії на кінці С балки CD:

$$\varphi_c^{kp} = \varphi_c^u. \quad (9.6)$$

Кут закручування

$$\varphi_c^{kp} = -\frac{M_c^{kp} \frac{\ell}{2}}{GJ_\rho} = -\frac{M\ell}{2GJ_\rho}.$$

Для знаходження кута повороту перерізу С в балці CD виділимо її і застосуємо графоаналітичний метод (рис. 9.9):

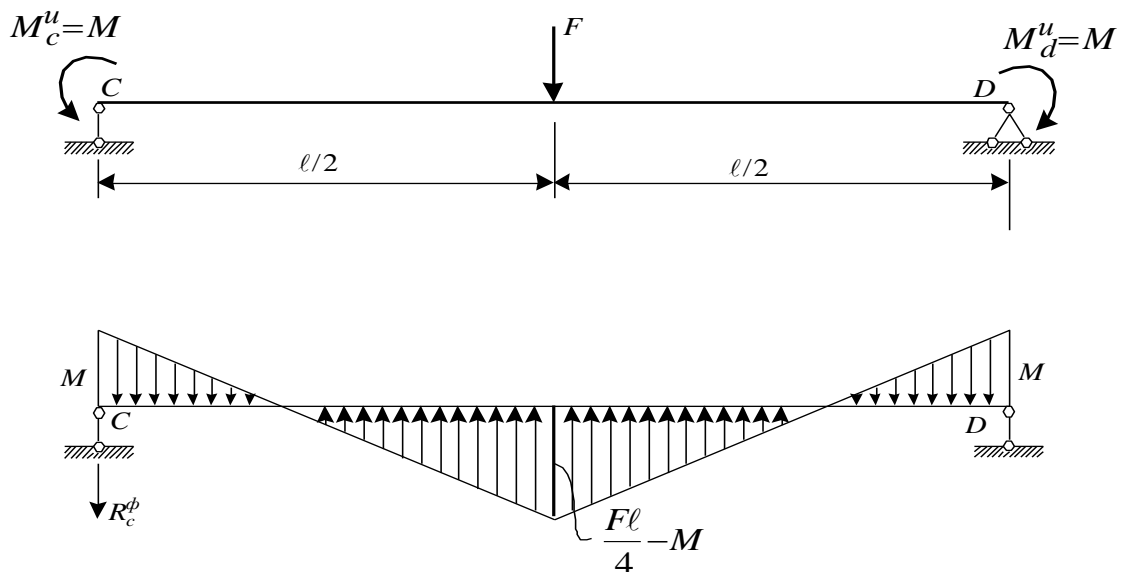


Рис. 9.9. До задачі 9.2.4

$$\varphi_c^u = \frac{Q_c^\phi}{EJ} = -\frac{R_c^\phi}{EJ}.$$

Але $R_c^\phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{F\ell}{4} \cdot \ell - \frac{M\ell}{2},$

тоді

$$\varphi_c^u = -\frac{F\ell^2}{16EJ} + \frac{M\ell}{2EJ}.$$

Підставляємо в умову (9.6) значення кутів:

$$-\frac{M\ell}{2GJ_\rho} = -\frac{F\ell^2}{16EJ} + \frac{M\ell}{2EJ}.$$

Приймаючи до уваги показане в умові задачі співвідношення між G і E і помічаючи, що для круглого перерізу $J_\rho = 2J$, знайдемо

$$M = \frac{F\ell}{18} = \frac{0,8 \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{18} = 0,0178 \text{ кНм.}$$

Найбільший згинальний момент у перерізах А і В дорівнює

$$M_{a,b}^u = \frac{F\ell}{4} = \frac{0,8 \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,08 \text{ кНм.}$$

На ділянці CD скоби найбільший згинальний момент має значення $M_\kappa^u = \frac{F\ell}{4} - M$, отже, небезпечними перерізами будуть А і В. З умови міцності за теорією найбільших дотичних напружень маємо

$$\sigma = \frac{M_p}{W} = \frac{32\sqrt{M_u^2 + M_{\kappa p}^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma],$$

звідки

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_u^2 + M_{\kappa p}^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(0,08^2 + 0,0178^2)} \cdot 10^6}{3,14 \cdot 120 \cdot 10^6}} 10^2 = 1,91 \text{ см} \approx 20 \text{ мм.}$$

Розділ 10

10.2.1. Знайдемо величину і точку прикладання рівнодіючої сил F_1 і F_2 . Величина рівнодіючої сили дорівнює сумі сил

$$R = F_1 + F_2 = 10 + 30 = 40 \text{ кН.}$$

Точка прикладання рівнодіючої лежить на прямій, яка з'єднує точки прикладання сил F_1 і F_2 . Оскільки переріз симетричний, а точки прикладання сил розташовані кососиметрично відносно осей uz , ця пряма пройде через початок координат (рис. 10.5). На підставі теореми, що момент рівнодіючої дорівнює сумі моментів сил складових відносно довільної точки, одержимо

$$R \cdot Oc = F_2 Ob - F_1 Oa$$

і

$$Oc = \frac{F_2 Ob - F_1 Oa}{R} = \frac{F_2 - F_1}{R} Ob = \frac{30 - 10}{40} Ob = 0,5 Ob.$$

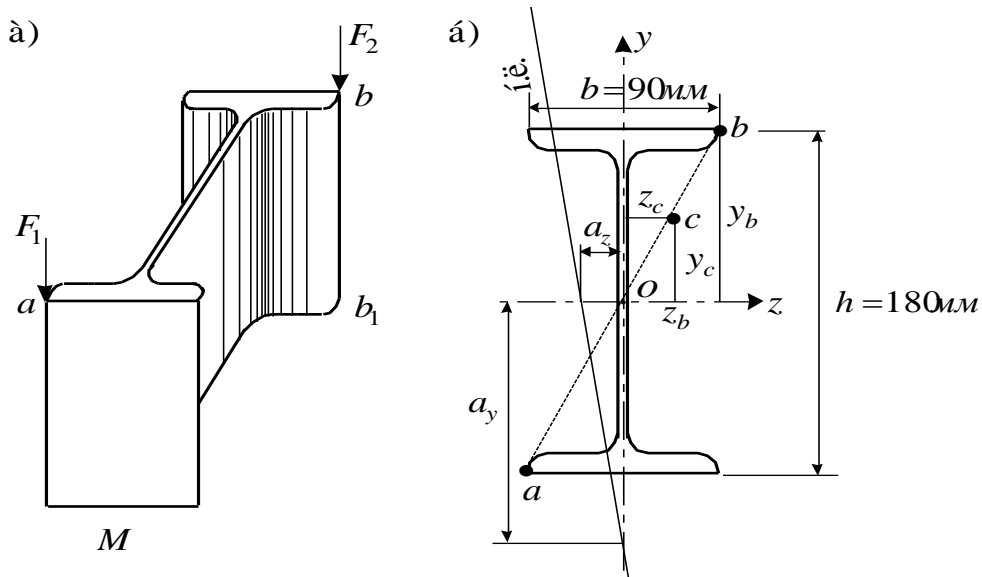


Рис. 10.5. До задачі 10.2.1

Звідси маємо, що координати точки прикладання рівнодіючої будуть дорівнювати половині значень координат точки "b" прикладання сили F_2 .

Якщо $y_b = \frac{180}{2} = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см}$, а $z_b = \frac{90}{2} = 45 \text{ мм} = 4,5 \text{ см}$, то $y_c = 0,5y_b = 4,5 \text{ см}$, а $z_c = 0,5z_b = 2,25 \text{ см}$.

Положення нульової лінії визначиться відрізками, що відтинаються нею на осях координат,

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_c} = -\frac{7,42^2}{4,5} = -12,23 \text{ см},$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_c} = -\frac{1,88^2}{2,25} = -1,57 \text{ см}.$$

Найбільше нормальне напруження буде виникати в точці перерізу M , найбільш віддаленій від нульової лінії. Це точка "b₁", що лежить на одній вертикалі з "b" (рис. 10.5, а). Напруження в ній дорівнює

$$\begin{aligned} \sigma_{b_1} &= -\frac{R}{A} \left(1 + \frac{z_c z_{b_1}}{i_y^2} + \frac{y_c y_{b_1}}{i_z^2} \right) = -\frac{40 \cdot 10^3}{23,4 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{2,25 \cdot 4,5}{1,88^2} + \frac{4,5 \cdot 9}{7,42^2} \right) 10^{-6} = \\ &= 78,6 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

10.2.2. Стояк до посилення зазнає деформації центрального стиску (рис. 10.6). Нормальні напруження в ньому будуть

$$\sigma_1 = -\frac{F}{A_1} = -\frac{1800 \cdot 10^3}{118 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = -152,5 \text{ МПа}.$$

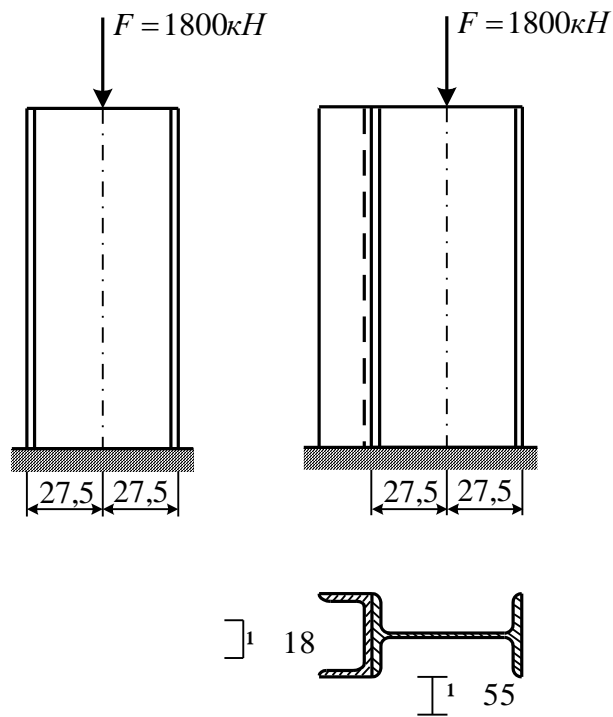


Рис. 10.6. До задачі 10.2.2

Для визначення напруження в посиленому стояку необхідно знайти геометричні характеристики посиленого перерізу (рис. 10.7) (дод. 2).

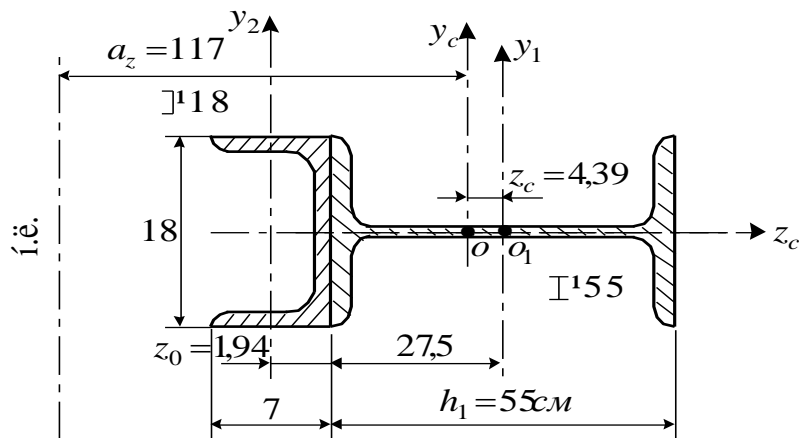


Рис. 10.7. До задачі 10.2.2

Положення центра тяжіння відносно осі y_1

$$z_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{-20,7(1,94 + 27,5)}{20,7 + 118} = -4,39 \text{ см.}$$

Вісь z є загальною для обох перерізів. Обчислюємо осьовий момент інерції складового перерізу:

$$J_{y_2} = J_{y_1} + A_1 z_c^2 + J_{y_z} + A_2 \left(z_0 + \frac{h_1}{2} - z_c \right)^2 =$$

$$= 55962 + 118 \cdot 4,39^2 + 86 + 20,7 (1,94 + 27,5 - 4,39)^2 = 71311 \text{ см}^4.$$

Квадрат радіуса інерції становить:

$$i_{y_c}^2 = \frac{J_{y_c}}{A} = \frac{71311}{20,7 + 118} = 514 \text{ см}^2.$$

Нульова лінія перерізу дорівнює

$$a_z = -\frac{i_{y_c}^2}{z_c} = -\frac{514}{4,39} = -117 \text{ см}.$$

Якщо точка прикладання сили залишається колишньою – посередині двотавра, найбільші напруження будуть виникати в правій кромці двотавра:

$$\sigma_2 = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_c \cdot z}{i_{y_c}^2} \right) = -\frac{1800 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{138,7 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{4,39 (4,39 + 27,5)}{514} \right) = -165,1 \text{ МПа}.$$

Як бачимо, напруження збільшилися, а при посиленні очікувалося їхнє зменшення. Таким чином, так посилення робити не можна. При посиленні повинен залишатися початковий вигляд напруженого стану. А для цього або посилення необхідно виконувати симетричним збільшенням площі, або, якщо можливо, змінити точку прикладання сили, помістивши її в центр ваги нового перерізу. Тоді

$$\sigma = \frac{F}{A} = -\frac{1800 \cdot 10^3}{138,7 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = -129,8 \text{ МПа} < -152,5.$$

10.2.3. Визначимо величину і точку прикладання рівнодіючих усіх сил, що передаються на опору. Навантаження від ваги бика і всіх прогонових будівель

$$F_1 = F_G + F_{пр} = 32000 + 4 \cdot 1200 = 36800 \text{ кН}$$

і прикладене в середній точці опори з координатами $y_1 = 0$, $z_1 = 0$. Навантаження від ваги потяга передається в точках 1 і 2

$$F_2 = 2 \cdot 2100 = 4200 \text{ кН},$$

точка прикладання рівнодіючого цього навантаження розташована на лінії між точками 1 і 2 посередині цієї лінії. Координати точки прикладання F_2 будуть

$$y_2 = 0,8 + \frac{4,9}{2} = 3,25 \text{ м}; \quad z_2 = 1,3 \text{ м} \quad (\text{див. рис. 10.8}).$$

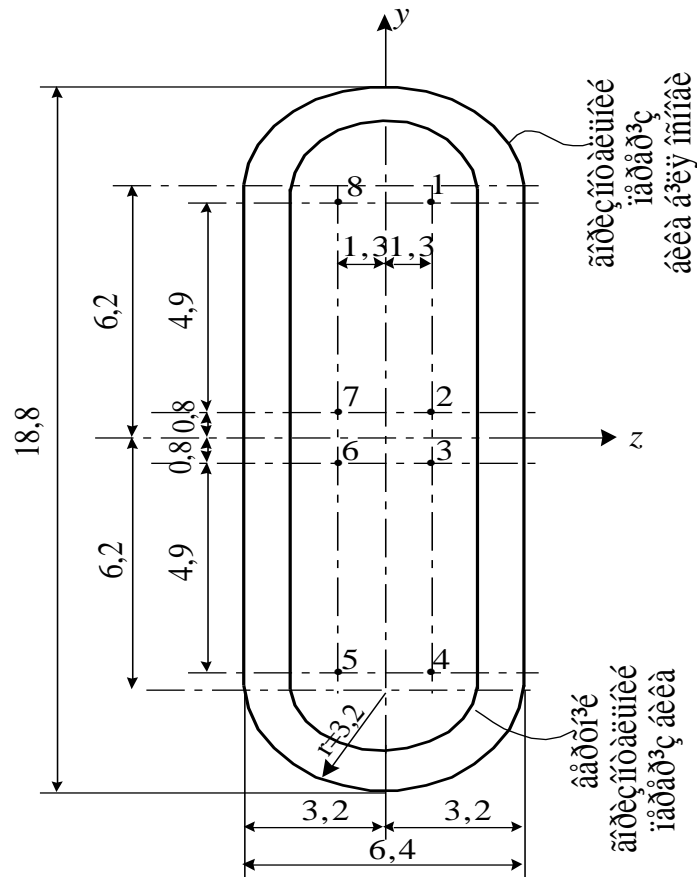


Рис. 10.8. До задачі 10.2.3

Загальна рівнодіюча усіх навантажень

$$R = F_1 + F_2 = 36800 + 4200 = 41000 \text{ кН}$$

буде лежати на прямій, яка з'єднує точки прикладання F_1 і F_2 (рис. 10.9).

Знайдемо положення рівнодіючої відносно центра опори на підставі теореми – «Момент рівнодіючої дорівнює сумі моментів сил складових»

$$R e = F_2 e_2,$$

звідки

$$e = \frac{F_2}{R} e_2 = \frac{4200}{41000} e_2 = 0,102 e_2.$$

Отже, координатами точки прикладання рівнодіючої будуть

$$y = 0,102 y_2 = 0,33 \text{ м,}$$

$$z = 0,102 z_2 = 0,13 \text{ м.}$$

Для обчислення напружень необхідно знайти геометричні характеристики горизонтального перерізу бика біля основи.

Площа поперечного перерізу

$$A = 12,4 \cdot 6,4 + 3,14 \cdot 3,2^2 = 111,53 \text{ м}^2.$$

Осьовий момент інерції відносно осі y

$$J_y = \frac{HB^3}{12} + \frac{\pi r^4}{4} = \frac{12,4 \cdot 6,4^3}{12} + \frac{3,14 \cdot 3,2^4}{4} = 353,2 \text{ м}^4.$$

Момент інерції відносно осі z

$$J_z = \frac{BH^3}{12} + 2 \left(J_{z_1} + \frac{\pi r^4}{4} \left(y_c + \frac{H}{2} \right)^2 \right) = \frac{6,4 \cdot 12,4^3}{12} +$$

$$+ 2 \left(147,3 + \frac{3,14 \cdot 3,2^2}{2} (1,36 + 6,2)^2 \right) = 3150 \text{ м}^4,$$

де

$$J_{z_1} = J_{z_2} - A_k y_c^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi r^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2} \right) =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 3,2^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9 \cdot 3,14^2} \right) = 147,3 \text{ м}^4.$$

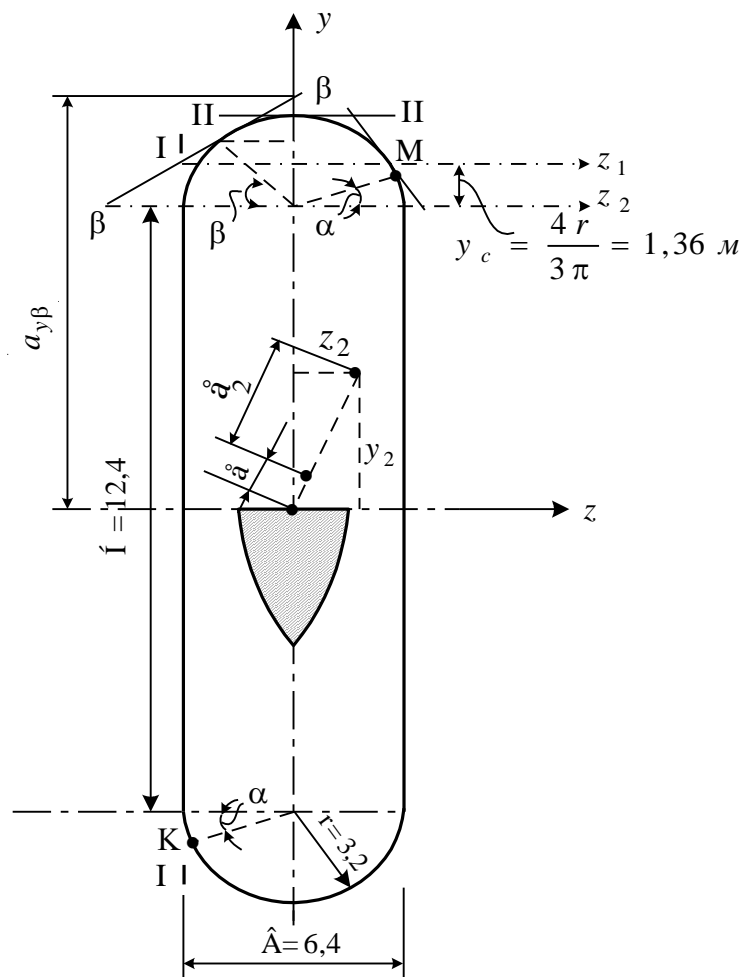


Рис. 10.9. До задачі 10.2.3

Квадрати радіусів інерції

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{353,2}{111,53} = 3,17 \text{ м}^2,$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{3150}{111,53} = 28,24 \text{ м}^2.$$

Тепер знайдемо положення нульової лінії:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z} = -\frac{3,17}{0,13} = -24,38 \text{ м},$$

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y} = -\frac{28,24}{0,33} = -85,58 \text{ м}.$$

Найбільші і найменші стискальні напруження будуть виникати в найбільш і найменш віддалених точках перерізу, тобто в точках М і К відповідно. Знайдемо їхні координати, а потім і напруження. З рис. 10.9 видно, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_z|}{|a_y|} = \frac{24,38}{85,58} = 0,285,$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,285 = 15,9^\circ,$$

а $\sin \alpha = 0,274$ і $\cos \alpha = 0,962$.

Тоді

$$z_m = r \cos \alpha = 3,2 \cdot 0,962 = 3,08 \text{ м},$$

$$y_m = r \sin \alpha + \frac{H}{2} = 3,2 \cdot 0,274 + \frac{12,4}{2} = 7,08 \text{ м},$$

$$z_k = -z_m = -3,08 \text{ м},$$

$$y_k = -y_m = -7,08 \text{ м},$$

а напруження

$$\begin{aligned} \sigma_m &= -\frac{R}{A} \left(1 + \frac{y \cdot y_m}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_m}{i_y^2} \right) = -\frac{41000 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{111,53} \left(1 + \frac{0,33 \cdot 7,08}{28,24} + \frac{0,13 \cdot 3,08}{3,17} \right) = \\ &= -0,37 (1 + 0,08 + 0,13) = -0,45 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\sigma_k = -0,37 (1 - 0,08 - 0,13) = -0,29 \text{ МПа}.$$

Побудуємо ядро перерізу.

Положення нульової лінії I-I.

Відрізки, що відтинаються нею на осях координат:

$$a_{z1} = -3,2 \text{ м}, \quad a_{y1} = \infty.$$

Координати 1-ї ядрової точки

$$z_{я1} = -\frac{i_y^2}{a_{z1}} = \frac{-3,17}{-3,2} = 0,99 \text{ м},$$

$$y_{я1} = -\frac{i_z^2}{a_{y1}} = 0.$$

Положення нульової лінії II-II:

$$a_{z2} = \infty, \quad a_{y2} = 9,4 \text{ м},$$

$$z_{я2} = 0, \quad y_{я2} = -\frac{28,24}{9,4} = -3,0 \text{ м}.$$

При переході нульової лінії від положення I-I до II-II вона безперервно обтікає опору за круговою кривою зі зміною кута нахилу β від 0° до 90° . Ядро перерізу буде описуватися деякою кривою. При нахилі нульової лінії під кутом β до горизонтальної прямої одержимо формули для визначення відрізків, що відтинаються на осях координат.

З одного боку, відношення відрізків, що відтинаються нульовою лінією на осях координат, дорівнює $\frac{a_{z\beta}}{a_{y\beta}} = \operatorname{tg} \beta$.

З іншого боку, з подоби трикутників маємо

$$\frac{a_{y\beta} - \left(r \sin \beta + \frac{H}{2} \right)}{a_{y\beta}} = \frac{r \cos \beta}{a_{z\beta}}.$$

Підставимо в ці формули замість $a_{z\beta}$ його значення

$$a_{z\beta} = a_{y\beta} \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{a_{y\beta} - \left(r \sin \beta + \frac{H}{2} \right)}{a_{y\beta}} = \frac{r \cos \beta}{a_{y\beta} \operatorname{tg} \beta},$$

звідки

$$a_{y\beta} \operatorname{tg} \beta - \left(r \sin \beta + \frac{H}{2} \right) \operatorname{tg} \beta = r \cos \beta$$

або

$$a_{z\beta} = \pm \frac{r + \frac{H}{2} \sin \beta}{\cos \beta}. \quad (10.1)$$

Тоді

$$a_{y\beta} = \frac{a_{z\beta}}{\operatorname{tg} \beta} = \pm \frac{r + \frac{H}{2} \sin \beta}{\sin \beta}. \quad (10.2)$$

Знаки \pm поставлені для урахування квадранта, де розташовується нульова лінія. У нашому випадку необхідно при обчисленні координат ядрових точок перед $a_{z\beta}$ ставити мінус, а перед $a_{y\beta}$ – плюс. Тому обчислення значень координат, коли нульова лінія $\beta - \beta$ буде переміщатися в показаному на рисунку квадранті, необхідно здійснювати за такими формулами:

$$z_{я\beta} = \frac{i_y^2 \cos \beta}{r + \frac{H}{2} \sin \beta}; \quad y_{я\beta} = -\frac{i_y^2 \sin \beta}{r + \frac{H}{2} \sin \beta}.$$

Обчислення зробимо в табличній формі (див. табл. 10.1).

Таблиця 10.1

β	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$z_{я\beta}, \text{ м}$	$y_{я\beta}, \text{ м}$
0	1	0	0,99	0
150	0,966	0,259	0,64	-1,52
300	0,866	0,500	0,44	-2,24
450	0,707	0,707	0,30	-2,63
600	0,500	0,866	0,18	-2,85
750	0,259	0,966	0,09	2,97
900	0	1	0	3,00

На рис. 10.9 показано половину ядра перерізу.

Розділ 11

11.2.1. У другому випадку (рис. 11.6, б) критична сила буде в чотири рази більша, ніж у першому (рис. 11.6, а).

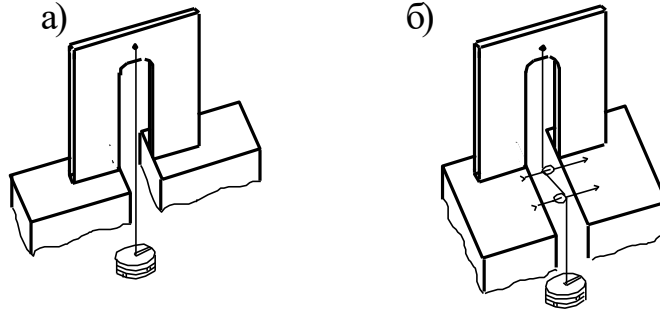


Рис. 11.6. До задачі 11.2.1

Для того, щоб переконатися в цьому, достатньо розглянути стояк в обох випадках у вигнутому стані (рис. 11.7). У першому випадку (рис. 11.7, а) критична сила буде

$$F_{кр1} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu\ell)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(2\ell)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4\ell^2}.$$

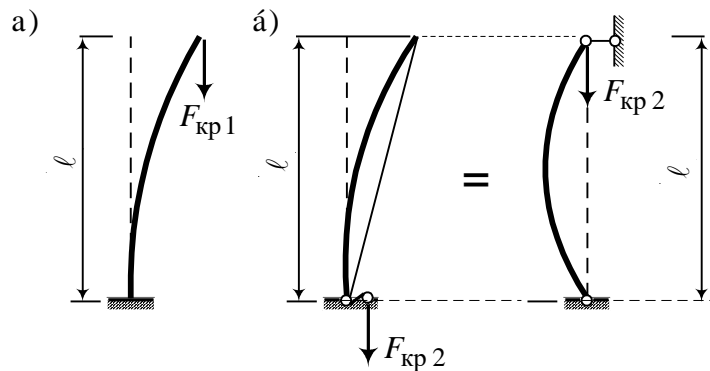


Рис. 11.7. До задачі 11.2.1

У другому випадку (рис. 11.7, б) у процесі скривлення стояка сила стежить за нижнім її кінцем, внаслідок чого згинальний момент у затисненні постійно дорівнює нулю. Отже, другий випадок навантаження стояка нічим не відрізняється від випадку шарнірного закріплення стояка по кінцях. Тому

$$F_{кр2} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2},$$

і відношення $\frac{F_{кр2}}{F_{кр1}} = 4$.

11.2.2. На клапан В діє сила $F_k = pA = 12 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 6$ кН. На стержень буде передаватися стискальна сила за допомогою важеля ВС у три рази менша від сили, що діє на клапан, $F_c = F_k \frac{BE}{CE} = 6 \frac{150}{450} = 2$ кН. З умови задачі передбачається, що при тиску на клапан $p = 12$ атм стержень CD повинен втратити стійкість, тобто скривитися. Отже, сила $F_c = 2$ кН, що стискає стержень CD, повинна бути для нього критичною. $F_{кр} = F_c = 2$ кН (рис. 11.8).

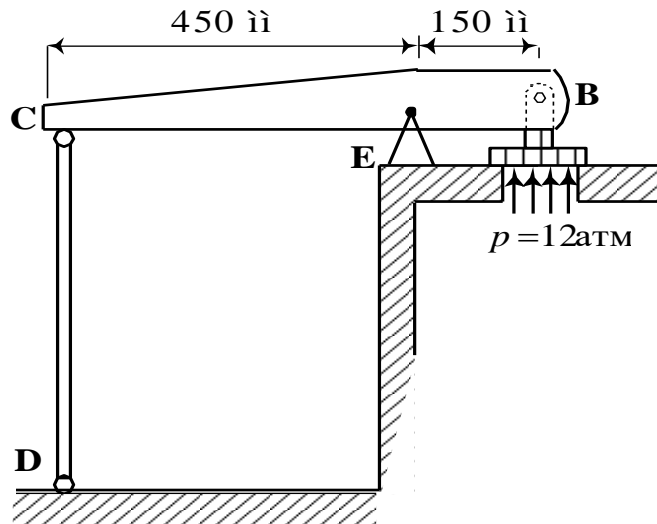


Рис. 11.8. До задачі 11.2.2

Якщо припустити, що при втраті стійкості матеріал стержня буде працювати в пружній стадії, значення критичної сили знайдемо за формулою Ейлера для даного виду закріплення кінців:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{\ell^2}.$$

Звідси обчислюємо необхідний найменший момент інерції поперечного перерізу:

$$J_{\min} = \frac{F_{кр} \ell^2}{\pi^2 E} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,6^2}{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 10^6} 10^8 = 0,036 \text{ см}^4.$$

При підйомі клапана на 5 мм опора С стержня CD опуститься за законом важеля на $\delta = \frac{450}{150} 5 = 15$ мм. Стержень вигнеться. Хорда, що стягує кінці вигнутого стержня, буде дорівнювати $\ell_1 = \ell - \delta$. Знаючи хорду, знайдемо прогин f , який стержень повинен давати при поздовжньому згинанні. Криву згинання прийемо приблизно за синусоїду $y = f \sin \frac{\pi x}{\ell}$. Проекція кривої згинання на вісь x буде (рис. 11.9)

$$l_1 = \int_0^{\ell} ds \cos \alpha = \int_0^{\ell} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) ds = \ell - \int_0^{\ell} 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} ds .$$

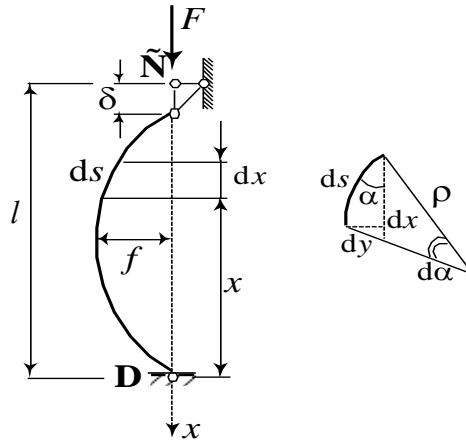


Рис. 11.9. До задачі 11.2.2

Вважаючи приблизно в силу малості деформації

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = y' \quad \text{і} \quad ds \approx dx ,$$

знаходимо

$$l_1 = \ell - \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (y')^2 dx ,$$

де $\delta = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (y')^2 dx .$

Продиференціюємо рівняння кривої згинання і підставимо значення y' в інтеграл:

$$2\delta = \int_0^{\ell} \left[\frac{f\pi}{\ell} \cos \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \right]^2 dx = \frac{f^2 \ell^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) dx ,$$

звідки

$$f = \sqrt{\frac{2\delta \ell^2}{\pi^2 \int_0^{\ell} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) dx}} .$$

Інтеграл

$$\int_0^{\ell} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{\ell} \right) \right] dx = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell \sin 2\pi}{2\pi} = \frac{\ell}{2} .$$

Для f остаточно одержимо

$$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\delta \ell} = \frac{2}{3,14} \sqrt{15 \cdot 600} = 60,4 \text{ мм.}$$

Для того щоб одержати перевищення сили порівняно з критичною, необхідно зробити інтегрування повного диференціального рівняння:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \quad \text{або} \quad \frac{y''}{\sqrt{1-(y')^2}} = \frac{M}{EJ}.$$

Результати такого інтегрування для випадку шарнірного закріплення кінців подаємо у вигляді такого нескінченного ряду*:

$$F = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 + \frac{19}{32} \left(\frac{\pi f}{2\ell} \right)^4 + \frac{29}{32} \left(\frac{\pi f}{2\ell} \right)^6 + \dots \right].$$

Нехтуючи в наведеному ряді всіма членами, крім першого і другого, одержимо

$$F = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 \right] = F_{кр} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 \right].$$

Тоді перевищення сили при $f = 60,4$ мм над критичною буде

$$F - F_{кр} = \frac{1}{2} F_{кр} \left(\frac{\pi f}{2\ell} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \left(\frac{3,14 \cdot 60,4}{2 \cdot 600} \right)^2 = 25 \text{ Н.}$$

11.2.3. Складемо диференціальне рівняння для скривленої осі шарнірно обіпєртого стержня при дії рівномірно розподіленого навантаження q . При скривленні стержня виникають горизонтальні реакції R . Розсічемо стержень на відстані x від верхнього кінця і розглянемо рівновагу верхньої його частини. Спроекуємо всі сили на переріз (рис. 11.10). Поперечна сила в перерізі

$$Q_x = -qx \sin \varphi_x - R \cos \varphi_x.$$

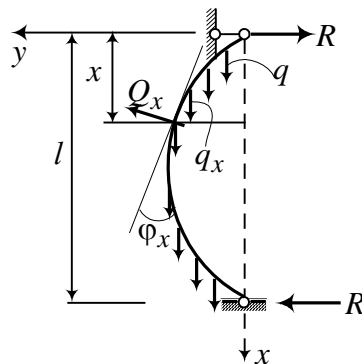


Рис. 11.10. До задачі 11.2.3

* Rudolf Mayer: "Die Kniekfestigkeit", § 4, 1921.

З огляду на те, що $EJy''' = Q_x$, і внаслідок малості кутів φ_x , $\sin \varphi_x \approx \operatorname{tg} \varphi_x = y'$ і $\cos \varphi_x \approx 1$ одержимо шукане диференціальне рівняння $EJy''' + qxy' = -R$.

Розв'язання задачі щодо визначення критичного навантаження, використовуючи одержане рівняння, можна здійснити різноманітними шляхами, наприклад:

1) шляхом заміни змінної x на нову, підбрану таким чином, щоб задане рівняння привелось до диференціального рівняння спеціального вигляду, інтеграл якого може бути поданий бesselевими функціями;

2) також може бути використаний енергетичний метод, у відповідності з яким для стержня з шарнірними закріпленнями кінців задаються приблизним значенням пружної лінії у вигляді

$$y = f \frac{\sin \pi x}{\ell}$$

і підставляють у вираз для повної енергії системи

$$E = U - W,$$

де U – потенціальна енергія деформації зігнутого стержня;

W – робота зовнішнього навантаження при викривленні стержня.

Після чого, прирівнюючи до нуля похідну

$$\frac{dE}{df} = 0,$$

знаходять приблизне значення критичного навантаження.

11.2.4. Визначення необхідного номера профілю провадиться послідовними спробами. Задаємося значенням φ , наприклад, приймаємо його рівним 0,8 (рис. 11.11). Тоді з умови стійкості

$$\sigma = \frac{N}{\varphi A} \leq [\sigma_{сж}].$$

Визначаємо необхідну площу поперечного перерізу одного швелера

$$\frac{A}{2} = \frac{N}{2\varphi[\sigma_{сж}]} = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,8 \cdot 120 \cdot 10^6} 10^4 = 41,7 \text{ см}^2.$$

За ГОСТом 8240-89 вибираємо (дод. 2) \square № 33, для якого $A = 46,5 \text{ см}^2$, $J_z = 7980 \text{ см}^4$, $i_z = 13,1 \text{ см}$.

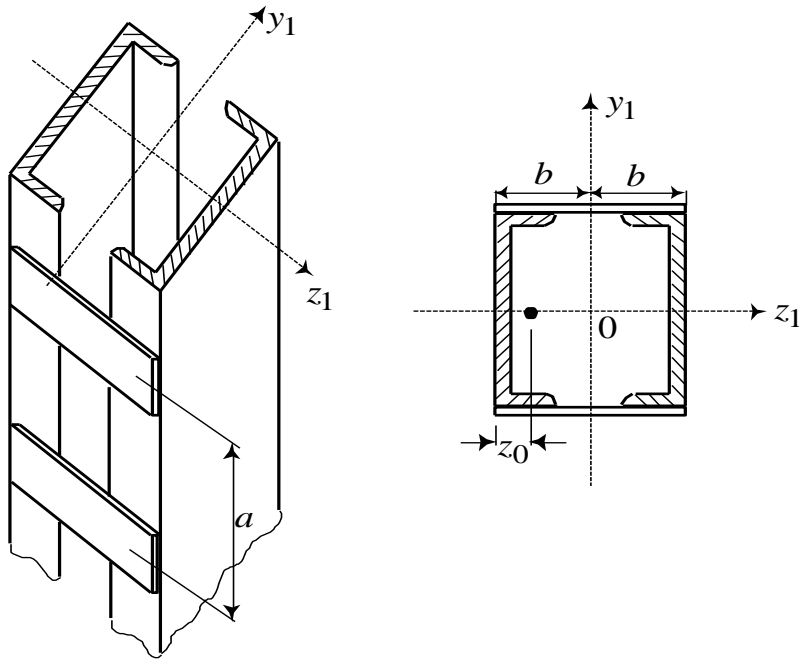


Рис. 11.11. До задачі 11.2.4

Обчислюємо гнучкість колони (радіус інерції колони дорівнює радіусу інерції одного швелера)

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_z} = \frac{1 \cdot 400}{13,1} = 30,5.$$

За таблицею значень коефіцієнтів φ (дод. б) залежно від λ знаходимо: $\varphi_1 = 0,95$.

Задаємося новим значенням φ , яке приймаємо рівним середньому:

$$\varphi_2 = \frac{0,8 + 0,95}{2} \approx 0,88.$$

При цьому

$$\frac{A}{2} = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,88 \cdot 120 \cdot 10^6} 10^4 = 37,9 \text{ см}^2.$$

Близька площа в \square № 30:

$$A = 40,5 \text{ см}^2; J_z = 5810 \text{ см}^4; i_z = 12,0 \text{ см}.$$

При цьому гнучкість

$$\lambda = \frac{1 \cdot 400}{12} \approx 33.$$

Інтерполюючи, за таблицею (дод. б) знаходимо φ :

$$\varphi_3 = 0,92 + \frac{0,95 - 0,92}{10} 7 = 0,94.$$

Значення близьке до попереднього $\varphi = 0,95$.

Зробимо ще спробу:

$$\varphi_4 = \frac{0,88 + 0,94}{2} = 0,91,$$

$$\frac{A}{2} = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,91 \cdot 120 \cdot 10^6} 10^4 = 36,6 \text{ см}^2.$$

Приймаємо той самий швелер № 30, тому що в меншого (швелер № 27) $A = 35,2 \text{ см}^2 < 36,6 \text{ см}^2$. Отже, на двотаврі № 30 можна зупинитися. Перевірка умови стійкості дає

$$\sigma = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,94 \cdot 40,5 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 105 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}.$$

Відстань "b" знаходимо з умови, що $J_{y1} = J_{z1}$.

Для швелера № 30: $J_y = 327$, $z_0 = 2,52$ см. Тому

$$2 \left[327 + 40,5 (b - 2,52)^2 \right] = 2 \cdot 5810,$$

звідки

$$(b - 2,52)^2 = \frac{5810 - 327}{40,5},$$

$$a \quad b = \sqrt{\frac{5810 - 327}{40,5}} + 2,52 = 14,2 \text{ см}.$$

Найбільшу відстань між планками "а" знаходимо з умови приблизно рівних гнучкостей λ усієї колони й одного швелера довжиною

$$a \leq \frac{\lambda \cdot i_{\min}}{\mu};$$

λ усієї колони дорівнює 33, а найменший радіус одного швелера $i_{\min} = i_y = 2,84$ см, отже,

$$a \leq \frac{33 \cdot 2,84}{1} = 93,7 \text{ см}.$$

Цю величину звичайно з конструктивних міркувань зменшують. Тому приймаємо відстань між планками $a = 90$ см.

Розділ 12

12.2.1. При рівномірному обертанні прискорення часток стержня, розташованих на відстані r від осі обертання, спрямовані до цієї осі (доцентрові прискорення) і, як відомо з курсу теоретичної механіки, визначаються за формулою

$$w = \omega^2 r. \quad (12.1)$$

Інерційні сили (відцентрові сили) спрямовані за радіусами від осі обертання. Інтенсивність їх, віднесена до одиниці довжини стержня, дорівнює

$$p_i = mw = \frac{\gamma A}{g} w = \frac{\gamma A \omega^2}{g} r. \quad (12.2)$$

Епюра p_i показана на рис. 12.5, а. Сили інерції викликають розтягання аналізованого стержня. Поздовжня сила N_r в перерізі стержня, розташованого на відстані r від осі обертання, дорівнює площі епюри p_i на ділянці від цього перерізу до кінця стержня:

$$N_r = \left(\frac{\gamma A \omega^2}{g} r + \frac{\gamma A \omega^2 \ell}{g} \frac{\ell - r}{2} \right) \frac{\ell - r}{2} = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} \left(\frac{\ell^2}{4} - r^2 \right). \quad (12.3)$$

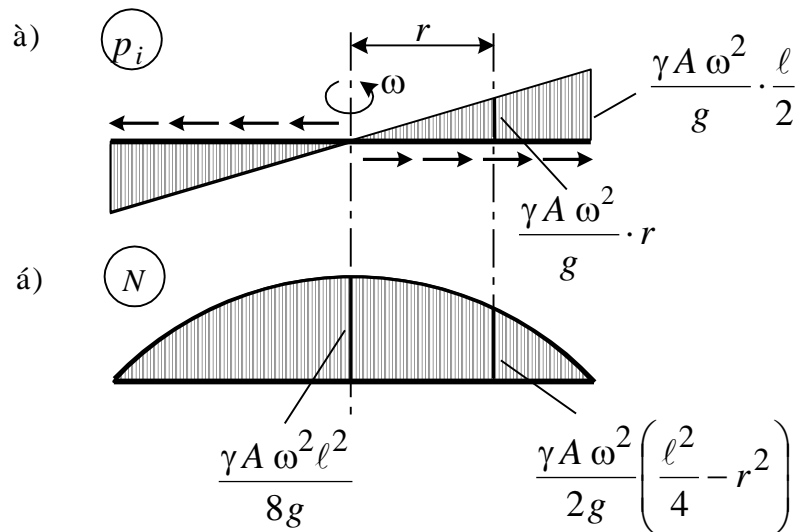


Рис. 12.5. До задачі 12.2.1

Найбільше значення сила має посередині стержня, тобто при $r = 0$:

$$N_{\max} = \frac{\gamma A \omega^2 \ell^2}{8g}. \quad (12.4)$$

Епюра поздовжніх сил показана на рис. 12.5, б. Знайдемо найбільшу довжину стержня $\ell_{\text{пр}}$ з умови стійкості на розтягання:

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

З огляду на (12.4) маємо

$$\frac{\gamma \omega^2 \ell_{\text{пр}}^2}{8g} \leq [\sigma].$$

Звідки

$$\ell_{\text{пр}} \leq \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{8g[\sigma]}{\gamma}}.$$

Але відомо, що

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, \quad (12.5)$$

тоді

$$\ell_{\text{пр}} = \frac{30}{\pi n} \sqrt{\frac{8g[\sigma]}{\gamma}} = \frac{30}{3,14 \cdot 1200} \sqrt{\frac{8 \cdot 9,81 \cdot 100 \cdot 10^6}{7,83 \cdot 10^4}} \approx 2,5 \text{ м.}$$

Стержень розірветься при досягненні в ньому напружень, які дорівнюють межі міцності

$$\frac{N_{\text{max}}}{A} = \sigma_b.$$

Підставимо N_{max} з (12.4), замість ω її значення з (12.5) і одержимо

$$\frac{\gamma A \pi^2 n^2 \ell_{\text{пр}}}{8qA \cdot 30^2} = \sigma_b.$$

Звідки

$$n_{\text{пр}} = \frac{30}{\pi \ell_{\text{пр}}} \sqrt{\frac{8g\sigma_b}{\gamma}} = \frac{30}{3,14 \cdot 2,5} \sqrt{\frac{8 \cdot 9,81 \cdot 800 \cdot 10^6}{7,83 \cdot 10^4}} = 3394 \text{ об/хв.}$$

12.2.2. Розглянемо рис. 12.6:

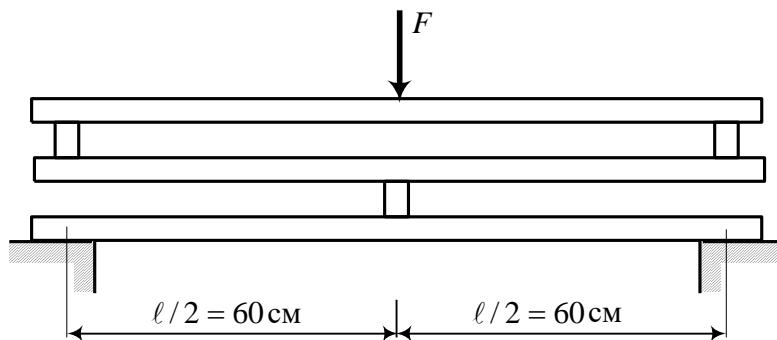


Рис. 12.6. До задачі 12.2.2

а) при статичному впливі максимальний момент у кожній з балок буде виникати посередині прогону і буде дорівнювати

$$M_{\text{max}} = \frac{F\ell}{4}.$$

З умови міцності за нормальними напруженнями при згинанні

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W} \leq [\sigma]$$

припустиме навантаження буде дорівнювати

$$F_{\text{ст}} \leq \frac{4W[\sigma]}{\ell} = \frac{4a^3[\sigma]}{6\ell} = \frac{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9} \cdot 140 \cdot 10^6}{6 \cdot 120 \cdot 10^{-2}} 10^{-3} = 16,8 \text{ кН;}$$

б) ні, тому що в кожній з балок максимальний момент, а отже, і максимальне напруження, будуть тими самими;

в) при падінні тіла система балок буде відчувати ударний вплив. При цьому умова міцності буде

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = \frac{M_{\max}}{W} k_{\text{дин}} \leq [\sigma],$$

або

$$\frac{F_1 \ell}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} \right) \leq [\sigma], \quad (12.6)$$

де $\Delta_{\text{ст}}$ – опускання точки падіння вантажу, що виникає в результаті деформації системи балок при статичному впливі вантажу F_1 .

Кожна з балок буде мати максимальний прогин посередині

$$f_{\text{іст}} = \frac{F_1 \ell^3}{48EJ},$$

а точка удару переміститься на величину, яка дорівнює сумі прогинів трьох балок

$$\Delta_{\text{ст}} = 3f_{\text{іст}} = \frac{F_1 \ell^3}{16EJ}.$$

Для спрощення розв'язання задачі щодо визначення ваги F_1 тіла, що падає, знехтуємо одиницею в $k_{\text{дин}}$ перед коренем. Тоді (12.6) запишеться з деякими перетвореннями, як

$$F_1 \sqrt{1 + \frac{32hEa^4}{F_1 \ell^3 \cdot 12}} \leq \frac{4a^3[\sigma]}{6\ell}.$$

Підставимо сюди значення відомих величин і введемо F_1 під корінь:

$$\begin{aligned} \sqrt{F_1^2 + \frac{32 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}}{120^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12}} F_1 &\leq \\ &\leq \frac{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9} \cdot 140 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 120 \cdot 10^{-2}}, \end{aligned}$$

або

$$\sqrt{F_1^2 + 800F_1} = 16,80.$$

Зведемо усе в квадрат і одержимо квадратне рівняння відносно F_1 :

$$F_1^2 + 800F_1 - 282,24 = 0,$$

звідки

$$F_1 = -400 \pm \sqrt{16 \cdot 10^4 + 282,24} = 0,353 \text{ кН.}$$

Перевіримо виконання умови міцності (12.6) при точному значенні динамічного коефіцієнта:

$$\frac{0,353 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-2} \cdot 6}{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}}{0,353 \cdot 10^3 \cdot 120^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12}} \right) \times \\ \times 10^{-6} = 143 \text{ МПа} > 140.$$

Необхідно дещо зменшити силу F_1 . При $F_1 = 0,340$ кН умова (12.6), можна вважати, дотримується:

$$140,3 \text{ МПа} \approx 140 \text{ МПа}.$$

Перенапруження складає лише 0,2 %;

г) якби такий вантаж ($F_1 = 0,34$ кН) падав лише на одну балку, то переміщення (прогин) у точці падіння дорівнювало б

$$f_{\text{ст}} = \frac{F_1 \ell^3}{48 E J} = \frac{0,34 \cdot 10^3 \cdot 120^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}} 10^2 = 5,67 \cdot 10^{-4} \text{ см}$$

і максимальне напруження

$$\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} = \frac{F_1 \ell}{4 W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\text{ст}}}} \right) = \frac{0,34 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-2} \cdot 6}{4 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} \times \\ \times \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{5,67 \cdot 10^{-4}}} \right) 10^{-6} = 755,6 \text{ МПа}$$

більш, ніж у 5 разів перевищує припустиме напруження.

12.2.3. Знайдемо переміщення точки балки в місці падіння вантажу (рис. 12.7).

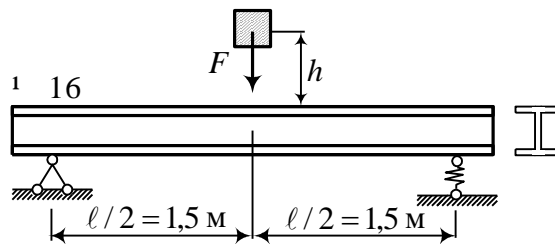


Рис. 12.7. До задачі 12.2.3

Воно буде складатися з прогину балки і величини, яка дорівнює половині осідання пружинної опори (рис. 12.8). Прогин середини балки (у перерізі під вантажем F) від статичної дії сили $F = 2$ кН дорівнює

$$f = \frac{F \ell^3}{48 E J_z} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3^3 \cdot 10^2}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1130 \cdot 10^{-8}} = 0,025 \text{ см},$$

де $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль пружності сталі;

$J_z = 1130 \text{ см}^4$ – осьовий момент інерції двотавра № 16 (дод. 2).

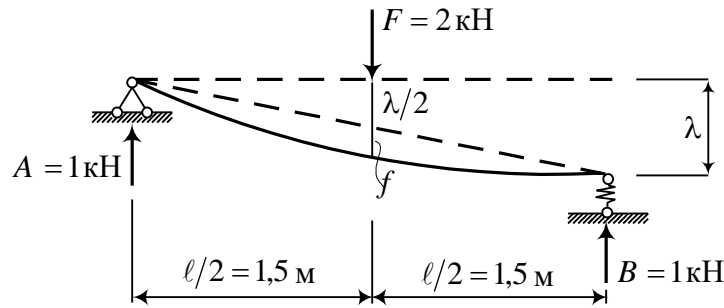


Рис. 12.8. До задачі 12.2.3

Осідання пружини під дією опорної реакції $B = \frac{F}{2} = 1$ кН буде дорівнювати

$$\lambda = \frac{8BD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^2}{0,8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 20^4 \cdot 10^{-12}} = 0,625 \text{ см.}$$

Повне переміщення

$$\Delta_{\text{ст}} = f + \frac{\lambda}{2} = 0,025 + \frac{0,625}{2} = 0,3375 \text{ см.}$$

Динамічний коефіцієнт (без урахування власної ваги балки) визначається за формулою

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

Умова міцності балки за нормальними напруженнями запишеться як

$$\sigma_{\text{макс}}^{\text{дин}} = \frac{M_{\text{макс}}}{W} k_{\text{дин}} = \frac{F\ell}{4W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h_1}{\Delta_{\text{ст}}}} \right) \leq [\sigma].$$

Звідси знаходимо припустиму висоту падіння вантажу. Розділимо ліву і праву частини нерівності на $\frac{F\ell}{4W}$ і перенесемо одиницю в праву частину. Потім зведемо обидві частини в квадрат:

$$1 + \frac{2h_1}{\Delta_{\text{ст}}} \leq \left(\frac{4W[\sigma]}{F\ell} - 1 \right)^2,$$

звідки

$$h_1 \leq \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \left[\left(\frac{4W[\sigma]}{F\ell} - 1 \right)^2 - 1 \right] = \frac{0,3375}{2} \times \\ \times \left[\left(\frac{4 \cdot 141 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3 \cdot 3} - 1 \right)^2 - 1 \right] = 33 \text{ см.}$$

Умова міцності проволочки пружини за дотичними напруженнями

$$\tau_{\text{макс}}^{\text{дин}} = \frac{8FD}{2\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D} \right) k_{\text{дин}} \leq [\tau].$$

Виконуючи перетворення, подібні попереднім, і підставляючи дані, одержимо

$$h_2 \leq \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \left[\left(\frac{\pi d^3 [\tau]}{4FD \left(1 + \frac{d}{2D}\right)} - 1 \right)^2 - 1 \right] = \frac{0,3375}{2} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{3,14 \cdot 20^3 \cdot 10^{-9} \cdot 200 \cdot 10^6}{4 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \left(1 + \frac{20 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10}\right)} - 1 \right)^2 - 1 \right] = 3,6 \text{ см.}$$

Таким чином, висота, з якої може падати вантаж, дорівнює меншій з двох h_1 і h_2 , тобто $h = 3,6$ см.

12.2.4. Виходячи з умови, щоб частота власних поперечних коливань системи була на 30 % вищою від частоти збуджуючого навантаження, тобто $\omega = 1,3\theta$, знаходимо її $\omega = 1,3 \frac{2\pi n}{60} = 163,4 \text{ с}^{-1}$ (рис. 12.9).

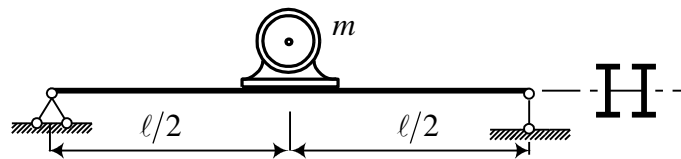


Рис. 12.9. До задачі 12.2.4

Знаючи власну частоту, знайдемо з формули $\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}}$ величину прогину балки в місці розташування маси від одиничної сили – δ_{11} :

$\delta_{11} = \frac{1}{m \omega^2}$. З іншого боку, прогин середини балки від одиничної сили,

прикладеної там же, буде $\delta_{11} = \frac{\ell^3}{48EJ_z}$.

З рівності правих частин знаходимо необхідний момент інерції перерізу балки

$$J_z = \frac{m \ell^3 \omega^2}{48E} = \frac{1000 \cdot 5^3 \cdot 163,4^2}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} 10^8 = 34765 \text{ см}^3.$$

Для однієї балки

$$J_{z1} = \frac{J_z}{2} = \frac{34765}{2} \approx 17382 \text{ см}^3.$$

Підходящим є двотавровий переріз № 40 із $J_z = 19062 \text{ см}^4$ (дод. 2).

З умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = \frac{M_{\max}}{W_z} k_{\text{дин}} = \frac{F\ell}{4W_z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \leq [\sigma].$$

Момент опору

$$W_z \leq \frac{F\ell}{4[\sigma]} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{(1,3\theta)^2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 5}{4 \cdot 160 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1,3^2}} \cdot 10^6 = 191,4 \text{ см}^3.$$

Момент опору одного двотавра

$$W_z = \frac{W_z}{2} = \frac{191}{2} = 95,7 \text{ см}^3,$$

що відповідає двотавровому перерізу № 16 із $J_z = 873 \text{ см}^4$. Таким чином, вимога умови жорсткості стержня (співвідношення $\frac{\omega}{\theta} = 1,3$) більш істотна, ніж умови міцності. З урахуванням власної ваги балки частота виходить меншою. Тому варто взяти більш жорстку балку, наприклад, із перерізом № 45, для якого $J_z = 27696 \text{ см}^4$, погонна маса $m_0 = 66,5 \text{ кг}$. Приведена маса балок, зосереджена посередині,

$$m_{\text{пр}} = \frac{17}{35} \cdot 2m_0 \ell = \frac{17 \cdot 2 \cdot 66,5 \cdot 5}{35} = 323 \text{ кг}.$$

Частота власних коливань балки з урахуванням маси балки

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{(m + m_{\text{пр}}) \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EJ_z}{(m + m_{\text{пр}}) \ell^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 27696 \cdot 10^{-8}}{(1000 + 323) \cdot 5^3}} = 179,3 \text{ с}^{-1} > 163,4 \text{ с}^{-1}.$$

Умова співвідношення між частотами власних і вимушених коливань дотримується.

Примітка. Якщо балку зробити з двох двотаврів № 16 (виходячи з умови міцності), приведена маса її буде $m = \frac{17}{35} \cdot 2 \cdot 15 \cdot 5 = 72,86 \text{ кг}$, а

частота	власних	коливань	системи
$\omega_2 = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 873 \cdot 10^{-8}}{(1000 + 72,86) \cdot 5^3}} = 35,4 \text{ с}^{-1}.$			

Частота $\omega_2 < \theta$ на $\frac{125,7 - 35,4}{125,7} \cdot 100 = 71,8 \%$, тобто розташовується

ще далі від резонансної зони. Динамічний коефіцієнт буде меншим, ніж у першому випадку. Балка буде більш економічною, але при запуску мотора

будуть виникати биття, і все буде залежати від швидкості наростання обертів, а також потужності мотора.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Опір матеріалів [Текст] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 1993.– 654 с.
2. Сопротивление материалов [Текст] /А.Ф. Смирнов, А.В. Александров и др. – М.: Высшая школа, 1975. – 479 с.
3. Беляев, Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1966. – 348 с.
4. Мошинський, С.І. Задачі і приклади з опору матеріалів [Текст] / навч. Посібник / Мошинський, С.І., Примак О.П., Гуртовий О.Г. – К.: Освіта України, 2009. – 400 с.
5. Иванов, Н.И. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / Н.И. Иванов. – М., 1956. – 276 с.
6. Феодосьев, В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов [Текст] / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
7. Чихладзе, Е.Д., Кітов Ю.П. Побудова епюр внутрішніх сил в рамках з використанням ПЕОМ [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 47 с.
8. Чихладзе, Э.Д. Определение геометрических характеристик сложных плоских сечений с контролем решения на ПЭВМ [Текст] / Э.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, С.Н. Чуменко. – Харьков: ХИИТ, 1993. – 45 с. (№122).
7. Чихладзе, Е.Д. Визначення геометричних характеристик складних плоских перерізів з контролем рішення на ПЕОМ [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, С.М. Чуменко. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – 45 с. (№3321).
8. Чихладзе, Э.Д. Расчет на прочность и определение перемещений в балках при изгибе с контролем решений на ПЭВМ [Текст] / Э.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов. – Харьков: ХарГАЖТ, 1995. – 76 с. (№927).
9. Чихладзе, Э.Д. Исследование объемного и плоского напряженного состояний с применением ПЭВМ [Текст] / Э.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, М.А. Веревичева. – Харьков: ХарГАЖТ, 1996. – 60 с. (№50).
10. Чихладзе, Е.Д. Дослідження об'ємного і плоского напружених станів з використанням ПЕОМ [Текст] / Е.Д. Чихладзе, Ю.П. Кітов, М.А. Веревичева. – Харків: ХарДАЗТ, 1999. (№3359).
- 11.Бронштейн, И.Н. Справочник по математике (для инженеров и учащихся ВТУЗов) [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.-Л.: ОГИЗ, Госуд. изд. технико-теорет. лит., 1945. – 556 с.
12. Металлические конструкции: Справочник проектировщика [Текст] / Под общ. ред. В.В. Кузнецова. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – 576 с.
13. Снитко, Н.К. Строительная механика [Текст] / Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1966. – 535 с.

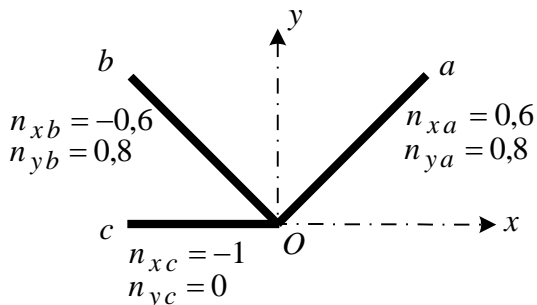
СТРАТЕГІЯ І ТАКТИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Кількість одночасно розв'язуваних задач може бути різною. Наприклад, при здачі іспиту необхідно розв'язати одну задачу; з метою засвоєння певного розділу курсу для «домашнього» розв'язання може бути задано дві-три задачі; а на предметній олімпіаді треба розв'язати за один присід 6-10 задач. Щоб затратити менше часу на розв'язання задач і домогтися кращої результативності, необхідно мати стратегію й тактику їхнього розв'язання.

Стратегія розв'язання одночасно ряду задач є такою:

1. Спочатку проглядаються всі задачі і намічається порядок розв'язання від простих до складних, від менш громіздких до більш громіздких.
2. Відбирається половина задач як необхідна кількість обов'язково, повно й правильно розв'язуваних у першу чергу задач.
3. Після цього розв'язується якнайбільше задач, що залишилися, з різною повнотою розв'язання.

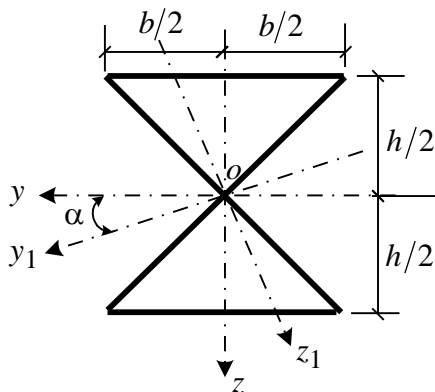
Приклад. Дано групу із 6 задач.



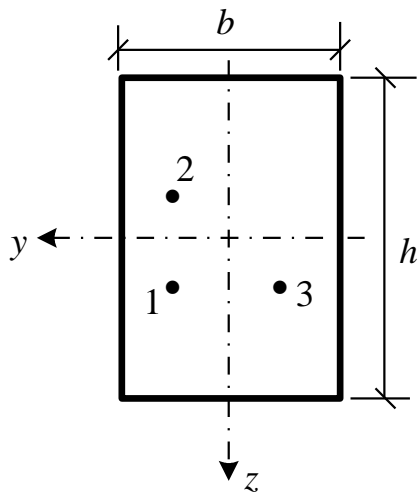
№ 1

При дії навантаження в пластині виникає плоский напружений стан: σ_x , σ_y , τ_{xy} . На пластину наклеєна розетка з датчиків омічного опору з напрямними косинусами, зазначеними на кресленні. За допомогою розетки отримані відносні деформації $\varepsilon_a = 2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b = -1 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 4 \cdot 10^{-4}$. Знайти головні напруження в точці O.

№ 2



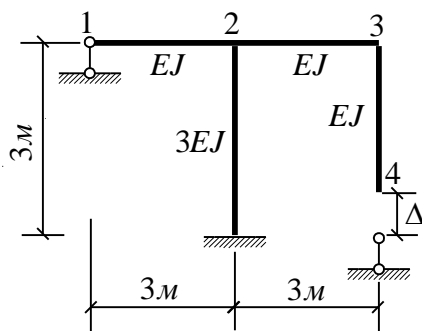
При якому співвідношенні $\frac{h}{b}$ моменти інерції щодо довільної пари взаємоперпендикулярних осей y_1 , z_1 з початком у т. O будуть однаковими?



№ 3

У прямокутному перерізі стержня виникають нормальні напруження σ_x від внутрішніх зусиль N_x , M_y , M_z . Відомі значення напружень у трьох точках $\sigma_{x1} = 9$ МПа, $\sigma_{x2} = 6$ МПа, $\sigma_{x3} = 12$ МПа. Точки мають такі координати: $y_1 = 3$ см, $z_1 = 3$ см, $y_2 = 3$ см, $z_2 = -3$ см, $y_3 = -3$ см, $z_3 = 3$ см. Визначити величини внутрішніх зусиль і положення нульової лінії, якщо $b = 12$ см; $h = 24$ см.

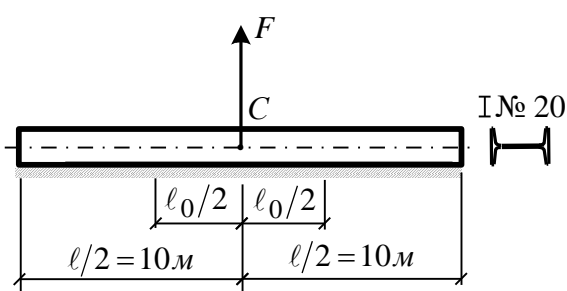
№ 4



Під час монтажу конструкції довжина стержня 3-4 виявилася коротше на величину Δ . Для з'єднання з опорою 4 стержень 3-4 рівномірно нагріли. Після з'єднання стержень остудився до первісної температури. Визначити внутрішні зусилля в елементах конструкції й горизонтальне переміщення точки 1.

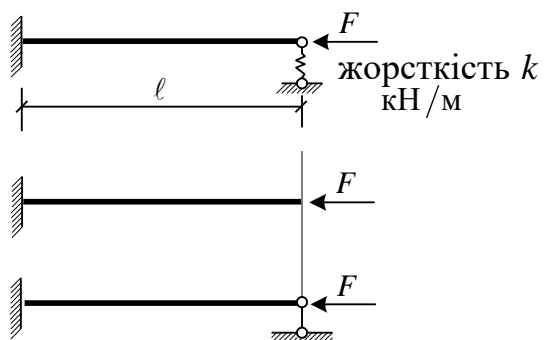
Дано: Δ , $EJ = 27 \cdot 10^3$ кНм², α .

№ 5



Двотавр № 20 піднімається за середину довжини. Визначити переміщення точки С і довжину l_0 вигнутої частини стержня, коли сила F досягає чверті ваги двотавра.

№ 6



Одержати рівняння для визначення критичної сили і знайти її значення при $k = 0$ і $k = \infty$.

Необхідно установити послідовність розв'язання цих задач з урахуванням вищевикладеної стратегії. Це складний і неоднозначний процес, що залежить від рівня знань, розходження в розумінні розділів опору матеріалів, по яких представлені задачі й практики розв'язання задач. Тому читач може бути не згодним якоюсь мірою або повністю з порядком розв'язання представлених задач і його обґрунтуванням. Отже, перегледаємо задачі і аналізуємо їх.

Задача № 1 належить до розділу «Плоский напружений стан» і її розв'язання буде пов'язано з перетворенням деформацій і напружень при зміні нахилу площадок, по яких вони виникають. Складність у знанні відповідних формул і деяка громіздкість при виконанні обчислень.

Задача № 2 має відношення до визначення геометричних характеристик перерізів. Геометричні характеристики необхідні в задачах розрахунку на міцність і жорсткість при різних простих і складних опорах стержнів, тобто вони найбільш часто згадуються при вивченні курсу опору матеріалів. Задача проста.

Задача № 3 найпростіша із групи. Для її розв'язання треба знати тільки одну формулу для визначення нормальних напружень у різних точках перерізу при загальному складному опорі.

У *задачі № 4* необхідно розрахувати статично невизначну раму на заданий зсув опор. Розрахунок статично невизначних систем пов'язаний з вибором основної системи, складанням додаткових рівнянь, їхнім розв'язанням. Складна задача.

При розв'язанні *задачі № 5* необхідно чітко уявляти як визначаються при вигині зусилля за допомогою рівнянь рівноваги і переміщення методом початкових параметрів. І те, і інше основні поняття й цілком доступні для застосування.

Задача № 6 пов'язана із записом і розв'язанням неоднорідного диференціального рівняння, що і буде рівнянням для визначення критичної сили. Загальне розв'язання досить складне, частинні значення критичних сил відомі.

Відповідно до проробленого аналізу, послідовність розв'язання задач може бути намічена такою: 3, 2, 5, 1, 6 і 4.

Після цього аналізу приступаємо до розв'язання задач. Спочатку ставимо собі метою обґрунтовано й без помилок розв'язати першу

половину – три задачі. Це робити треба не поспішаючи, уважно перевіряючи кожен крок перетворень та обчислень. Переконавшись у правильності рішення, і за наявності ще відведеного часу приступаємо до розв’язання інших задач. Тепер стежимо вже за часом. Якщо його залишається зовсім мало, намагаємося показати початок розв’язання або відомі відповіді задач, до розв’язання яких ще не приступали. Наприклад, у задачі № 6 записати значення критичних сил в окремих випадках – при

$$k = 0 \quad F_{kp} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2\ell)^2}; \quad \text{при } k = \infty \quad F_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7\ell)^2};$$

у задачі № 4 – визначити ступінь статичної невизначеності $\Lambda = 3_0 - 3 = 5 - 3 = 2$ і вибрати основну систему (рис. Д.1.1),

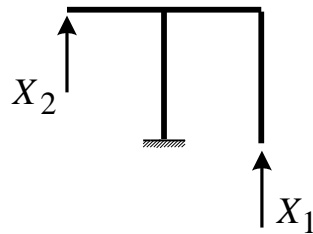


Рис. Д.1.1

а може й встигнути записати систему канонічних рівнянь методу сил

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1\Delta} &= 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2\Delta} &= 0. \end{aligned}$$

Зауваження. Якщо ви прагнете до досконалості своїх знань, то обов’язково розв’яжіть потім всі задачі, які не встигли розв’язати за відведений проміжок часу.

Стратегія розв’язання кожної задачі повинна бути такою, щоб якнайшвидше й безпомилково розв’язати задачу. Вона являє собою чітку послідовність проведення операцій:

1. Уважно прочитати умову задачі (умова складається із двох частин: даних і що потрібно знайти, визначити, підібрати, перевірити).

2. Установити, до якого розділу курсу ставиться задача (розтягання-стискання, зсув, крутіння, плоский згин, складний опір, складний напружений стан, геометричні характеристики перерізів, стійкість, динаміка).

3. Записати формулу або скласти рівняння, з яких можна буде знайти шукану величину.

4. Проаналізувати, чи всі інші величини, що входять у запис для визначення шуканої, відомі.

5. Якщо ні, то записуються формули або рівняння для визначення невідомих, що виникали у попередніх записах.

6. І так доти, поки в останньому записі всі величини, крім однієї, будуть відомі.

7. Після цього зворотним «ходом» зробити обчислення від кінцевого виразу до початкового і визначити шукану величину задачі.

8. Упевнитися в правильності кожного обчислення й усього розв'язання задачі.

Приклад 1. Твердий брус АВ, деформацією якого можна знехтувати,

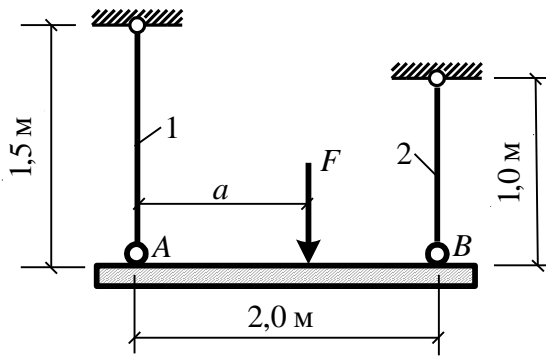


Рис. Д.1.2

горизонтально підвішений на тягах 1 і 2 (рис. Д.1.2). Тяга 1 – сталевая круглого перерізу діаметром 20 мм. Тяга 2 – мідна, теж круглого перерізу діаметром 25 мм. На якій відстані «а» від вузла А потрібно помістити вантаж F , щоб і після деформації брус АВ залишився горизонтальним?

Уважно прочитавши умову задачі, сконцентруємо свою увагу на двох моментах:

- 1) шуканою величиною є відстань «а»;
- 2) є необхідна умова горизонтальності бруса після прикладання сили F .

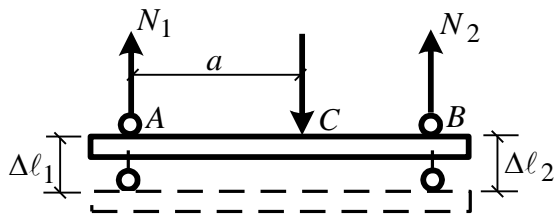


Рис. Д.1.3

При прикладанні сили в стержнях 1 і 2 будуть виникати зусилля N_1 і N_2 , величини яких будуть залежати від положення точки С, тобто від «а» (рис. Д.1.3). Отже, для визначення «а» необхідно скласти рівняння рівноваги.

І оскільки величина сили не задана і вона не є шуканою величиною, рівняння рівноваги необхідно записати у вигляді суми моментів всіх сил відносно точки С:

$$\sum M_c = 0 \quad N_1 a - N_2 (2 - a) = 0,$$

звідки

$$a = \frac{2N_2}{N_1 + N_2} = \frac{2 \frac{N_2}{N_1}}{1 + \frac{N_2}{N_1}}.$$

Отже, щоб знайти « a », необхідно спочатку визначити величини N_1 і N_2 або їхнє співвідношення $\frac{N_2}{N_1}$. Друге переважніше, тому що порівняно з першим скоротить кількість, до того ж непотрібних, обчислень.

Величини N_1 і N_2 знайдуться з умови горизонтальності стержня після деформації, що відбудеться за наявності рівності подовжень стержнів (рис. Д.1.3):

$$\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Виразимо подовження через зусилля в стержнях за законом Гука:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \quad \text{або} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{E_2 A_2 l_1}{E_1 A_1 l_2}.$$

У виразі для визначення $\frac{N_2}{N_1}$ всі величини відомі. Прямий хід закінчено.

Тепер зворотним ходом, поступово обчислюючи проміжні невідомі, розв'яжемо задачу. Перш ніж обчислювати відношення N_2/N_1 , *замітимо*, що у формулі в чисельник і знаменник входять попарно однакові характеристики: E_1 і E_2 , A_1 і A_2 , l_1 і l_2 , що мають різні розмірності. Але тим і зручні співвідношення, що в них немає потреби приводити все до одних вимірів, а можна прямо підставляти характеристики зі своїми розмірностями. Це скорочує час обчислень і зменшує можливість виникнення помилок.

Отже,

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 25^2 \cdot 4 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot 1} = 1,171.$$

Тепер знайдемо шукану величину

$$a = \frac{2 \cdot 1,171}{1 + 1,171} = 1,08 \text{ м.}$$

Задача швидко й успішно розв'язана!

Приклад 2. Відповідно до умови задачі 2.2.3 необхідно взяти таку висоту трикутника, щоб його осьовий момент інерції відносно осі u був би максимальним (рис. Д.1.4). Тому почнемо розв'язання із запису умови

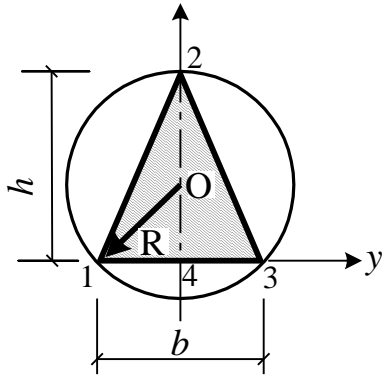


Рис. Д.1.4

максимуму моменту інерції у функції від висоти h :

$$\frac{dJ_y(h)}{dh} = 0.$$

Щоб використати умову, треба мати функцію $J_y(h)$, тобто записати формулу для обчислення моменту інерції трикутника відносно осі, що проходить через основу.

Позначивши через « b » розмір основи, маємо $J_y = \frac{bh^3}{12}$. Але при зміні « h » буде змінюватися й « b », отже, необхідно виразити « b » через « h ». Для цього проведемо відрізок прямої $O-1$ (рис. Д.1.4), що дорівнює радіусу. Тоді із трикутника $O-1-4$, де $1-4$ дорівнює $\frac{b}{2}$, а $O-4 = h-R$, знайдемо

$$(1-4)^2 + (O-4)^2 = (O-1)^2.$$

Або

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (h-R)^2 = R^2.$$

Розкриваючи дужки й зробивши перетворення, одержимо

$$b = 2\sqrt{h(2R-h)}.$$

Тоді

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3\sqrt{h(2R-h)}}{6}.$$

Тепер можна брати похідну і, прирівнюючи її до нуля, одержати рівняння, з якого знаходиться шукана величина h .

Під тактикою розв'язання задач розуміється спрощення розв'язання на основі урахування конкретних особливостей задачі. Особливостей дуже багато, як і кількості задач, тому покажемо тут задачі, які або часто зустрічаються, або потребують рішень, що вражають своєю оригінальністю.

1. *Обчислення зусиль без визначення реакцій опорних закріплень*, якщо це не потрібно умовою задачі. Наприклад, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів у консольній балці (рис. Д.1.5).

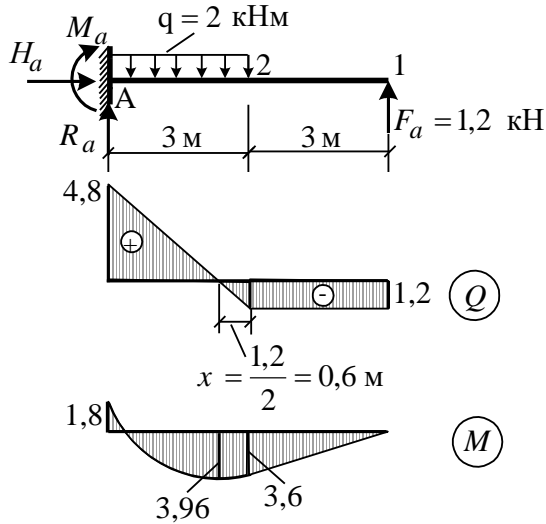


Рис. Д.1.5

Знаходити зусилля будемо, не визначаючи опорні реакції R_a , H_a і M_a , а розглядаючи рівновагу відсічених частин балки з боку вільного кінця.

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = Q_{2-a} = -1,2 \text{ кН};$$

$$Q_{a-2} = -1,2 + 2 \cdot 3 = 4,8 \text{ кН};$$

$$M_1 = 0; M_2 = 1,2 \cdot 3 = 3,6 \text{ кНм};$$

$$M_a = 1,2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -1,8 \text{ кНм};$$

$$M_{\max} = 1,2 \cdot 3,6 - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{0,6}{2} = 3,96 \text{ кНм}.$$

2. Урахування симетрії навантажень і геометрії.

Наприклад, визначити величини реакцій у балці (рис. Д.1.6).

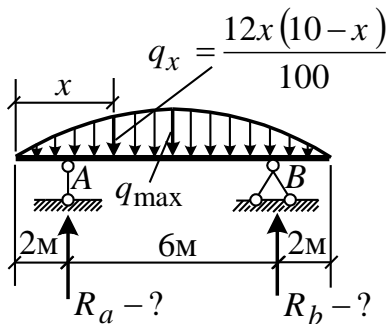


Рис. Д.1.6

Через симетрію геометрії балки і розподіленого навантаження, реакції опор будуть однаковими і дорівнюватимуть кожна половині всього навантаження на балку. Навантаження змінюється за законом квадратної параболи, тому вся вона буде дорівнювати $\frac{2}{3} q_{\max} \cdot 10$, а реакції

$$R_a = R_b = \frac{\frac{2}{3} q_{\max} \cdot 10}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10}{2} = 10 \text{ кН}.$$

Ще приклад.

Необхідно визначити осьовий момент інерції перерізу відносно

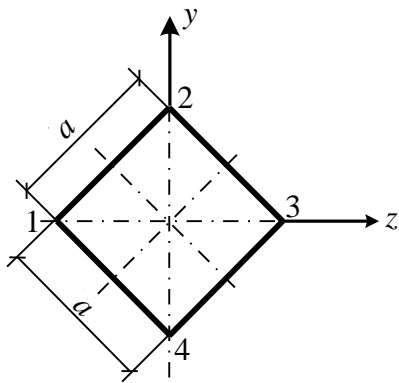


Рис. Д.1.7

осі z (рис. Д.1.7). Якщо в пам'яті є формула для визначення моменту інерції трикутного перерізу відносно осі, яка співпадає з основою, тоді задача розв'язується просто, як сума двох моментів інерції. А найелементарнішим рішенням буде рішення для перерізу, яке має більше двох осей симетрії, тобто має кругову симетрію. Для таких перерізів відносно будь-яких центральних осей осьові моменти інерції

будуть рівними між собою. Отже, $J_z = \frac{a^4}{12}$.

3. Вибір методу розв'язання задачі.

Наприклад, у рамі (рис. Д.1.8) установити положення сили F , при якому вертикальне переміщення вузла C дорівнювало б нулю.

Для розв'язання цієї задачі найбільш вдалим методом визначення переміщень буде метод Мора. Для наочності доказу цього побудуємо одиничну і вантажну епюри згинальних моментів.

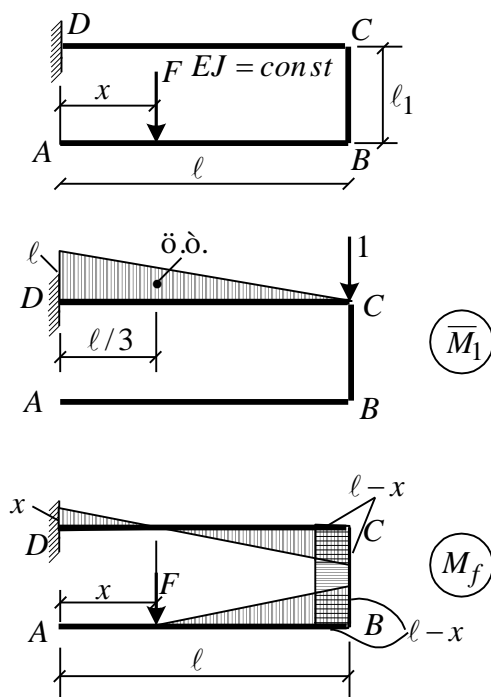


Рис. Д.1.8

Обчислення інтегралів Мора зробимо за допомогою формули Верещагіна:

$$\Delta_c = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_f dx}{EJ} = \sum \frac{\omega \cdot y_c}{EJ},$$

відповідно до якої через лінійність епюр \bar{M}_1 і M_f можна знайти площу епюри моментів одиничного стану і помножити на ординату епюри вантажної, яка лежить проти центра ваги одиничної епюри. ω не дорівнює нулю. Щоб $\Delta_c = 0$, необхідно, щоб $y_c = 0$. А це буде тоді, коли сила F буде розташована під центром ваги одиничної епюри, тобто $x = \frac{l}{3}$. Задача

розв'язана без виконання обчислень.

4. Записувати рівняння і обчислювати тільки величини, необхідні для розв'язання задачі.

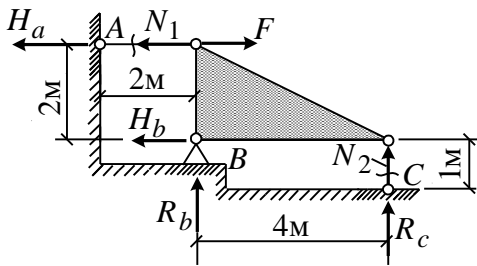


Рис. Д.1.9

Наприклад, у задачі (рис. Д.1.9) потрібно знайти зусилля N_1 і N_2 . Система пов'язана з основою чотирма зв'язками. Отже, статично невизначна. Необхідно скласти три рівняння статички і одне рівняння нерозривності деформацій.

Але для розв'язання задачі потрібні тільки дві реакції H_a і R_c , через які і знаходяться N_1 і N_2 . Тому й записуємо лише два рівняння – одне статички, а саме $\sum M_b = 0$, і рівняння нерозривності, куди ввійдуть тільки R_a і R_c . Із цих двох рівнянь одержимо R_a і R_c , а потім і N_1 і N_2 .

5. Використання при обчисленнях відношення величин з однаковими розмірностями (див. приклад 1 (стор. 198 і 199)).

6. Використання принципу незалежності дії сил при визначенні зусиль і переміщень у задачах з лінійно-деформованими системами.

Дивись, наприклад, розв'язання задачі 5.2.1 і задачі в наступному пункті додатка.

7. Знаходження несподіваних оригінальних рішень.

Наприклад, при розв'язанні задачі 5.2.12 задане навантаження

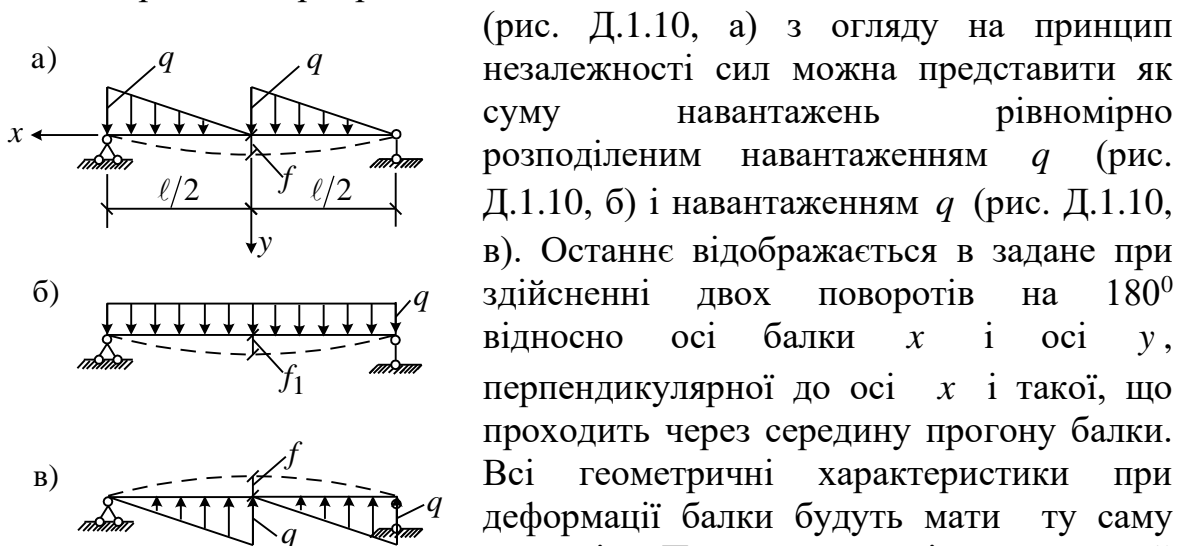


Рис. Д.1.10

(рис. Д.1.10, а) з огляду на принцип незалежності сил можна представити як суму навантажень рівномірно розподіленим навантаженням q (рис. Д.1.10, б) і навантаженням q (рис. Д.1.10, в). Останнє відображається в задане при здійсненні двох поворотів на 180° відносно осі балки x і осі y , перпендикулярної до осі x і такої, що проходить через середину прогону балки. Всі геометричні характеристики при деформації балки будуть мати ту саму симетрію. При цьому, оскільки шуканий прогин балки розташовується посередині її, тобто на осі y , то при зазначених поворотах він буде зберігати свою величину при зміні знака.

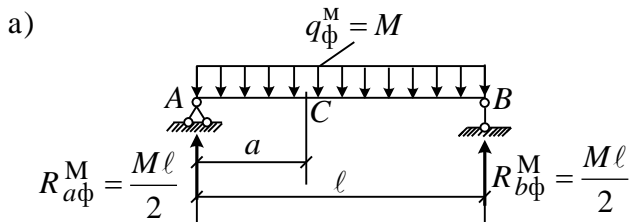
Із цього випливає (рис. Д.1.10, а, б, в), що $f = f_1 - f$, або $f = \frac{1}{2}f_1$.

Як відомо, $f_1 = \frac{5ql^4}{384EJ}$. Отже, $f = \frac{5ql^4}{768EJ}$. Порівняйте з розв'язанням задачі 5.2.12.

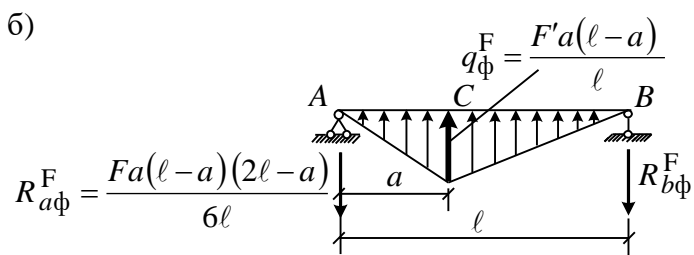
Або інший приклад. При розв'язанні задачі 5.2.13 позначимо співвідношення моментів через $n = \frac{M_1}{M_2}$ і припустимо, що воно не

залежить від положення сили F . Тепер розглянемо випадок, коли сила перебуває посередині балки. Через симетрію деформацій від навантаження будемо мати рівність опорних моментів $M_1 = M_2$. Або $n = 1$. З нашого припущення про сталість відношення випливає, що й при будь-якому розташуванні сили F на балці $n = 1$, тобто опорні моменти завжди будуть рівними між собою.

Розв'яжемо задачу при такому припущенні, застосовуючи графоаналітичний метод як найбільш ефективний у цьому випадку (рис. Д.1.11).



Складемо вирази для $Q_{сф}$ і $M_{сф}$ і прирівняємо їх до нуля відповідно до заданих умов $y'_c = 0$ $y_c = 0$.



$$\frac{M\ell}{2} - Ma - \frac{Fa(\ell-a)(2\ell-a)}{6\ell} + \frac{1}{2} \frac{Fa^2(\ell-a)}{\ell} = 0,$$

Рис. Д.1.11

$$\frac{M\ell}{2} a - Ma \frac{a}{2} - \frac{Fa^2(\ell-a)(2\ell-a)}{6\ell} + \frac{1}{2} \frac{Fa^2(\ell-a)}{\ell} \frac{1}{3} a = 0.$$

З першого і другого рівняння одержуємо однаковий результат

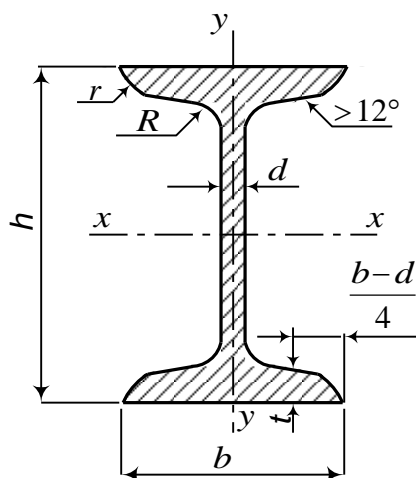
$$M_1 = M_2 = M = \frac{2Fa(\ell - a)}{3\ell}.$$

Отже, по-перше, ми знайшли швидке рішення задачі і, по-друге, одержали доказ правильності припущення про сталість співвідношення $n = \frac{M_1}{M_2}$.

Тактика розв'язання задач – це не щось застигле, вона вдосконалюється з розв'язанням кожної конкретної задачі. Але це відбувається не само по собі, а тільки при проведенні аналізу розв'язання, запам'ятовування і нагромадженні в пам'яті конкретних прийомів, застосованих у даній задачі.

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЇ СТАЛІ

Балки двотаврові (за ГОСТ 8239-89)



Позначення

 h - висота балки; b - ширина полиці; d - товщина стінки; t - середня товщина полиці; J - момент інерції; W - момент опору; i - радіус інерції; S - статичний момент
півперерізу

Таблиця Д.2.1

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4.5	7.2	12.0	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22	9.46
12	120	64	4.8	7.3	14.7	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38	11.5
14	140	73	4.9	7.5	17.4	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.5	1.55	13.7
16	160	81	5.0	7.8	20.2	873	109	6.57	62.3	58.6	14.5	1.70	15.9
18	180	90	5.1	8.1	23.4	1290	143	7.42	81.4	82.6	18.4	1.88	18.4
20	200	100	5.2	8.4	26.8	1840	184	8.28	104	115	23.1	2.07	21.0
22	220	110	5.4	8.7	30.6	2550	232	9.13	131	157	28.6	2.27	24.0

Продовження табл. Д.2.1

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t									
24	240	115	5.6	9.5	34.8	3460	289	9.97	163	198	34.5	2.37	27.3
27	270	125	6.0	9.8	40.2	5010	371	11.2	210	260	41.5	2.54	31.5
30	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	36.5
33	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	42.2
36	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	48.6
40	400	155	8.3	13.0	72.6	19062	953	16.2	545	667	86.1	3.03	57.0
45	450	160	9	14.2	84.7	27696	1231	18.1	708	808	101	3.09	66.5
50	500	170	10	15.2	100	39727	1589	19.9	919	1043	123	3.23	78.5
55	550	180	11	16.5	118	55962	2035	21.8	1181	1356	151	3.39	92.6
60	600	190	12	17.8	138	76806	2560	23.6	1491	1725	182	3.54	108

Швелери (за ГОСТ 8240-89)

Позначення

h - висота швелера;

b - ширина полиці;

d - товщина стінки;

t - середня товщина полиці;

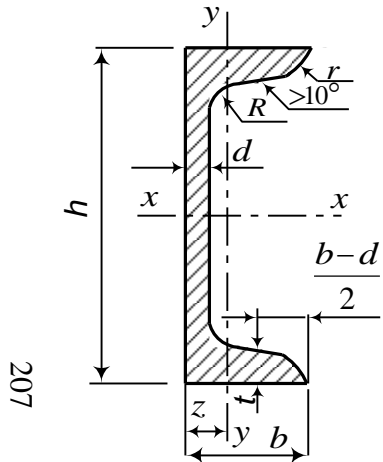
z_0 - відстань від осі y до зовнішньої грані стінки

J - момент інерції;

W - момент опору;

i - радіус інерції;

S - статичний момент півперерізу;



207

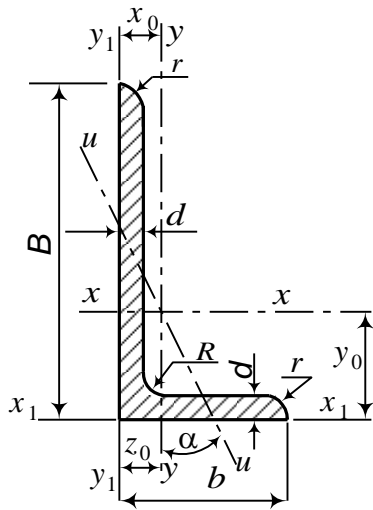
Таблиця Д.2.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t										
5	5	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.1	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16	4.84
6.5	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.0	8.7	3.68	1.08	1.24	5.90
8	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31	7.05
10	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44	8.59
12	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54	10.4
14	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67	12.3
16	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.6	13.8	1.87	1.80	14.2
16a	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00	15.3

Продовження табл. Д.2.2

Номер профілю	Розміри, мм				Площа перерізу, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см	Маса 1 м, кг
	h	b	d	t										
18	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86	17.0	2.04	1.94	16.3
18a	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13	17.4
20	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07	18.4
22	220	80	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.37	2.21	21.0
24	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42	24.0
27	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47	27.7
30	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52	31.8
33	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59	36.5
36	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68	41.9
40	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75	48.3

Кутики нерівнополичні (за ГОСТ 8510-86*)



Позначення

- B - ширина більшої полиці;
- b - ширина меншої полиці;
- d - товщина стінки;
- J - момент інерції;
- i - радіус інерції;
- x_0, y_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць

Таблиця Д.2.3

Номер профілю	Розміри, мм			Площа перерізу, см^2	J_x , см^4	i_x , см	J_y , см^4	i_y , см	$J_{u \min}$, см^4	$i_{u \min}$, см^4	Кут нахилу осі u $\text{tg } \alpha$	J_{x1} , см^4	J_{y1} , см^4	x_0 , см	y_0 , см	Маса 1 м, кг
	B	b	d													
2.5/1.6	25	16	3	1.16	0.7	0.78	0.22	0.44	0.13	0.3	0.392			0.42	0.86	0.91
3.2/2	32	20	3	1.49	1.52	1.01	0.46	0.55	0.28	0.43	0.382			0.49	1.08	1.17
			4	1.94	1.93	1.00	0.57	0.54	0.35	0.43	0.374			0.53	1.12	1.52
4/2.5	40	25	3	1.89	3.06	1.27	0.93	0.7	0.56	0.54	0.385			0.59	1.32	1.48
			4	2.47	3.93	1.26	1.18	0.69	0.71	0.54	0.381			0.63	1.37	1.94
			5	3.03	4.73	1.25	1.41	0.68	0.86	0.53	0.374			0.66	1.41	2.37
5/3.2	50	32	3	2.42	6.18	1.6	1.99	0.91	1.18	0.7	0.403			0.72	1.6	1.9

Продовження табл. Д.2.3

Номер профілю	Розміри, мм			Площа пере-різу, см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	J_y , см ⁴	i_y , см	$J_{u\ min}$, см ⁴	$i_{u\ min}$, см ⁴	Кут нахилу осі u $tg\ \alpha$	J_{x1} , см ⁴	J_{y1} , см ⁴	x_o , см	y_o , см	Маса 1 м, кг
	B	b	d													
5.6/3.6	56	36	4	3.58	11.4	1.78	3.7	1.02	2.19	0.78	0.406	23.2	6.25	0.84	1.82	2.81
			5	4.41	13.8	1.77	4.48	1.01	2.66	0.78	0.404	29.2	7.91	0.88	1.86	3.46
6.3/4	63	40	4	4.04	16.3	2.01	5.16	1.13	3.07	0.87	0.397	33.0	8.51	0.91	2.03	3.17
			5	4.98	19.9	2.00	6.26	1.12	3.72	0.86	0.396	41.4	10.8	0.95	2.08	3.91
			6	5.90	23.3	1.99	7.28	1.11	4.36	0.86	0.393	49.9	13.1	0.99	2.12	4.63
			8	7.68	29.6	1.96	9.15	1.09	5.58	0.85	0.386	66.9	17.9	1.07	2.20	6.03
7/4.5	70	45	5	5.59	27.8	2.23	9.05	1.27	5.34	0.98	0.406	56.7	15.2	1.05	2.28	4.39
7.5/5	75	50	6	7.25	40.9	2.38	14.6	1.42	8.48	1.08	0.435	83.9	25.2	1.21	2.44	5.69
			8	9.47	52.4	2.35	18.5	1.40	10.9	1.07	0.430	112	34.2	1.29	2.52	7.43
8/5	80	50	5	6.36	41.6	2.56	12.7	1.41	7.58	1.09	0.387	84.6	20.8	1.13	2.60	4.99
			6	7.55	49.0	2.55	14.8	1.40	8.88	1.08	0.386	102	25.2	1.17	2.65	5.92
9/5.6	90	56	5.5	7.86	65.3	2.88	19.7	1.58	11.8	1.22	0.384	132	32.2	1.26	2.92	6.17
			6	8.54	70.6	2.88	21.2	1.58	12.7	1.22	0.384	145	35.2	1.28	2.95	6.70
			8	11.18	90.9	2.85	27.1	1.56	16.3	1.21	0.380	194	47.8	1.36	3.04	8.77
10/6.3	100	63	6	9.59	98.3	3.20	30.6	1.79	18.2	1.38	0.393	198	49.9	1.42	3.23	7.53
			7	11.1	113	3.19	35.0	1.78	20.8	1.37	0.392	232	58.7	1.46	3.28	8.70
			8	12.6	127	3.18	39.2	1.77	23.4	1.36	0.391	266	67.6	1.50	3.32	9.87
			10	15.5	154	3.15	47.1	1.75	28.3	1.35	0.387	333	85.8	1.58	3.40	12.10

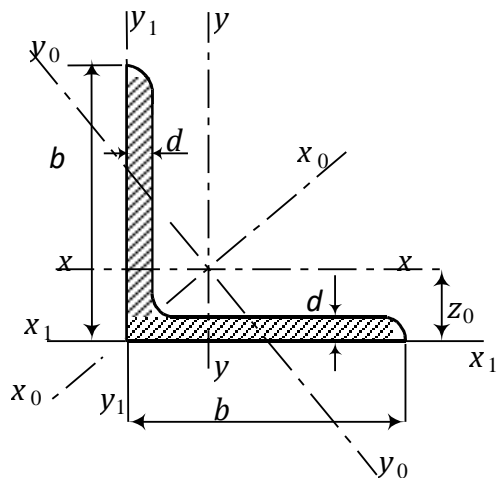
Продовження табл. Д.2.3

Номер профілю	Розміри, мм			Площа пере-різу, см ²	J_x ,	i_x ,	J_y ,	i_y ,	$J_{u\ min}$,	$i_{u\ min}$,	Кут нахилу осі u $tg\ \alpha$	J_{x1}	J_{y1}	x_0 ,	y_0 ,	Маса 1 м, кг
	B	b	d		см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см ⁴		см ⁴	см ⁴	см ⁴	см	
11/7	110	70	6.5	11.4	142	3.53	45.6	2.00	26.9	1.53	0.402	286	74.3	1.58	3.55	8.98
			8	13.9	172	3.51	54.6	1.98	32.3	1.52	0.400	353	92.3	1.64	3.61	10.9
12.5/8	125	80	7	14.1	227	4.01	73.7	2.29	43.4	1.76	0.407	452	119	1.80	4.01	11.0
			8	16.0	256	4.00	83	2.28	48.8	1.75	0.406	518	137	1.84	4.05	12.5
			10	19.7	312	3.98	100	2.26	59.3	1.74	0.404	649	173	1.92	4.14	15.5
			12	23.4	365	3.95	117	2.24	69.5	1.72	0.400	781	210	2.00	4.22	18.3
14/9	140	90	8	18.0	364	4.49	120	2.58	70.3	1.98	0.411	727	104	2.03	4.49	14.1
			10	22.2	444	4.47	146	2.56	85.5	1.96	0.409	911	245	2.12	4.58	17.5
16/10	160	100	9	22.9	606	5.15	186	2.85	110	2.20	0.391	1221	300	2.23	5.19	18.0
			10	25.3	667	5.13	204	2.84	121	2.19	0.390	1359	335	2.28	5.23	19.8
			12	30.0	784	5.11	239	2.82	142	2.18	0.388	1634	405	2.36	5.32	23.6
			14	34.7	897	5.08	272	2.80	162	2.16	0.385	1910	477	2.43	5.40	27.3

Продовження табл. Д.2.3

Номер профілю	Розміри, мм			Площа пере-різу, см ²	$J_x,$ см ⁴	$i_x,$ см	$J_y,$ см ⁴	$i_y,$ см	$J_{u\ min},$ см ⁴	$i_{u\ min},$ см ⁴	Кут нахилу осі u $tg\ \alpha$	J_{x1} см ⁴	J_{y1} см ⁴	$x_o,$ см	$y_o,$ см	Маса 1 м, кг
	B	b	d													
18/11	180	110	10	28.3	952	5.80	276	3.12	165	2.42	0.375	1933	444	2.44	5.88	22.2
			12	33.7	1123	5.77	324	3.10	194	2.40	0.374	2324	537	2.52	5.97	26.4
20/12.5	200	125	11	34.9	1449	6.45	446	3.58	264	2.75	0.392	2920	718	2.79	6.50	27.4
			12	37.9	1568	6.43	482	3.57	285	2.74	0.392	3189	786	2.83	6.54	29.7
			14	43.9	1801	6.41	551	3.54	327	2.73	0.390	3726	922	2.91	6.62	34.4
			16	49.8	2026	6.38	617	3.52	367	2.72	0.388	4264	1061	2.99	6.71	39.1

Кутики рівнополічні (за ГОСТ 8509-93)



Позначення

- b - ширина полиці;
- d - товщина стінки;
- J - момент інерції;
- i - радіус інерції;
- z_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць

213

Таблиця Д.2.4

Номер профілю	b	d	Площа перерізу, cm^2	Довідкові величини для осей							z_0 , cm	Маса 1 м довжини профілю kg
				$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1		
				J_x , cm^4	i_x , cm	$J_{x_0 \max}$, cm^4	$i_{x_0 \max}$, cm	$J_{y_0 \min}$, cm^4	$i_{y_0 \min}$, cm	J_{x_1} , cm^4		
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3	30	3	1,74	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59		0,85	1,36
		4	2,27	1,84	0,90	2,92	1,13	0,77	0,58		0,89	1,78

Продовження табл. Д.2.4

Номер профілю	b	d	Площа пере-різу, см^2	Довідкові величини для осей								Маса 1м довжини профілю кг
				$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	$z_0, \text{см}$	
	$J_x,$ см^4	$i_x,$ см		$J_{x0 \max},$ см^4	$i_{x0 \max},$ см	$J_{y0 \min},$ см^4	$i_{y0 \min},$ см	$J_{x1},$ см^4				
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,5	35	3	2,04	2,35	1,07	3,72	1,35	0,97	0,69		0,97	1,60
		4	2,67	3,01	1,06	4,76	1,33	1,25	0,68		1,01	2,10
		5	3,28	3,61	1,05	5,71	1,32	1,52	0,68		1,05	2,58
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
		6	5,69	13,07	1,52	20,72	1,91	5,43	0,98		1,46	4,47
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72

Продовження табл. Д.2.4

Номер профілю	<i>b</i>	<i>d</i>	Площа пере-різу, см ²	Довідкові величини для осей								Маса 1м довжини профілю кг
				<i>x-x</i>		<i>x₀-x₀</i>		<i>y₀-y₀</i>		<i>x₁-x₁</i>	<i>z₀</i> , см	
	<i>J_x</i> , см ⁴	<i>i_x</i> , см		<i>J_{x0 max}</i> , см ⁴	<i>i_{x0 max}</i> , см	<i>J_{y0 min}</i> , см ⁴	<i>i_{y0 min}</i> , см	<i>J_{x1}</i> , см ⁴				
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20

Продовження табл. Д.2.4

Номер профілю	b	d	Площа пере-різу, см^2	Довідкові величини для осей								Маса 1м довжини профілю кг
				$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	$z_0, \text{см}$	
	$J_x,$ см^4	$i_x,$ см		$J_{x0 \max},$ см^4	$i_{x0 \max},$ см	$J_{y0 \min},$ см^4	$i_{y0 \min},$ см	$J_{x1},$ см^4				
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5

Продовження табл. Д.2.4

Номер профілю	b	d	Площа пере-різу, см^2	Довідкові величини для осей								Маса 1м довжини профілю кг
				$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	$z_0, \text{см}$	
	$J_x,$ см^4	$i_x,$ см		$J_{x0 \max},$ см^4	$i_{x0 \max},$ см	$J_{y0 \min},$ см^4	$i_{y0 \min},$ см	$J_{x1},$ см^4				
16	160	10	31,3	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8

Продовження табл. Д.2.4

Номер профілю	b	d	Площа пере-різу, см^2	Довідкові величини для осей								Маса 1 м довжини профілю кг
				$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	$z_0, \text{см}$	
	$J_x,$ см^4	$i_x,$ см		$J_{x0 \max},$ см^4	$i_{x0 \max},$ см	$J_{y0 \min},$ см^4	$i_{y0 \min},$ см	$J_{x1},$ см^4				
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ η , η_1 , η_2 , η_3

$$\eta = e^{-sx} (\cos sx + \sin sx); \quad \eta_1 = e^{-sx} (\cos sx - \sin sx); \quad \eta_2 = e^{-sx} \cos sx;$$

$$\eta_3 = e^{-sx} \sin sx$$

Таблиця Д.3.1

sx	η	η_3	η_1	η_2
0,0	1,000	0,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9907	+0,0903	0,8100	0,9003
0,2	0,9651	0,1627	0,6398	0,8024
0,3	0,9267	0,2189	0,4888	0,7077
0,4	0,8784	0,2610	0,3564	0,6174
0,5	0,8231	0,2908	0,2415	0,5323
0,6	0,7628	0,3099	0,1431	0,4530
0,7	0,6997	0,3199	0,0599	0,3708
1/4 π	0,6448	0,3224	+0,0000	0,3224
0,8	0,6354	0,3223	-0,0093	0,3131
0,9	0,5712	0,3185	-0,0657	0,2527
1,0	0,5083	0,3096	-0,1108	0,1988
1,1	0,4476	0,2967	-0,1457	0,1510
1,2	0,3899	0,2807	0,1716	0,1091
1,3	0,3355	0,2626	-0,1897	0,0729
1,4	0,2849	0,2430	-0,2011	0,0419
1,5	0,2384	0,2226	-0,2068	+0,0158
1/2 π	0,2079	0,2079	-0,2079	0,0000
1,6	0,1959	0,2018	-0,2077	-0,0059
1,7	0,1576	0,1812	-0,2047	-0,0235
1,8	0,1234	0,1610	-0,1985	-0,0376
1,9	0,0932	0,1415	-0,1899	-0,0484
2,0	0,0667	0,1231	-0,1794	-0,0563
2,1	0,0439	0,1057	-0,1675	-0,0618
2,2	0,0244	0,0896	-0,1548	-0,0652
2,3	0,0080	0,0748	-0,1416	-0,0668
3/4 π	+0,0000	0,0670	-0,1340	-0,0670
2,4	-0,0056	0,0613	-0,1282	-0,0669
2,5	-0,0166	0,0491	-0,1149	-0,0658
2,6	-0,0254	0,0383	-0,1019	-0,0636
2,7	-0,0320	0,0287	-0,0895	-0,0608
2,8	-0,0369	0,0204	-0,0777	-0,0573
2,9	-0,0403	0,0132	-0,0666	-0,0534

Продовження табл. Д.3.1

sx	η	η_3	η_1	η_2
3,0	-0,04226	0,00703	-0,05632	-0,04929
3,1	-0,04314	0,00187	-0,04688	-0,04501
π	-0,04321	+0,00000	-0,04321	-0,04321
3,2	-0,04307	-0,00238	-0,03831	-0,04069
3,3	-0,04224	-0,00582	-0,03060	-0,03642
3,4	-0,04079	-0,00853	-0,02374	-0,03227
3,5	-0,03887	-0,01059	-0,01769	-0,02828
3,6	-0,03659	-0,01209	-0,01241	-0,02450
3,7	-0,03407	-0,01310	-0,00787	-0,02097
3,8	-0,03138	-0,01369	-0,00401	-0,01770
3,9	-0,02862	-0,01392	-0,00077	-0,01469
$5/4\pi$	-0,02786	-0,01393	+0,00000	-0,01393
4,0	-0,02583	-0,01386	0,00189	-0,01197
4,1	-0,02309	-0,01356	0,00403	-0,00953
4,2	-0,02042	-0,01307	0,00572	-0,00735
4,3	-0,01787	-0,01243	0,00699	-0,00544
4,4	-0,01546	-0,01168	0,00791	-0,00377
4,5	-0,01320	-0,01086	0,00852	-0,00234
4,6	-0,01112	-0,00999	0,00786	-0,00113
4,7	-0,00921	-0,00909	0,00898	-0,00011
$6/4\pi$	-0,00898	-0,00898	0,00898	0,00000
4,8	-0,00748	-0,00820	0,00892	+0,00072
4,9	-0,00593	-0,00732	0,00870	0,00139
5,0	-0,00455	-0,00646	0,00837	0,00191
5,1	-0,00334	-0,00564	0,00795	0,00230
5,2	-0,00229	-0,00487	0,00746	0,00259
5,3	-0,00139	-0,00415	0,00692	0,00277
5,4	-0,00063	-0,00349	0,00636	0,00287
$7/4\pi$	+0,00000	-0,00290	0,00579	0,00290
5,5	0,00001	-0,00288	0,00578	0,00290
5,6	0,00053	-0,00233	0,00520	0,00287
5,7	0,00095	-0,00184	0,00464	0,00279
5,8	0,00127	-0,00141	0,00409	0,00268
5,9	0,00152	-0,00102	0,00356	0,00254
6,0	0,00169	-0,00069	0,00307	0,00238
6,1	0,00180	-0,00069	0,00261	0,00221
6,2	0,00185	-0,00017	0,00219	0,00202

Продовження табл. Д.3.1

sx	η	η_3	η_1	η_2
$8/4\pi$	0,00187	0,00000	0,00187	0,00187
6,3	0,00187	+0,00003	0,00181	0,00184
6,4	0,00184	+0,00019	0,00146	0,00165
6,5	0,00179	+0,00032	0,00115	0,00147
6,6	0,00172	+0,00042	0,00087	0,00129
6,7	0,00162	+0,00050	0,00063	0,00113
6,8	0,00152	+0,00055	0,00042	0,00097
6,9	0,00141	+0,00058	0,00024	0,00082
7,0	0,00129	+0,00060	0,00009	0,00069
$9/4\pi$	0,00120	+0,00060	0,00000	0,00060

ТАБЛИЦЯ ФУНКЦІЙ О.М. КРИЛОВА

$$Y_1 = ch\ sx \cos sx ;$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} (sh\ sx \cos sx + ch\ sx \sin sx) ;$$

$$Y_3 = \frac{1}{2} sh\ sx \sin sx ;$$

$$Y_4 = \frac{1}{4} (ch\ sx \sin x - sh\ sx \cos sx)$$

Таблиця Д.4.1

$s \cdot x$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	1,0	0	0	0
0,1	1,0	0,10	0,0050	0,00015
0,2	0,9997	0,20	0,0200	0,00135
0,3	0,9987	0,2999	0,0450	0,00450
0,4	0,9957	0,39965	0,0800	0,0107
0,5	0,9895	0,49895	0,1249	0,0208
0,6	0,9784	0,59745	0,17975	0,0360
0,7	0,9600	0,69440	0,24435	0,0571
0,8	0,9318	0,7891	0,31855	0,08515
0,9	0,8931	0,88035	0,40205	0,1211
1,0	0,8337	0,96675	0,49445	0,1659
1,1	0,7568	1,04645	0,59515	0,2203
1,2	0,6561	1,1173	0,70345	0,28515
1,3	0,5272	1,1767	0,81825	0,3612
1,4	0,3656	1,22165	0,9383	0,4490
1,5	0,1664	1,24855	1,06195	0,5490
1,6	-0,0753	1,2535	1,18725	0,66145
1,7	-0,3644	1,2319	1,3118	0,7864
1,8	-0,7060	1,17885	1,4326	0,9237
1,9	-1,1049	1,0888	1,54635	1,0727
2,0	-1,5656	0,95575	1,64895	1,2325
2,1	-2,09223	0,7735	1,73585	1,40195
2,2	-2,6882	0,5351	1,8018	1,57905
2,3	-3,3562	0,23345	1,84075	1,7614
2,4	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,94605
2,5	-4,9128	-0,5885	1,81045	2,12925
2,6	-5,8003	-1,1236	1,72555	2,3065
2,7	-6,7565	-1,7509	1,58265	2,47245
2,8	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208

Продовження табл. Д.4.1

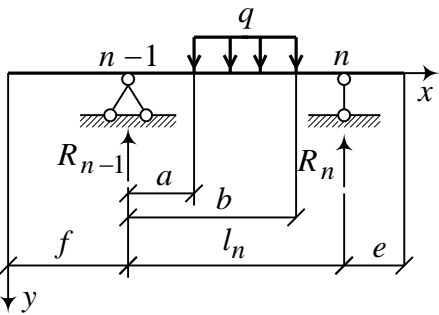
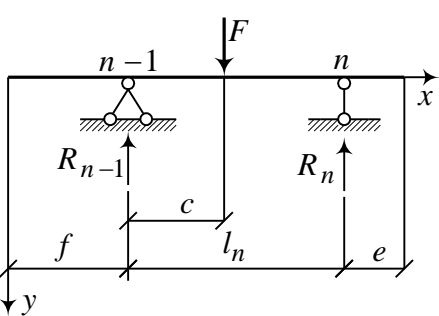
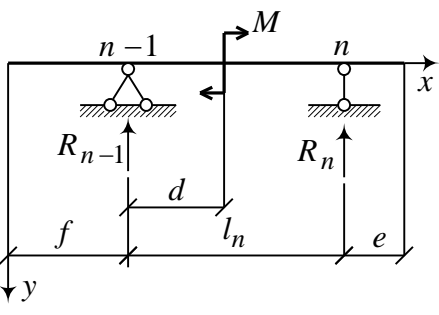
$s \cdot x$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
2,9	-8,8471	-3,3079	1,08375	2,7443
3,0	-9,9669	-4,24845	0,70685	2,8346
3,1	-11,1119	-5,30225	0,2303	2,8823
3,2	-12,2656	-6,47105	-0,3574	2,8769
3,3	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,80675
3,4	-14,5008	-9,15065	-1,9121	2,6589
3,5	-15,5198	-10,65245	-2,9014	2,4195
3,6	-16,4218	-12,25075	-4,04585	2,0735
3,7	-17,1622	-13,9315	-5,35435	1,60485
3,8	-17,6875	-15,67605	-6,8343	0,9969
3,9	-17,9387	-17,45985	-8,4909	0,2321
4,0	-17,8498	-19,25235	-10,3265	-0,7073
4,1	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,2	-16,3505	-22,70545	-14,52735	-3,1812
4,3	-14,7722	-24,26685	-16,8773	-4,7501
4,4	-12,5180	-25,63725	-19,37425	-6,5615
4,5	-9,4890	-26,74465	-21,9959	-8,6290
4,6	-5,5791	-27,50565	-24,71165	-10,96380
4,7	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,57323
4,8	5,3164	-27,60515	-30,2589	-16,4604
4,9	12,5239	-26,72385	-32,9814	-19,6232
5,0	21,0504	-25,05645	-35,57745	-23,0525
5,1	30,9997	-22,46605	-37,96185	-26,7317
5,2	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,3	55,5317	-13,9201	-41,68255	-34,72455
5,4	70,2637	-7,6440	-42,77265	-38,9324
5,5	86,7044	0,19005	-43,15925	-43,2557
5,6	104,8687	9,75435	-42,67745	-47,5558
5,7	124,7352	21,2199	-41,14535	-51,75625
5,8	146,2478	34,7564	-38,36395	-55,74285
5,9	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,38045
6,0	193,6813	68,65775	-28,2116	-62,5106
6,1	219,2004	89,29465	-20,30425	-64,9518
6,2	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
6,3	272,2487	138,4120	2,28855	-66,91745
6,4	298,8909	166,9722	17,5362	-65,9486
6,5	324,7861	198,1637	35,77125	-63,21045
6,6	349,2554	231,88005	57,2528	-58,6871
6,7	371,4244	267,9374	82,2255	-51,74295

Продовження табл. Д.4.1

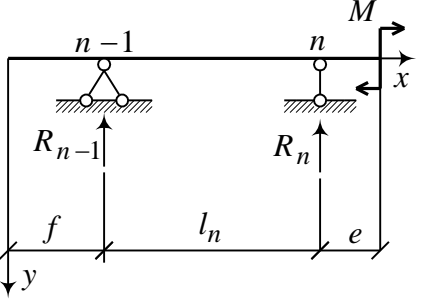
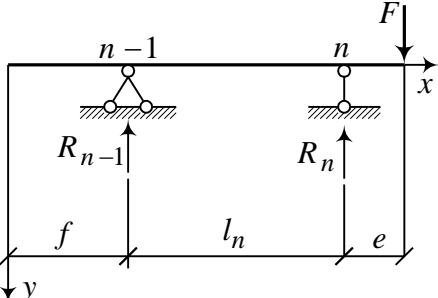
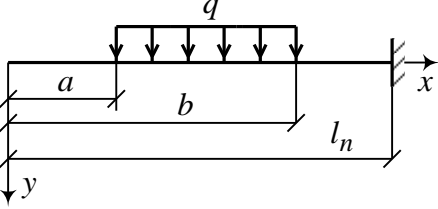
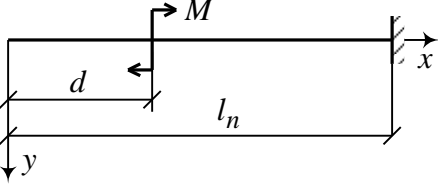
s, x	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
6,8	390,2947	306,0558	110,9087	-42,11895
6,9	404,7145	347,34985	143,4927	-30,1819
7,0	413,3762	386,80715	180,1191	-13,2842
7,1	414,8263	428,2849	220,87175	6,7296
7,2	407,4216	469,4772	265,76635	31,02805
7,3	389,3783	509,41565	314,72645	60,0189
7,4	358,7306	546,93425	367,56875	94,1019
7,5	313,3700	580,67095	423,9858	133,6506
7,6	251,0334	609,0402	483,5233	179,00345
7,7	169,3472	630,22945	545,5557	230,4412
7,8	65,8475	642,1835	609,25955	288,16805
7,9	-62,0375	642,58715	673,6057	352,3123
8,0	-216,8647	628,8779	737,31005	422,8713
8,1	-401,1674	598,23435	798,81785	499,7008
8,2	-617,4142	547,5808	856,28775	582,49745
8,3	-867,9091	473,5998	907,5542	670,7544
8,4	-1154,6587	372,78655	950,11575	763,7226
8,5	-1479,3701	241,41355	981,0984	860,3917
8,6	-1843,2880	75,6088	997,25265	959,44835
8,7	-2247,0402	-128,58235	994,93765	1059,2289
8,8	-2690,4845	-375,1167	970,1255	1157,69385
8,9	-3172,6917	-667,9794	818,86635	1252,35605
9,0	-3691,4815	-1010,87995	834,8607	1340,3007
9,1	-4243,5551	-1407,3690	714,40845	1418,0930
9,2	-4824,0587	-1860,5365	551,49275	1481,76105
9,3	-5426,5154	-2372,94855	340,3091	1526,7834
9,4	-6042,3167	-2946,2708	74,8875	1548,0229
9,5	-6660,9594	-3581,47555	-250,99585	1539,7419
9,6	-7269,3664	-4278,16925	-643,4861	1495,5985
9,7	-7851,7063	-5034,47135	-1108,61825	1408,6174
9,8	-8389,5687	-5847,0360	-1652,2517	1271,2663
9,9	-8860,9431	-6710,20695	-2279,7354	1075,3680
10,0	-9240,8733	-7616,14615	-2995,70945	812,3636

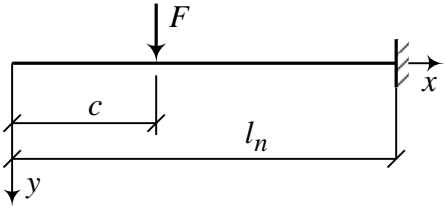
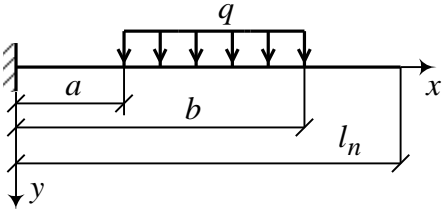
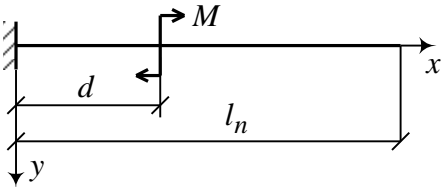
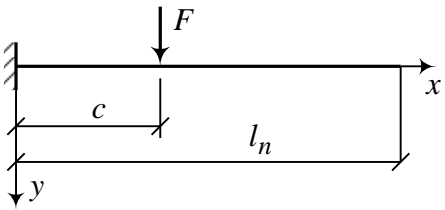
**ЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ
ДЛЯ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНИХ БАЛОК**

Таблиця Д.5.1

Номер схеми	Розрахункова схема балки	Формули для визначення опорних реакцій, початкових параметрів
1	2	3
1		$R_{n-1} = \frac{q(b-a)}{2l_n} [2l_n - (a+b)]$ $R_n = \frac{q(b-a)}{2l_n} (a+b)$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n - b)^4 + (l_n - a)^4] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 + \frac{q}{l_n} [(l_n - b)^4 + (l_n - a)^4] \right\}$
2		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n} (l_n - c)$ $R_n = \frac{Fc}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right]$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[R_n l_n^2 - F \frac{(l_n - a)^3}{l_n} \right]$
3		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}$ $R_n = \frac{M}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left[R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right]$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left[R_{n-1} l_n^2 + 3M \frac{(l_n - d)^2}{l_n} \right]$

1	2	3
4		$R_{n-1} = \frac{qf}{2l_n}(2l_n + f); \quad R_n = -\frac{qf^2}{2l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{24EJ} \left\{ 4R_{n-1}l_n^2 - \frac{q}{l_n} [(l_n + f)^4 - (l_n^4 + f^4)] + qf^3 \right\}$
5		$R_{n-1} = \frac{F}{l_n}(l_n + f); \quad R_n = \frac{Ff}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 - \frac{F}{l_n} [(l_n + f)^3 - f^3] + Ff^2 \right\}$
6		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{1}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] \right\}$ $y_0 = -\frac{f}{6EJ} \left\{ R_{n-1}l_n^2 + \frac{3M}{l_n} [(l_n + f)^2 - f^2] - 3Mf \right\}$
7		$R_{n-1} = -\frac{qe^2}{2l_n}; \quad R_n = \frac{qe}{2l_n}(2l_n + e)$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1}l_n^2}{6EJ}$ $y_0 = -\frac{R_{n-1}l_n^2 f}{6EJ}$

1	2	3
8		$R_{n-1} = -\frac{M}{l_n}; \quad R_n = \frac{M}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1}l_n^2}{6EJ}$ $y_0 = -\frac{R_{n-1}l_n^2 f}{6EJ}$
9		$R_{n-1} = -\frac{Fl}{l_n}; \quad R_n = \frac{F(l_n + e)}{l_n}$ $\varphi_0 = \frac{R_{n-1}l_n^2}{6EJ}$ $y_0 = -\frac{R_{n-1}l_n^2 f}{6EJ}$
10		$\varphi_0 = -\frac{q}{6EJ} [(l_n - a)^3 - (l_n - b)^3]$ $y_0 = \frac{q}{24EJ} \left\{ 4l_n [(l_n - a)^3 - (l_n - b)^3] - \right.$ $\left. - [(l_n - a)^4 - (l_n - b)^4] \right\}$
11		$\varphi_0 = \frac{M(l_n - d)}{EJ}$ $y_0 = -\frac{M(l_n^2 - d^2)}{2EJ}$

1	2	3
12		$\varphi_0 = -\frac{F(l_n - c)^2}{2EJ}$ $y_0 = \frac{F(l_n - c)^2(2l_n + c)}{6EJ}$
13		$M_0 = \frac{q}{2}(b^2 - a^2)$ $Q_0 = q(b - a)$
14		$M_0 = -M$ $Q_0 = 0$
15		$M_0 = -Fc$ $Q_0 = F$

ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА φ

Таблиця Д.6.1

Гнучкість $\lambda = \frac{l_{\text{гран}}}{i}$	Сталь марок			Чавун марок		Дюра- люміній Д16Т	Дерево (сосна, ялина)	Сталь із розрахунко- вим опором $R=240$ МПа СНИП II-23-81
	Ст3 Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ 12-28 СЧ 15-32 СЧ 18-36 СЧ 21-40	СЧ 24-44 СЧ 28-48			
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99	0,987
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97	0,962
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,835	0,93	0,931
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87	0,894
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80	0,852
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71	0,805
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61	0,754
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49	0,686
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38	0,612
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31	0,542
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25	0,478
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22	0,419
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18	0,364
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16	0,315
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14	0,276
160	0,29	0,23	0,21				0,12	0,244
170	0,26	0,21	0,19				0,11	0,218
180	0,23	0,19	0,17				0,10	0,196
190	0,21	0,17	0,15				0,09	0,177
200	0,19	0,15	0,13				0,08	0,161
210	0,17	0,14	0,12					0,147
220	0,16	0,13	0,11					0,135

З М І С Т

Передмова до другого видання	3
Вступ	4
Задачі	5
Розділ 1. Розтягання і стискання	5
1.1. Основні поняття і формули	5
1.2. Задачі	6
Розділ 2. Геометричні характеристики перерізів.	9
2.1. Основні поняття і формули	9
2.2. Задачі	11
Розділ 3. Складний напружений стан	15
3.1. Основні поняття і формули	15
3.2. Задачі	17
Розділ 4. Зсув і крутіння	19
4.1. Основні поняття і формули	19
4.2. Задачі	21
Розділ 5. Згин	23
5.1. Основні поняття і формули	23
5.2. Задачі	26
Розділ 6. Статично невизначні балки. Нерозрізні балки. ..	30
6.1. Основні поняття і формули	30
6.2. Задачі	31
Розділ 7. Балка на пружній основі	33
7.1. Основні поняття і формули	33
7.2. Задачі	35
Розділ 8. Косий згин.	36
8.1. Основні поняття і формули	36
8.2. Задачі	37
Розділ 9. Згин з крутінням	39
9.1. Основні поняття і формули	39
9.2. Задачі	41
Розділ 10. Позацентровий стиск.	42
10.1. Основні поняття і формули	42
10.2. Задачі	44
Розділ 11. Стійкість	45
11.1. Основні поняття і формули	45
11.2. Задачі	46
Розділ 12. Динамічна дія навантажень.	48
12.1. Основні поняття і формули	48
12.2. Задачі	50
Відповіді	52
Розв'язки	59

Розділ 1	59
Розділ 2	73
Розділ 3	86
Розділ 4	95
Розділ 5	103
Розділ 6	136
Розділ 7	147
Розділ 8	155
Розділ 9	165
Розділ 10	170
Розділ 11	179
Розділ 12	185
Бібліографічний список	193
Додаток 1. Стратегія і тактика розв’язання задач	194
Додаток 2. Сортамент прокатної сталі	205
Додаток 3. Значення коефіцієнтів η , η_1 , η_2 , η_3	219
Додаток 4. Таблиця функцій О.М. Крилова	222
Додаток 5. Значення початкових параметрів для статично визначних балок	225
Додаток 6. Значення коефіцієнта φ	229