МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Н.Г. Панченко, М.Є. Резуненко

ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В УПРАВЛІННІ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Підручник

Частина І

Харків – 2015

УДК 519.2
ББК 22.161+39.280.3(075)
П 168

Рекомендовано вченою радою Українського державного університету залізничного транспорту як підручник
(витяг з протоколу № 4 від 26 травня 2015 р.)

Рецензенти:
професори В.В Скалозуб (ДНУЗТ ім. акад. В. Лазаряна),
Р.В. Вовк (ХНУ ім. В.Н. Каразіна), О.І. Стасюк (ДЕТУТ)

П 168 **Панченко Н.Г., Резуненко М.Є.** Елементи дослідження операцій в управлінні процесами перевезень: Підручник. – Харків: УкрДУЗТ, 2015. – Ч. 1. – 280 с., рис. 29, табл. 190.
ISBN 978-617-654-027-4

Призначений для студентів транспортних спеціальностей вищих навчальних закладів, а саме спеціальності 070101 “Організація перевезень і управління на залізничному транспорті”, також може бути корисним для фахівців і керівного персоналу при обґрунтуванні і вибору оптимальних управлінських рішень. Перша частина охоплює питання лінійного і нелінійного програмування. Особливу увагу приділено побудові математичних моделей при розв’язанні конкретних практичних задач з галузі експлуатації залізничного транспорту.

УДК 519.2
ББК 22.161+39.280.3(075)

ISBN 978-617-654-027-4

ЗМІСТ

ВСТУП

Потреба людства в розробленні ефективних методів управління організаційно-господарчими системами зумовила розвиток наукового напрямку, який отримав назву «Дослідження операцій». Як самостійний напрямок дослідження операцій виникло під час другої світової війни. У ці роки в збройних силах США були сформовані спеціальні групи науковців для підготовки рішень з організації бойових дій і прогнозування їхніх наслідків. Після закінчення другої світової війни методи дослідження операцій починають застосовувати в комерційній діяльності для вирішення проблем, пов'язаних з реорганізацією виробництва з метою підвищення його продуктивності, оптимізацією логістичних ланцюгів тощо. Історія розвитку менеджменту має багато прикладів вдалого застосування методів дослідження операцій [16]:

- завдяки науковим рекомендаціям Канадська національна залізниця заощадила близько 300 млн дол. при плануванні забезпечення зростаючого трафіка;
- логістична модель виробництва в компанії DEC дозволила вже через два роки свого застосування скоротити виробничі і транспортні витрати більш ніж на 350 млн дол.;
- раціональне розміщення транспортних засобів швидкої медичної допомоги в м. Остін (Техас, США) дозволило заощадити 3 млн дол. на створенні системи швидкої допомоги та заощаджувати щорічно на викликах 1-2 млн дол.

Таким чином, дослідження операцій – це науковий напрямок, присвячений розробленню методів оптимального управління організаційними системами, що набуває важливого значення в сучасних умовах ринкової економіки.

Метою даного підручника є теоретична підготовка майбутніх керівників транспортної системи і її структурних підрозділів, які спроможні використовувати набуті знання при аналізі, плануванні і контролі транспортної діяльності з метою підвищення її ефективності. В основу підручника покладено курс лекцій, що читався протягом кількох років студентам факультету управління процесами перевезень Української державної академії залізничного транспорту відповідно до навчальної програми дисципліни "Дослідження операцій в транспортних системах".

Для кращого розуміння теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю прикладів, які містять ілюстрації і таблиці. Теоретичні питання і задачі для самостійного опрацювання, що наведені в кінці кожного розділу, сприятимуть розвитку вміння майбутніх фахівців транспортної галузі розв'язувати конкретні управлінські задачі.

Основні поняття теорії дослідження операцій

Завданням дослідження операцій (ДО) є вибір і кількісне обґрунтування управлінських задач. Цими питаннями займаються *дослідники операцій* – окремі особи або наукові колективи, які розробляють стратегії поведінки, проводять оцінку впливу на результат операції різних факторів, аналізують окремі варіанти організації операції та надають рекомендації щодо вибору *оптимальних стратегій* (стратегій, які з тих або інших ознак кращі за інших).

Для оцінки результатів операції використовують *критерій оптимальності (критерій ефективності)* – математичний еквівалент мети операції, який дозволяє дати кількісну оцінку ступеня її досягнення. Кожній конкретній задачі відповідає свій критерій оптимальності, тому дуже важливу роль для досягнення поставленої мети відіграє його правильний вибір.

Дослідження будь-якої операції відбувається в декілька етапів.

На першому етапі формулюється задача у вигляді технічного завдання, проводиться збір даних і їх аналіз. На цьому етапі визначається мета операції та сукупність стратегій для її досягнення. Надзвичайна важливість цього етапу вимагає тісної співпраці галузевих фахівців і математиків.

На другому етапі складається *математична модель задачі* – система математичних залежностей, які описують основні закономірності, властиві процесу, що досліджується. Правильно побудована модель може значно підвищити ефективність роботи організації.

За наявності випадкових впливів на об’єкт, що досліджується, математичні моделі поділяють на два основних класи:

- детерміновані;
- стохастичні.

Детерміновані моделі застосовуються для опису процесів, у яких відсутні випадкові змінні або параметри, тобто початкова інформація повністю визначена. Стохастичні моделі відповідають процесам, у яких присутні випадкові події або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин.

Залежно від поведінки об'єкта протягом певного інтервалу часу моделі бувають:

- статичні або однокрокові (описують поведінку незмінної системи або поведінку системи в конкретний момент часу);
- динамічні або багатокрокові (описують поведінку системи, що змінюється протягом певного інтервалу часу).

Залежно від процесів, які протікають у системі, моделі поділяють на дискретні, неперервні і дискретно-неперервні.

Математичні моделі поділяють на лінійні та нелінійні залежно від виду функції цілі та обмежень задачі.

Графічно класифікацію моделей наведено на рис. 1.

На третьому етапі проводиться розв'язання побудованої моделі з використанням математичних методів, у результаті чого отримують набір значень контрольованих параметрів операції (розв'язок задачі). Для детермінованого випадку задачею ДО є пошук екстремума функції мети, яка дозволяє отримати необхідну інформацію для прийняття оптимального управлінського рішення. В умовах невизначеності достатньо ефективними є ігрові методи прийняття рішень і стохастичні методи. У цьому випадку виділяють область прийнятних розв'язків, остаточний вибір з яких повинен здійснювати керівник операції.

На четвертому етапі здійснюється перевірка адекватності моделі операції, що досліджується, і оцінка отриманого розв'язку з урахуванням впливу коливань різних параметрів системи. У разі неадекватності моделі з'ясовують причину цього, коригують побудовану математичну модель і розв'язують її знову.

На заключному етапі на основі отриманих результатів досліджень формулюють рекомендації для замовника щодо вибору оптимальних стратегій.

Типовими класами задач ДО вважаються:

- розподіл ресурсів;
- управління запасами;
- ремонт і заміна обладнання;
- задачі масового обслуговування;
- вибір маршруту;

- задача про рюкзак;
- моделювання конфліктних ситуацій;
- комбіновані (комплекс вищевизначених класів задач).

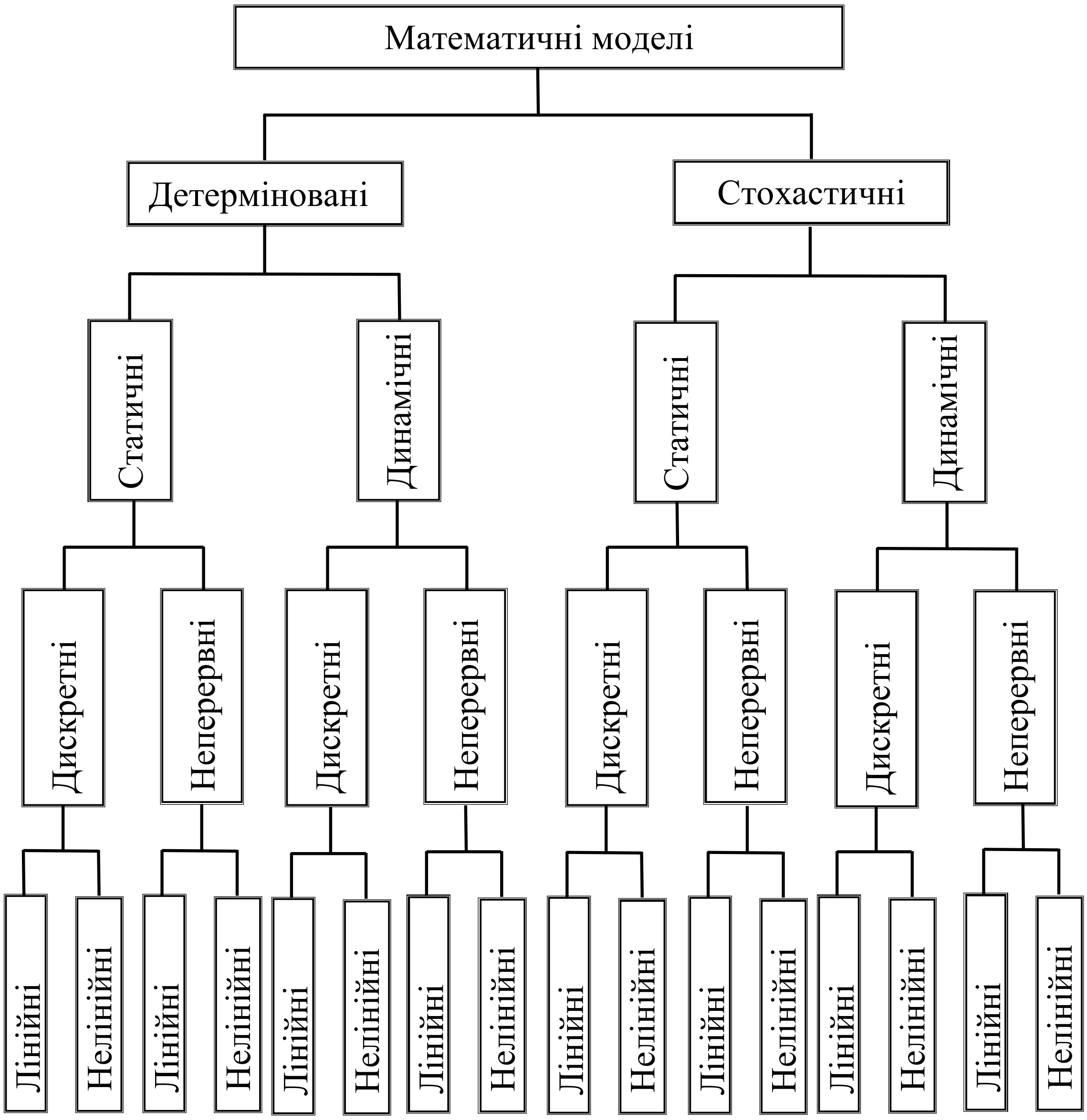


Рис. 1. Класифікація задач математичного моделювання

Задачі розподілу ресурсів пов'язані з відшуканням такого розподілу наявних ресурсів, який дозволяє мінімізувати витрати або максимізувати спільний прибуток. До таких задач належать транспортна задача, задача про суміші тощо.

Задачі управління запасами. Наявність ресурсів на виробництві дає можливість вчасно виконати будь-яке замовлення, а їх нестача може призвести до збитків внаслідок невиконання договірних зобов’язань. У той же час зі збільшенням запасів зростають і витрати на їх зберігання. Мета задач такого типу полягає у визначенні оптимальних розмірів і термінів надходження ресурсів. Критерієм оптимальності є мінімізація витрат на поставку та зберігання ресурсів.

Задачі ремонту та заміни обладнання визначають оптимальні терміни ремонту або заміни обладнання з метою зменшення сумарних витрат на експлуатацію, оскільки внаслідок морального і матеріального старіння погіршуються його технічні характеристики. У деяких випадках метою поставлених задач є збільшення прибутку внаслідок своєчасного ремонту або заміни діючого устаткування.

Задачі масового обслуговування полягають в оцінці ефективності роботи обслуговуючих систем, а також пошуку їхніх оптимальних параметрів (кількість каналів обслуговування, пропускна спроможність тощо) і характеристик функціонування.

Задачі вибору маршруту визначають найкращий маршрут, який пов’язує декілька пунктів і задовольняє необхідні додаткові вимоги, якщо вони є. До таких задач належать задача комівояжера, задача про максимальний потік, задача вибору найкоротшого шляху.

Задача про рюкзак часто виникає в логістиці при знаходженні оптимального плану завантаження транспортного засобу або складу.

Задачі моделювання конфліктних ситуацій або *змагальні задачі* виникають при прийнятті рішень за умов конфліктів, розбіжності інтересів учасників. Розв’язання таких задач здійснюється за допомогою апарату теорії ігор і статистичних методів з метою вибору найкращих стратегій для конфліктуючих сторін.

Комбіновані задачі. Деякі випадки господарчої діяльності потребують одночасного розв’язання комплексу декількох класів вищевизначених задач.

Розділ 1
ЖОРДАНОВІ ВИКЛЮЧЕННЯ

1.1. Метод жорданових виключень

Жорданові виключення – це зручна схема здійснення тотожних алгебраїчних перетворень.

Розглянемо систему систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Якщо ранг системи дорівнює $r\ (r < n)$, то ми можемо вибрати r невідомих, які виразимо через решту. Припустимо, наприклад, що вибрані змінні $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}\, x_{r+1} - a'_{2,r+2}\, x_{r+2} - \ldots - a'_{1n}\, x_n, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,r+1}\, x_1 - a'_{2,r+2}\, x_{r+2} - \ldots - a'_{2n}\, x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1}\, x_1 - a'_{r,r+2}\, x_{r+2} - \ldots - a'_{rn}\, x_n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Відомо, що до такого вигляду можна привести будь-яку сумісну систему. Правда, не завжди можна виражати перші r невідомих, але такі r невідомих обов'язково знайдуться.

Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_r$ називаються *базисними*, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - *вільними*. Надаючи вільним змінним числові значення і обчислюючи базисні невідомі, будемо отримувати різні розв'язки системи рівнянь. Базисні невідомі завжди можна виразити через вільні.

Опишемо метод жорданових виключень, який дозволяє звести систему (1.1) до *базисної форми* (1.2). Нехай змінна x_1 входить у перше рівняння з коефіцієнтом $a_{11} \neq 0$. Виразимо цю невідому з першого рівняння (1.2):

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$

і підставимо отриманий вираз у решту рівнянь системи (1.1):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} + \left(a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - a_{21} \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right) x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \frac{b_1}{a_{11}} + \left(a_{m2} - a_{m1} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \ldots + \left(a_{mn} - a_{m1} \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right) x_n = b_m. \end{cases}$$

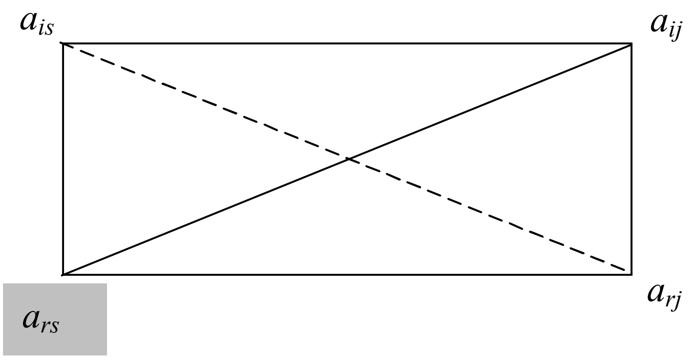
Ця процедура утворює один крок жорданових виключень, який називають *жордановим перетворенням*, а коефіцієнт a_{11}- *провідним елементом*.

На другому етапі вибирають одну зі змінних $x_2, \ldots, x_r$, що залишилися, з ненульовим коефіцієнтом і виражають з будь-якого рівняння, окрім першого, і т. д. Для отримання базисної форми (1.2) потрібно r кроків жорданових виключень.

Формули для розрахунків коефіцієнтів a'_{ij}, b'_j, $i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$ системи, яка отримана в результаті одного кроку жорданових виключень, з провідним елементом мають вигляд

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}},\ b'_r = \frac{b_r}{a_{rs}},$$
$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}\, a_{rj}}{a_{rs}},\ b'_i = b_i - \frac{b_r\, a_{is}}{a_{rs}}. \qquad (1.3)$$

Формули (1.3) можна описати "*правилом прямокутника*": *від добутку елементів у вершинах прямокутника на діагоналі з провідним елементом необхідно відняти добуток двох інших кутових елементів* (рис. 1.1), тобто



$$a'_{ij} = a_{ij}\,a_{rs} - a_{is}\,a_{rj}\,.$$

Рис. 1.1. Правило прямокутника

Для скорочення часу всі необхідні обчислення записують у вигляді таблиці. Для цього перепишемо систему (1.1)

$$\begin{cases} 0 = b_1 + a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1n}(-x_n), \\ 0 = b_2 + a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \ldots + a_{2n}(-x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m + a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mn}(-x_n); \end{cases}$$

і складемо таблицю (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Початкова таблиця

		Вільна змінна				Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	1
Базисна змінна	0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
	0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
	…	…	…	…	…	…
	0	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

Зауваження. Початкова таблиця складається з коефіцієнтів системи (1.1), тобто необов'язково робити попередні перетворення системи лінійних рівнянь для її складання.

Після одного кроку з провідним елементом $a_{11} \neq 0$ (у табл. 1.1 виділений сірим кольором), завдяки якому змінна x_1 стає базисною, отримаємо табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Ітерація 1

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Після обміну
$x_1 \leftrightarrow 0$</td><td colspan="4">Вільна змінна</td><td>Вільний член</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$-x_2$</td><td>…</td><td>$-x_n$</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Базис-
на
змін-
на</td><td>x_1</td><td>a'_{11}</td><td>a'_{12}</td><td>…</td><td>a'_{1n}</td><td>b'_1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>a'_{21}</td><td>a'_{22}</td><td>…</td><td>a'_{2n}</td><td>b'_2</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>0</td><td>a'_{m1}</td><td>a'_{m2}</td><td>…</td><td>a'_{mn}</td><td>b'_m</td></tr>
</table>

***Послідовність дій при виконанні жорданових перетворень*:**

1. Обираємо в таблиці провідний елемент, що відрізняється від 0, і замінюємо його одиницею.

Рядок, який містить провідний елемент, називається *провідним рядком*.

Провідним стовпцем називається стовпець, що містить провідний елемент.

2. Решта елементів провідного рядка переписуємо без змін.
3. Елементи провідного стовпця переписуємо з протилежним знаком.
4. Інші елементи таблиці знаходимо за правилом прямокутника (рис. 1.1).
5. Усі елементи отриманої таблиці ділимо на величину провідного елемента.

Для отримання базисної форми (1.2) потрібно $r\left(r \le m\right)$ кроків жорданових перетворень.

Приклад 1. Розглянемо систему лінійних рівнянь, що виражають невідомі y_1, y_2, y_3 через змінні x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3, \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 + x_2 - x_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

Необхідно виразити невідомі x_1, x_2, x_3 через змінні y_1, y_2, y_3.

Розв'язання. Виразимо x_2 з першого рівняння (1.4) і підставимо у два останні:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\left(y_1 - x_1 + 3x_3\right), \\ y_2 = 2x_1 - \frac{1}{2}\left(y_1 - x_1 + 3x_3\right) + x_3 = \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_1, \\ y_3 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}y_1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Виразимо тепер x_3 з другого рівняння (1.5) і підставимо у два рівняння, що залишилися:

$$\begin{cases} x_3 = 2\left(-\frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{2}x_1 - y_2\right) = 5x_1 - y_1 - 2y_2, \\ x_2 = 7x_1 - 3y_2 - y_1, \\ y_3 = 4x_1 - y_2. \end{cases}$$

Виражаючи невідому x_1, що залишилася, з останнього рівняння, отримаємо необхідну систему

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{4}y_3, \\ x_2 = -y_1 - \frac{5}{4}y_2 + \frac{7}{4}y_3, \\ x_3 = -y_1 - \frac{3}{4}y_2 + \frac{5}{4}y_3. \end{cases}$$

Для наочності виповнимо ті самі обчислення за допомогою таблиць. Для цього перепишемо систему (1.4) у такому вигляді:

$$\begin{cases} y_1 = -(-x_1) - 2(-x_2) + 3(-x_3), \\ y_2 = -2(-x_1) + (-x_2) - (-x_3), \\ y_3 = -2(-x_1) - (-x_2) + (-x_3). \end{cases}$$

Початкова система в таблиці матиме вигляд (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Початкова таблиця

Приклад 1		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
Базисна змінна	y_1	-1	-2	3
	y_2	-2	1	-1
	y_3	-2	-1	1

Першою ми виражали змінну x_2 з першого рівняння, тому вибираємо елемент $a_{12} = 2$ (табл. 1.3) у якості провідного. Перераховуємо таблицю:

1. Міняємо місцями заголовки провідних рядка і стовпця. Заголовки інших рядків і стовпців переписуємо без змін. Замінюємо провідний елемент одиницею (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Етап 1

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_1$		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$
Базисна змінна	x_2		1	
	y_2			
	y_3			

2. Елементи провідного рядка переписуємо без змін (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

Етап 2

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_1$		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$
Базисна змінна	x_2	-1	1	3
	y_2			
	y_3			

3. Елементи провідного стовпця переписуємо з протилежним знаком (табл. 1.6).

Таблиця 1.6.

Етап 3

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_1$		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$
Базисна змінна	x_2	-1	1	3
	y_2		-1	
	y_3		1	

4. Інші елементи таблиці знаходимо за правилом прямокутника:

$$a_{21} = -2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 = 5,\ a_{23} = -1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -1,$$
$$a_{31} = -2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-1) = 3,\ a_{33} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = 1$$

і заносимо в табл. 1.7.

Таблиця 1.7

Етап 4

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_1$		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$
Базисна змінна	x_2	-1	1	3
	y_2	5	-1	-1
	y_3	3	1	1

5. Усі елементи отриманої таблиці ділимо на величину провідного елемента (табл. 1.8).

Таблиця 1.8

Етап 5

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_1$		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$
Базисна змінна	x_2	-1/(-2)	1/(-2)	3/(-2)
	y_2	5/(-2)	-1/(-2)	-1/(-2)
	y_3	3/(-2)	1/(-2)	1/(-2)

Таким чином, після першого кроку отримаємо табл. 1.9.

Таблиця 1.9

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_1$

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_1$		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$
Базисна змінна	x_2	1/2	-1/2	-3/2
	y_2	-5/2	1/2	1/2
	y_3	-3/2	-1/2	-1/2

Для контролю правильності розрахунків випишемо отриману систему рівнянь і порівняємо її з системою (1.5):

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(-x_1) - \frac{1}{2}(-y_1) - \frac{3}{2}(-x_3) = \frac{1}{2}(y_1 - x_1 + 3x_3), \\ y_2 = -\frac{5}{2}(-x_1) + \frac{1}{2}(-x_3) + \frac{1}{2}(-y_1) = \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_1, \\ y_3 = -\frac{3}{2}(-x_1) - \frac{1}{2}(-x_3) - \frac{1}{2}(-y_1) = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}y_1. \end{cases}$$

Бачимо, що отримана система повністю ідентична (1.5). Нам необхідно ще двічі виконати жорданові перетворення. Обираючи в табл. 1.9 у якості провідного елемент $a_{23} = 1/2$, отримаємо табл. 1.10.

Таблиця 1.10

Після обміну $x_3 \leftrightarrow y_2$

Після обміну $x_3 \leftrightarrow y_2$		Вільна змінна		
		$-x_1$	$-y_1$	$-y_2$
Базисна змінна	x_2	-7	1	3
	x_3	-5	1	2
	y_3	-4	0	1

На останньому кроці введемо в базис змінну x_1, для чого виберемо провідний елемент $a_{31} = -4$ (табл. 1.10), тоді отримаємо табл. 1.11.

Таблиця 1.11

Після обміну $x_1 \leftrightarrow y_3$

Після обміну $x_1 \leftrightarrow y_3$		Вільна змінна		
		$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$
Базисна змінна	x_2	-7/4	1	5/4
	x_3	-5/4	1	3/4
	x_1	-1/4	0	-1/4

Отже, остаточно маємо

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{7}{4}(-y_3) + 1(-y_1) + \frac{5}{4}(-y_2), \\ x_3 = -\frac{5}{4}(-y_3) + 1(-y_1) + \frac{3}{4}(-y_2), \\ x_1 = -\frac{1}{4}(-y_3) - \frac{1}{4}(-y_2). \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{4}y_3, \\ x_2 = -y_1 - \frac{5}{4}y_2 + \frac{7}{4}y_3, \\ x_3 = -y_1 - \frac{3}{4}y_2 + \frac{5}{4}y_3. \end{cases}$

1.2. Застосування жорданових виключень до розв'язання задач лінійної алгебри

1.2.1. Обернена матриця

Метод жорданових виключень дозволяє значно скоротити час, потрібний для знаходження оберненої матриці, за рахунок того, що не потребує обчислення визначника початкової матриці.

Розглянемо квадратну матрицю, визначник якої не дорівнює нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Тоді існує обернена матриця A^{-1}.

Нагадаємо, що матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де E - одинична матриця.

Складаємо початкову таблицю з *коефіцієнтів матриці* (табл. 1.12).

Таблиця 1.12

Початкова таблиця

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…			…	
y_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}

Для знаходження оберненої матриці необхідно зробити n кроків жорданових виключень для отримання таблиці вигляду (табл. 1.13).

Таблиця 1.13

Обернена матриця

	$-y_1$	$-y_2$	…	$-y_n$
x_1	a'_{11}	a'_{12}	…	a'_{1n}
x_2	a'_{21}	a'_{22}	…	a'_{2n}
…			…	
x_n	a'_{n1}	a'_{n2}	…	a'_{nn}

Зауваження. Якщо провідні елементи не були діагональними, то для знаходження оберненої матриці в отриманій на останньому кроці таблиці необхідно переставити відповідні рядки і стовпчики, впорядковуючи змінні.

Приклад 2. Для невиродженої матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю.

Розв'язання. Запишемо відповідну таблицю, переписавши *без змін коефіцієнти матриці* A (табл. 1.14).

Таблиця 1.14

Початкова таблиця

Приклад 2	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
y_1	2	1	0
y_2	4	5	-2
y_3	6	-7	0

Вибираючи перший рядок і стовпець провідними, після одного кроку отримаємо табл. 1.15.

Таблиця 1.15

Ітерація 1

Після обміну $x_1 \leftrightarrow y_1$	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_1	1/2	1/2	0
y_2	-2	3	-2
y_3	-3	-10	0

Тепер провідним виберемо елемент $a_{22} = 3$ (табл. 1.16).

Таблиця 1.16

Ітерація 2

Після обміну $x_2 \leftrightarrow y_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$
x_1	5/6	-1/6	1/3
x_2	-2/3	1/3	-2/3
y_3	-29/3	10/3	-20/3

На останньому кроці, помінявши ролями змінні x_3 і y_3, знайдемо останню таблицю (табл. 1.17).

Таблиця 1.17

Ітерація 3

Після обміну $x_3 \leftrightarrow y_3$	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$
x_1	7/20	0	1/20
x_2	3/10	0	-1/10
x_3	29/20	-1/2	-3/20

Таким чином, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & 0 & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{29}{20} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{20} \end{pmatrix}$.

Перевірка правильності обчислень:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & 0 & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{29}{20} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & 0 & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ \frac{29}{20} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{20} \end{pmatrix}$.

1.2.2. Системи лінійних рівнянь

У курсі лінійної алгебри для розв'язання систем лінійних рівнянь застосовують метод Гаусса, метод Крамера і матричний метод. Далі буде розглянуто ще один метод - метод жорданових виключень, який надає можливість дослідити систему на сумісність і в разі сумісності одержати її розв'язок.

Якщо після деякого кроку жорданових перетворень буде отримано рівняння, у якому ліва частина дорівнює нулю, а права - відмінна від нуля, то початкова система *несумісна*.

Якщо ж ліва і права частини дорівнюють нулю, то таке рівняння є лінійною комбінацією інших рівнянь системи і його можна виключити з подальшого розгляду.

Зауваження. В процесі розв'язання задачі можна значно скоротити час розрахунків, викреслюючи з нової таблиці провідний стовпець попередньої.

Пояснимо це на наступному прикладі.

Приклад 3. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо табл. 1.18, переписавши без змін коефіцієнти системи (див. зауваження в п. 1.1).

Таблиця 1.18

Початкова таблиця

Приклад 3	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	*1*
0	5	-3	1	8
0	2	-4	3	6
0	1	3	7	-2

Обираючи провідними перший рядок і третій стовпець (табл. 1.18), отримаємо табл. 1.19.

Таблиця 1.19

Ітерація 1

Після обміну $x_3 \leftrightarrow 0$	$-x_1$	$-x_2$	0	1
x_3	5	-3	1	8
0	-13	5	-3	-18
0	-34	24	-7	-58

Стовпець під нулем для подальших розрахунків вже непотрібний, тому маємо право його викреслити (табл. 1.20).

Таблиця 1.20

Ітерація 1

Після обміну $x_3 \leftrightarrow 0$	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3	5	-3	8
0	-13	5	-18
0	-34	24	-58

На наступному кроці обираємо, наприклад, провідними другий стовпець і рядок. Після викреслення другого стовпця таблиця матиме вигляд (табл. 1.21).

Таблиця 1.21

Ітерація 2

Після обміну $x_2 \leftrightarrow 0$	$-x_1$	1
x_3	-14/5	-14/5
x_2	-13/5	-18/5
0	142/5	142/5

Після третього кроку з провідним елементом $142/5$ отримаємо розв’язок системи (табл. 1.22).

Таблиця 1.22

Ітерація 3

Після обміну $x_1 \leftrightarrow 0$	*1*
x_3	0
x_2	-1
x_1	1

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$.

Приклад 4. Дослідити систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

на сумісність і у випадку сумісності знайти її розв'язок.

Розв'язання. Запишемо цю систему у вигляді табл. 1.23 та застосуємо до неї метод жорданових виключень (табл. 1.24-1.26). Провідний елемент виділений сірим кольором.

Таблиця 1.23

Початкова таблиця

Приклад 4	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	*1*
0	2	0	-6	5	1
0	1	2	3	0	-1
0	-3	-2	0	4	3
0	3	2	-3	5	0

Таблиця 1.24

Ітерація 1

Після обміну $x_1 \leftrightarrow 0$	$-x_2$	*0*	$-x_3$	$-x_4$	*1*
x_1	1/2	0	-3	5/2	1/2
0	-1/2	2	6	-5/2	-3/2
0	3/2	-2	-9	23/2	9/2
0	-3/2	2	6	-5/2	-3/2

Таблиця 1.25

Ітерація 2

Після обміну $x_2 \leftrightarrow 0$	0	0	$-x_3$	$-x_4$	1
x_1	1/2	0	-3	5/2	1/2
x_2	-1/4	1/2	3	-5/4	-3/4
0	1	1	-3	9	3
0	-1	-1	0	0	0

Таблиця 1.26

Ітерація 3

Після обміну $x_3 \leftrightarrow 0$	0	0	0	$-x_4$	1
x_1	-1/2	-1	1	-13/2	-5/2
x_2	-3/4	-1/2	-1	31/4	9/4
x_3	-1/3	-1/3	-1/3	-3	-1
0	-1	-1	0	0	0

Після попередніх перетворень провідними можуть бути тільки четвертий стовпчик і останній рядок, але на їх перетині стоїть нуль, тобто подальші перетворення неможливі. Випишемо отриману систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot(-1) + 0\cdot 1 - x_4\cdot\left(-\frac{13}{2}\right) - \frac{5}{2}, \\ x_2 = 0\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot(-1) - x_4\cdot\frac{31}{4} + \frac{9}{4}, \\ x_3 = 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - x_4\cdot(-3) - 1, \\ 0 = 0\cdot(-1) + 0\cdot(-1) + 0\cdot 0 - x_4\cdot 0 + 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13}{2}x_4 - \frac{5}{2}, \\ x_2 = -\frac{31}{4}x_4 + \frac{9}{4}, \\ x_3 = 3x_4 - 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

З останнього рядка системи випливає, що вона сумісна і має безліч розв'язків. Позначивши змінну $x_4 = t$, отримаємо множину розв'язків.

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{2}t - \dfrac{5}{2}, \\ x_2 = -\dfrac{31}{4}t + \dfrac{9}{4}, \\ x_3 = 3t - 1, \\ x_4 = t,\ t \in R. \end{cases}$

Приклад 5. Дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності знайти її розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ -3x_1 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо останню таблицю (табл. 1.27), опускаючи попередні обчислення, де провідними були елементи a_{11} і a_{22}.

Таблиця 1.27

Ітерація 2

Приклад 5	*0*	*0*	$-x_3$	*1*
x_1	0	-1/3	-2/3	-1/3
x_2	-1/2	-1/6	-17/6	-13/6
0	-1	-1	0	-1

Відповідна система має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) - x_3 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) - \dfrac{1}{3}, \\ x_2 = 0 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\right) - x_3 \cdot \left(-\dfrac{17}{6}\right) - \dfrac{13}{6}, \\ 0 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) - x_3 \cdot 0 - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}x_3 - \dfrac{1}{3}, \\ x_2 = \dfrac{17}{6}x_3 - \dfrac{13}{6}, \\ 0 = -1. \end{cases}$$

Останнє рівняння отриманої системи є суперечливим, що надає можливість зробити висновок про несумісність системи рівнянь.

Відповідь: система не має розв'язків.

Питання до розділу

1. Що називають жордановим перетворенням?
2. Сформулювати “правило прямокутника”.
3. Що називають провідним рядком, стовпцем?
4. Сформулювати алгоритм кроку жорданових виключень.

Завдання

1. Методом жорданових перетворень знайти обернену матрицю для даних матриць:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 7 & -1\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Відповідь:

1) $\begin{pmatrix}\frac{17}{39} & \frac{1}{13} & -\frac{1}{39}\\ -\frac{5}{39} & \frac{2}{13} & -\frac{2}{39}\\ -\frac{1}{39} & \frac{3}{13} & -\frac{16}{39}\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{1}{40} & \frac{7}{20}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{10}\\ \frac{1}{10} & \frac{9}{40} & \frac{3}{20}\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-\frac{8}{33} & -\frac{1}{33} & -\frac{1}{33}\\ \frac{1}{22} & -\frac{2}{11} & \frac{7}{22}\\ -\frac{1}{33} & \frac{4}{33} & \frac{4}{33}\end{pmatrix}$.

2. Методом жорданових перетворень дослідити систему на сумісність і в разі сумісності, знайти її розв’язок:

1) $\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3=-1,\\ x_1-2x_2+x_3=2,\\ 2x_1-3x_2+5x_3=-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x_1-2x_2+x_3=6,\\ 3x_2-5x_3=7,\\ 2x_1+x_2-3x_3=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=3,\\ 2x_1-4x_2+x_3=3,\\ x_1-5x_2+2x_3=6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}4x_1-3x_2+4x_3=2,\\ x_1-2x_2+3x_3=2,\\ 3x_1-x_2+x_3=-2;\end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 5x_3 = 15, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

Відповідь: 1) $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$;

4) система несумісна;

5) $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t + \frac{15}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix}, t \in R$; 6) $X = \begin{pmatrix} 0{,}3t + 0{,}1 \\ -1{,}4t + 1{,}2 \\ -0{,}45t + 2{,}85 \\ t \end{pmatrix}, t \in R$.

Розділ 2

ОСНОВНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ І ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ

2.1. Постановка задачі лінійного програмування

Лінійне програмування – це розділ математичного програмування, присвячений методам знаходження мінімуму або максимуму лінійної функції декількох змінних, що задовольняють додаткові умови (обмеження), які мають вигляд лінійних рівнянь або нерівностей.

Загальною постановкою задачі лінійного програмування називається задача, система обмежень якої містить як рівності, так і нерівності, і на деякі змінні може як накладатися умова невід'ємності, так і ні:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_0 \to extr, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, k_1}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \ i = \overline{k_1 + 1, k_2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{k_2 + 1, n}; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, \ldots, n_1;$$

$x_{n_1+1}, \ldots x_n$ - довільні,

де a_{ij}, b_i, c_j - дійсні числа.

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для якої визначається екстремум, називається *цільовою функцією*, а її аргументи $x_1, \ldots, x_n$ - *змінними* задачі.

Допустимим планом $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *задачі лінійного програмування (ЗЛП)* – називається сукупність значень змінних, які задовольняють систему обмежень (2.2).

Оптимальним планом $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ називається допустимий план, на якому досягається максимум або мінімум функції f.

Оптимальним значенням $f^* = f\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ *цільової функції* називається значення функції f, яке відповідає оптимальному плану.

Задачею лінійного програмування є вибір з множини допустимих планів найбільш вигідного (оптимального).

Приклад 1. З залізничної станції щодня вирушають пасажирські і швидкісні потяги. Кількість вагонів у швидкісному потязі: 7 плацкартних, 9 купейних; у пасажирському – 11 плацкартних і 6 купейних. Парк вагонів складається з 65 плацкартних і 51 купейного вагонів. Скласти математичну модель знаходження плану формування потягів, який передбачає перевезення найбільшої кількості пасажирів? Кількість місць у плацкартному вагоні дорівнює 54, у купейному – 40.

Розв'язання. *1. Змінні задачі.*

Позначимо через x_1 кількість швидкісних потягів, а через x_2 - кількість пасажирських потягів.

2. Обмеження, яким повинні задовольняти змінні задачі.

$7x_1 + 11x_2$ - кількість потрібних для формування потягів плацкартних вагонів. Враховуючи наявну кількість таких вагонів, отримуємо таке обмеження задачі:

$$7x_1 + 11x_2 \le 65.$$

Аналогічно для купейних вагонів:

$$9x_1 + 6x_2 \le 51.$$

Кількість потягів не може бути від'ємною, тому $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Таким чином, система обмежень задачі має вигляд

$$\begin{cases} 7x_1 + 11x_2 \le 65, \\ 9x_1 + 6x_2 \le 51, \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_j - \textit{цілочислові},\ j = 1{,}2. \end{cases}$$

3. Цільова функція. Позначимо через $f(x_1, x_2)$ загальну кількість пасажирів.

Один швидкісний потяг перевозить 54 людини в кожному плацкартному вагоні і 40 пасажирів у купейному. Отже, кількість пасажирів швидкісного потягу становить: $54 \cdot 7 + 40 \cdot 9 = 738$. Пасажирський потяг може перевезти $54 \cdot 11 + 40 \cdot 6 = 834$ людини. Тому сумарна кількість пасажирів: $f(x_1, x_2) = 738x_1 + 834x_2$.

Відповідь: математична модель поставленої задачі:

$$f(x_1, x_2) = 738x_1 + 834x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 11x_2 \le 65, \\ 9x_1 + 6x_2 \le 51, \\ x_1, x_2 \ge 0, x_j - \textit{цілочислові}, j = 1,2. \end{cases}$$

Приклад 2. Вагоноремонтне депо має в своєму розпорядженні певну кількість ресурсів: робочу силу, матеріали, запасні частини, обладнання, виробничі площі тощо. Депо може ремонтувати вагони чотирьох типів. Інформація про кількість одиниць кожного з ресурсу, необхідного для ремонту одного вагону кожного типу, їхній обсяг і прибуток, що може бути отриманий, наведена в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Дані прикладу 2

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один вагон				Наявність ресурсів
	піввагон	критий	платформа	хопер-дозатор	
Робоча сила, люд. год	170	200	155	330	120000
Матеріали, тис. грн	7	6,5	6,25	13,5	4500
Фонд часу, год	16	18	17	28	10200
Спеціальні запчастини, тис. грн	0	0	0	3,5	637
Прибуток на 1 вагон, тис. грн	1,7	1,85	1,4	3,7	

Скласти математичну модель знаходження плану ремонту вагонів, при якому буде максимальним загальний прибуток підприємства.

Розв'язання. *1. Змінні задачі.*

Позначимо через x_1 - кількість піввагонів;

x_2 - кількість критих вагонів;

x_3 - кількість платформ;

x_4 - кількість хопер-дозаторів;

$$x_j - цілочислові, j = \overline{1,4}.$$

2. Обмеження, яким повинні задовольняти змінні задачі.

$$\begin{cases} 170x_1 + 200x_2 + 155x_3 + 330x_4 \le 120000, \\ 7x_1 + 6{,}5x_2 + 6{,}25x_3 + 13{,}5x_4 \le 4500, \\ 16x_1 + 18x_2 + 17x_3 + 28x_4 \le 10200, \\ 3{,}5x_4 \le 637, \\ x_j \ge 0,\ x_j - цілочислові, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3. Цільова функція: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1{,}7x_1 + 1{,}85x_2 + 1{,}4x_3 + 3{,}7x_4$.

Відповідь: математична модель поставленої задачі:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1{,}7x_1 + 1{,}85x_2 + 1{,}4x_3 + 3{,}7x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 170x_1 + 200x_2 + 155x_3 + 330x_4 \le 120000, \\ 7x_1 + 6{,}5x_2 + 6{,}25x_3 + 13{,}5x_4 \le 4500, \\ 16x_1 + 18x_2 + 17x_3 + 28x_4 \le 10200, \\ 3{,}5x_4 \le 637, \\ x_j \ge 0, x_j - цілочислові, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Та сама ЗЛП може бути сформульована в різних еквівалентних формах. Найбільш важливими формами є *канонічна* і *стандартна*.

Стандартною (симетричною) постановкою задачі лінійного програмування називається задача, що містить однотипні обмеження-нерівності і невід'ємні змінні:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \to \max, \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Для задачі мінімізації стандартна форма має вигляд

$$f(x_1, x_2 .... x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 \to \min , \qquad (2.5)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m, \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Канонічною постановкою задачі лінійного програмування називається задача, що містить однотипні обмеження - рівності і невід'ємні змінні:

$$f(x_1, x_2 .... x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 \to \max(\min) , \qquad (2.7)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0. \end{cases} \qquad (2.8)$$

2.1.1. Еквівалентні перетворення задач лінійного програмування

За допомогою перетворень можна звести одну форму ЗЛП до іншої.

Правила переходу до канонічної і стандартної форми ЗЛП:

1. *Зв'язок між задачами мінімізації і максимізації.*

Враховуючи, що

$$\max f(x) = -\min f(x),\ \min f(x) = -\max f(x),$$

задача знаходження $\max f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0$ перетворюється на пошук $\min(-f(x)) = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n - c_0$ і навпаки.

2. *Знак нерівності.*

Якщо потрібно змінити знак нерівності на протилежний, необхідно помножити всю нерівність на «-1», тобто

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \ge -b_i,$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i, \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \le -b_i,$$
$$i = 1,\ldots,m.$$

3. *Перетворення нерівності в рівність.*

Це досягають введенням до кожної нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i,\ i = 1,\ldots,m$$

додаткової (балансуючої) невід'ємної змінної $x_{n+i} = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n)$, $i = 1,\ldots,m$. У результаті цього отримують таке рівняння:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,\ldots,m.$$

Якщо нерівності мають вигляд

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i,\ i = 1,\ldots,m,$$

то потрібно в лівих частинах нерівностей відняти невід'ємні *балансуючі* змінні $x_{n+i} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - b_i$, $i = 1,\ldots,m$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i,\ i = 1,\ldots,m.$$

4. *Перетворення рівності в систему нерівностей.*

Для цього потрібно замінити кожне рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1,\ldots,m$$

двома взаємнопротилежними нерівностями:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\ -\left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n\right) \le -b_i,\ i = 1,\ldots,m; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i, \\ -\left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n\right) \ge -b_i,\ i = 1,\ldots,m. \end{cases}$$

Зауваження. Стандартну форму можна отримати з канонічної, зменшивши кількість змінних.

5. *Умова невід'ємності змінних.*

Якщо змінна x_l може набувати будь-яких значень (не накладається умова невід'ємності), то необхідно її замінити різницею двох невід'ємних змінних:

$$x_l = x_l' - x_l'',$$

де $x_l' \ge 0, x_l'' \ge 0$.

У разі, коли деяка змінна x_l повинна набувати від'ємного значення ($x_l \le 0$), вводиться нова змінна $x_l' = -x_l$, $x_l' \ge 0$.

Всі додаткові змінні входять у цільову функцію *з нульовими коефіцієнтами.*

Приклад 3. Звести до канонічної форми задачу

$$f\left(x_1, x_2\right) = 12x_1 - 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ -4x_1 + 3x_2 \ge -4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо додаткові змінні $x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$ в обмеження – нерівності. Тоді канонічна форма (2.4) для даної задачі буде мати вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1 - 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 15, \\ -4x_1 + 3x_2 - x_4 = -4, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,...,4. \end{cases}$$

або

$$-f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -12x_1 + 4x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 15, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,...,4. \end{cases}$$

Приклад 4. Звести до канонічної форми задачу

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 10, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. *Етап 1*. Згідно з умовою задачі змінна x_4 може набувати будь-яких значень. Тому замінюємо її різницею двох невід'ємних змінних $x_4 = x_4' - x_4''$. Тоді

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'') = 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4' + 3x_4'' \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4' + 2x_4'' = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4' + x_4'' \geq 10, \\ x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'' \geq 0. \end{cases}$$

Етап 2. Для переходу від нерівностей до рівнянь вводимо змінні $x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$. Остаточно отримуємо

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4',x_4'',x_5,x_6)=2x_1+5x_2-x_3+3x_4'+3x_4''+0\cdot x_5+0\cdot x_6\to\max,$$
$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_4'+2x_4''=5,\\4x_1+2x_2+x_3+x_5=6,\\5x_1-x_2+2x_3+x_4'+x_4''-x_6=10,\\x_1,x_2,x_3,x_4',x_4'',x_5,x_6\ge 0.\end{cases}$$

Приклад 5. Звести до стандартної форми задачу

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_2+3x_3\to\min,$$
$$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=5,\\6x_1+2x_3+x_4=2,\\3x_1+x_2-2x_3+4x_4\le 1,\\x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0.\end{cases}$$

Розв’язання. Згідно з правилами переходу до стандартної форми (стор. 36-37), отримаємо

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-x_2+3x_3\to\min,$$
$$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3\ge 5,\\-4x_1-2x_2+x_3\ge -5,\\6x_1+2x_3+x_4\ge 2,\\-6x_1-2x_3-x_4\ge -2,\\-3x_1-x_2+2x_3-4x_4\ge -1,\\x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0.\end{cases}$$

Можна також отримати стандартну форму для даної задачі, зменшивши кількість змінних. Для цього виразимо з рівнянь змінні x_3,x_4:

$$\begin{cases}x_3=-5+4x_1+2x_2,\\x_4=2-6x_1-2(-5+4x_1+2x_2)=12-14x_1-4x_2.\end{cases}\qquad(2.9)$$

Враховуючи, що $x_3\ge 0, x_4\ge 0$, отримаємо

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ -14x_1 - 4x_2 \geq -12. \end{cases}$$

Для цільової функції і нерівності

$$f = -x_2 + 3x_3 = -x_2 + 3(-5 + 4x_1 + 2x_2) = -15 + 12x_1 + 5x_2 .$$
$$3x_1 + x_2 - 2(-5 + 4x_1 + 2x_2) + 4(12 - 14x_1 - 4x_2) \leq 1 \Rightarrow -61x_1 - 19x_2 \leq -57 .$$

Таким чином, стандартна форма для поставленої задачі матимемо вигляд

$$f_1(x_1, x_2) = -15 + 12x_1 + 5x_2 \to \min ,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ -14x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ 61x_1 + 19x_2 \geq 57, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Розв'язуючи задачу (2.10), отримуємо оптимальне значення $f_1{}^* = f_1\left(x_1^*, x_2^*\right)$ цільової функції. Але поставлена задача мала чотири змінні, тому для знаходження оптимального плану необхідно знайти змінні x_3^*, x_4^* враховуючи вирази (2.9).

2.2. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Множина Ω називається *опуклою*, якщо разом з будь-якими двома точками $A, B \in \Omega$ містить і відрізок, який їх з'єднує.

Наприклад, опуклими множинами є відрізок, пряма, напівплощина, напівпростір і т. д. На рис. 2.1 зображені приклади опуклих (а, б, в) та не опуклих (г, д) множин.

Теорема 1. Перетин будь-якого числа опуклих множин є опуклою множиною.

Опуклою лінійною комбінацією довільних точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається сума

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

де $\alpha_i, i = 1,...,n$ - довільні невід’ємні числа, сума яких дорівнює одиниці.

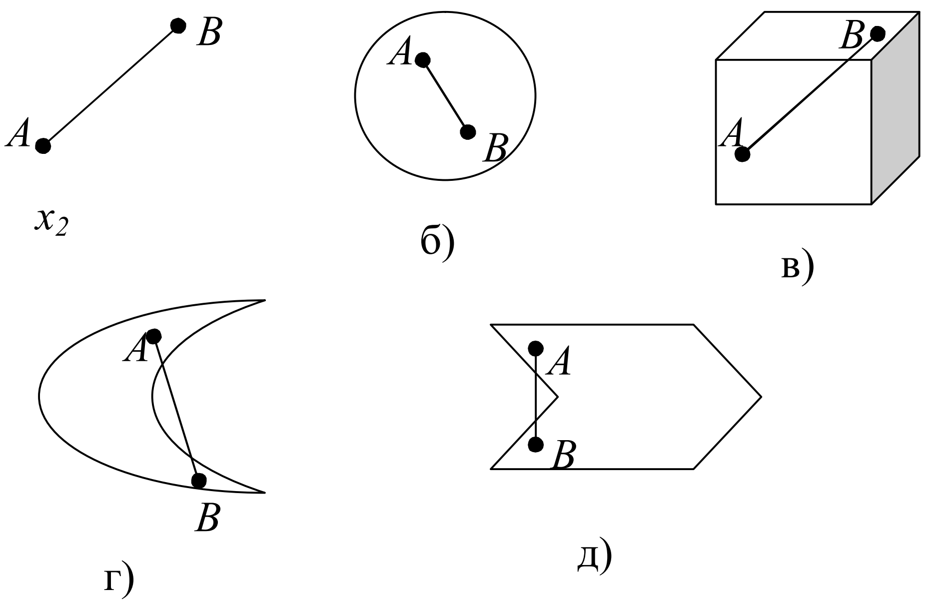


Рис. 2.1. Опуклі та неопуклі множини

Точка множини називається *граничною*, якщо будь-який її окіл скільки завгодно малого розміру містить точки, що як належать множині, так і не належать їй.

Граничні точки множини утворюють її *границю*.

Множина називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Множина називається *обмеженою*, якщо існує куля з радіусом кінцевої довжини і центром у будь-якій точці множини, що містить повністю в собі цю множину.

Точка опуклої множини називається *кутовою*, якщо вона не може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації будь-яких різних точок цієї множини. Наприклад, вершини прямокутника є його кутовими точками.

Опуклим багатокутником називається опукла замкнена обмежена множина на площині, що має кінцеве число кутових точок.

Опуклим багатогранником називається замкнена опукла обмежена множина у просторі, що має кінцеве число кутових точок.

Множина розв'язків нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, $i = 1,...,n$ є однією з двох напівплощин, на які поділяє площину відповідна пряма $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Множиною розв'язків сумісної системи нерівностей на площині

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

є опуклий багатокутник.

Приклад 6. Побудувати множину розв'язків нерівності $3x_1 + 5x_2 \le 15$.

Розв'язання. Розглянемо відповідну рівність $3x_1 + 5x_2 = 15$. Це рівняння прямої на площині.

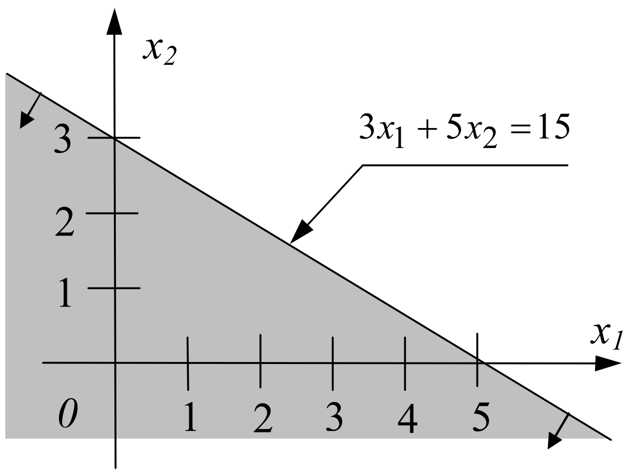


Рис. 2.2. Графічний розв'язок прикладу 6

Зобразимо цю пряму, знайшовши точки перетину з осями координат: $A(5,0)$ і $B(0,3)$. Для знаходження необхідної напівплощини візьмемо будь-яку точку, що *не належить даній прямій*, наприклад $O(0,0)$ (початок координат), і підставимо її координати в нерівність $3x_1 + 5x_2 \le 15$, тобто $3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \le 15$. Бачимо, що координати контрольної точки (початку координат) задовольняють нерівність. Тому задовольняють нерівність і всі точки тієї напівплощини, до якої належить початок координат (рис. 2.2).

Приклад 7. Побудувати множину розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Послідовно побудуємо графічні розв'язки кожної нерівності, аналогічно до прикладу 6. Перетин отриманих напівплощин і є множиною розв'язків заданої системи (рис. 2.3). Це багатокутник $ABCD$.

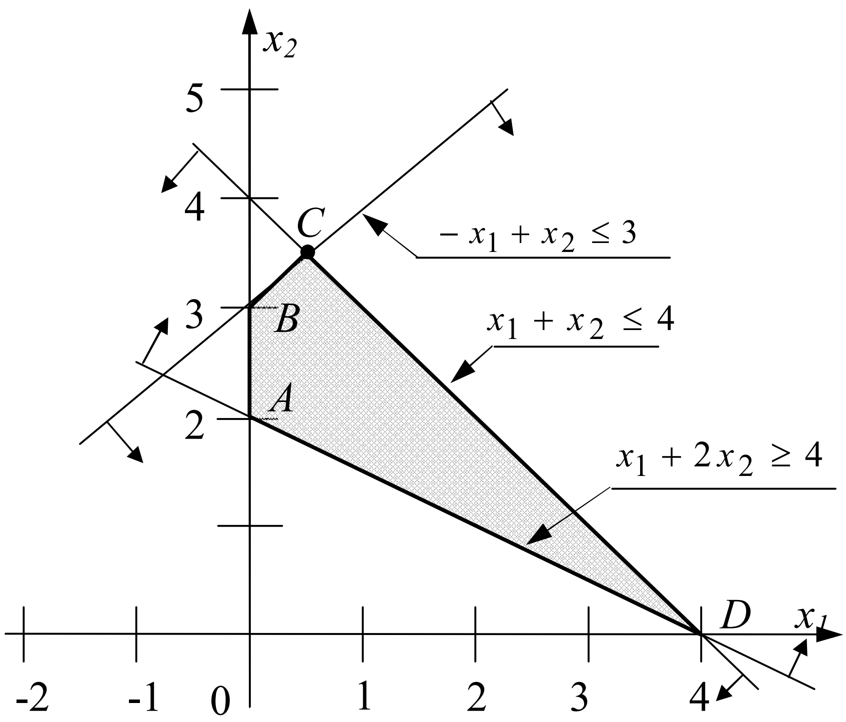


Рис. 2.3. Графічний розв'язок прикладу 7

Не завжди область допустимих розв'язків (ОДР) є замкненою. На рис. 2.4 надані приклади можливих варіантів допустимих областей.

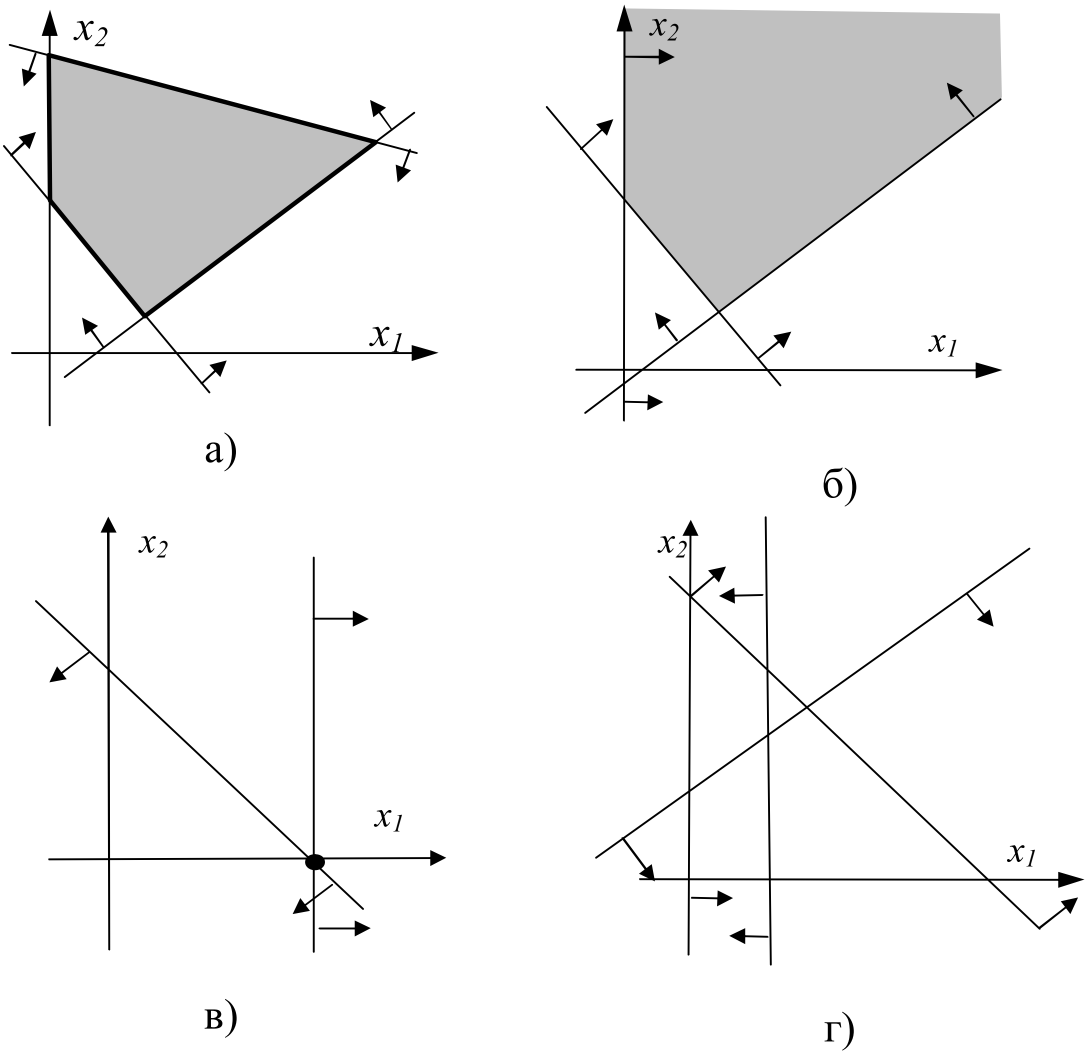


Рис. 2.4. Варіанти областей:
а – замкнена множина; б – необмежена область;
в – точка; г – порожня множина (система обмежень несумісна)

2.3. Властивості розв’язків задачі лінійного програмування

Розглянемо ЗЛП у канонічній формі. Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

Тоді задачу (2.7)-(2.8) можна переписати в матричній формі

$$f(X) = CX + c_0 \to \max(\min); \tag{2.11}$$

$$AX = B; \tag{2.12}$$

$$X \geq 0. \tag{2.13}$$

Задача (2.11)-(2.13) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли сумісна система рівнянь (2.12) (теорема Кронекера-Капеллі). Це можливо, якщо ранг r цієї системи не більше числа невідомих n.

При $r = n$ квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

невироджена, тобто система (2.8) має єдиний розв'язок, який буде оптимальним при $X \geq 0$. У цьому випадку проблема вибору оптимального розв'язку втрачає сенс. Якщо ж серед компонент цього розв'язку є хоча б одна від'ємна, то ЗЛП (2.11)-(2.13) немає розв'язків.

Розглянемо випадок, коли $r < n$. У цьому випадку система векторів-стовпців матриці A

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ j = 1, \dots, n$$

містить *базис* — максимальну лінійно-незалежну систему векторів A_j, через яку будь-який вектор системи може бути виражений як її лінійна комбінація. Базисів, взагалі кажучи, може бути декілька, кожен з яких складається з r векторів.

Базисними змінними називається змінні ЗЛП, які відповідають векторам базису, решта $n - r$ змінних – *вільними.*

Якщо вільні змінні дорівнюють нулю, а базисні невід'ємні, то такий план називається *опорним*.

Невиродженим називається опорний план, якщо число його додатних координат дорівнює r. У випадку, коли число додатних координат менше, ніж r, отриманий план називається *виродженим.*

Теорема 2. Область допустимих розв'язків (ОДР) задачі лінійного програмування - опукла множина.

Тобто множина планів ЗЛП є опуклим багатогранником, який називається *багатогранником розв'язків*.

Теорема 3. Якщо система векторів A_j, $j = 1,\ldots,n$, містить r лінійно незалежних векторів $A_1, A_2, \ldots, A_r$, то допустимий план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ є вершиною багатогранника розв'язків.

Теорема 4. Якщо ЗЛП має розв'язок, то цільова функція досягає екстремального значення хоча б в одній з вершин багатогранника розв'язків.

Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш ніж в одній кутовій точці, то вона досягає того самого значення в будь-якій точці, яка є їх опуклою лінійною комбінацією.

2.4. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Будь-яку ЗЛП з двома змінними завжди можна розв'язати графічно. Проте для задач з трьома незалежними змінними таке розв'язання ускладнюється. У просторах, розмірність яких більше трьох, графічне розв'язання взагалі неможливе.

Графічний метод надає можливість прояснити властивості ЗЛП та робить наочними методи її розв'язання.

Розглянемо таку задачу:

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 \to \max \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \ldots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Будемо вважати, що система (2.15) сумісна.

Лініями рівня функції $y = f(x_1, x_2)$ називається сімейство прямих, заданих рівняннями $f(x_1, x_2) = C,\quad C = const$.

Отже, лініями рівня функції (2.14) є сімейство паралельних прямих на площині.

При застосуванні графічного методу розв'язання необхідно знати напрям перенесення ліній рівня (напрям збільшення або зменшення сталої). Цей напрям показує *вектор-градієнт* цільової функції:

$$\vec{N} = gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2).$$

Вектор-градієнт перпендикулярний до прямих $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0 = C$. Рух за напрямом вектора-градієнта відповідає збільшенню константи C, а – в протилежний бік - зменшенню.

На рис. 2.5. пунктирними лініями зображені лінії рівня. У точці A цільова функція набуває максимального значення, а в точці B – мінімального.

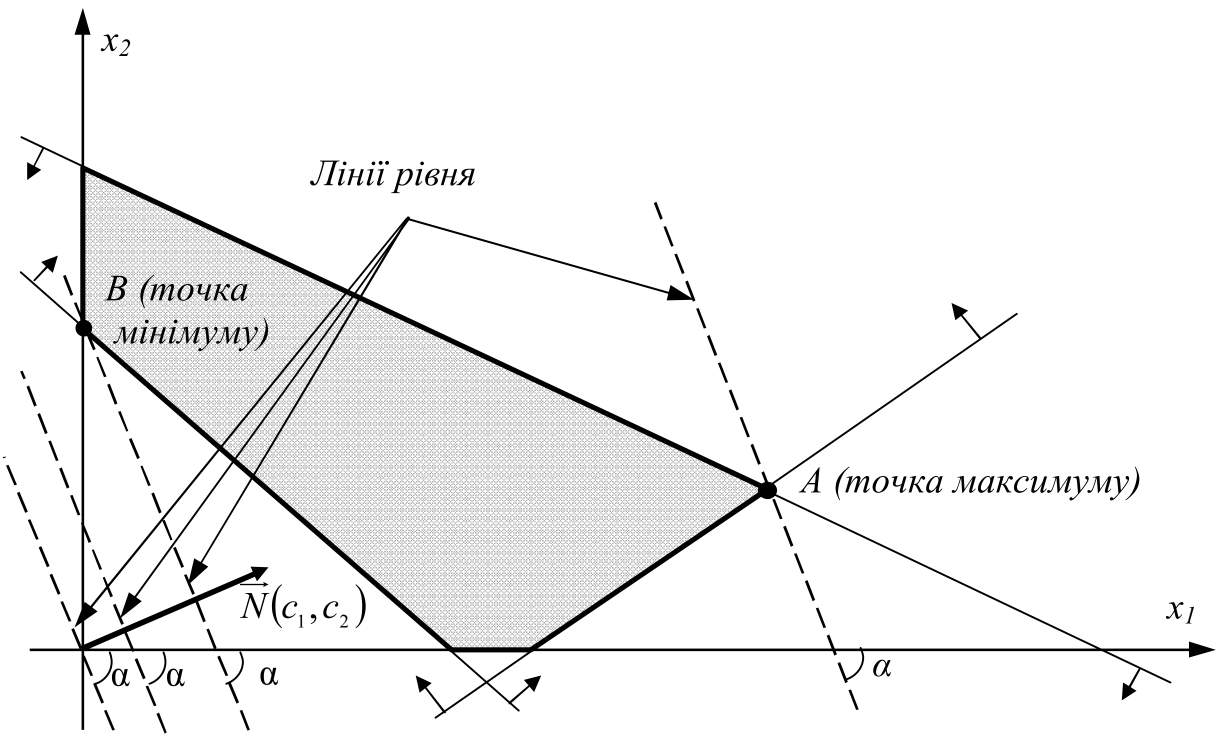


Рис. 2.5. Графічне розв'язання ЗЛП

Як видно з рис. 2.5 оптимальним розв'язком ЗЛП є кутова точка ОДР. Бувають випадки, коли задача має множину оптимальних планів. Це трапляється коли вектор-градієнт перпендикулярний стороні ОДР. Тоді свого оптимального значення цільова функція буде досягати в будь-якій точці цього відрізку.

Якщо задача має необмежену область допустимих розв'язків, то розв'язок задачі може необмежено покращуватися, незалежно від обмежень ЗЛП (цільова функція необмежена). Зазвичай це говорить про те, що задача або некоректно сформульована або неправильно складена математична модель.

У випадку, коли обмеження задачі суперечливі (ОДР не існує), то така ЗЛП розв'язків немає.

Порядок графічного розв'язання ЗЛП:

1. Будуємо ОДР системи обмежень (2.15).

2. Будуємо вектор-градієнт $\vec{N} = gradf = (c_1, c_2)$, який починається в точці $(0{,}0)$ і закінчується в точці (c_1, c_2).

3. Проводимо довільну лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = C$.

4. При розв'язанні задачі на максимум переміщуємо лінію рівня в напрямі вектора-градієнта так, щоб вона торкалася області допустимих розв'язків у її крайній точці. У разі задачі на мінімум лінію рівня переміщують у протилежному (антиградієнтному) напрямі. Якщо такої точки не існує, то цільова функція *необмежена* на множині планів зверху (при пошуку max) або знизу (при пошуку min).

5. Визначаємо оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$. Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь прямих, на перетині яких знаходиться точка X^*.

6. Знаходимо екстремальне значення цільової функції $f^* = f(X^*)$.

Приклад 8. Розв'язати графічним методом:

$$f(x_1, x_2) = -2x_1 + 5x_2 \to \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язання. 1. Будуємо область допустимих розв'язків системи обмежень (див. приклад 5). Зображуємо прямі:

I) $x_1 + x_2 = 4$,
II) $x_1 + 2x_2 = 4$,
III) $-x_1 + x_2 = 3$.

Це багатокутник $ABCD$.

2. Знаходимо вектор-градієнт $\vec{N} = grad\ f = (-2{,}5)$. Тоді лініями рівня є сімейство прямих

$$-2x_1 + 5x_2 = C.$$

Будуємо вектор $\vec{N} = (-2{,}5)$, який починається в точці $(0{,}0)$ і закінчується в точці $(-2{,}5)$. Проводимо пряму через початок координат перпендикулярно вектора $\vec{N}$ (пунктирна пряма на рис. 2.6).

3. Побудовану пряму пересуваємо паралельно самій собі в напрямку вектора-градієнта. З рис. 2.6 видно, що свого максимального значення цільова функція набуває в точці C.

4. Знайдемо координати цієї точки. Вона лежить на перетині прямих I і III, тобто необхідно розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ -x_1 + x_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow x_1{*} = \frac{1}{2},\ x_2{*} = \frac{7}{2}.$$

Оптимальний план задачі $X{*} = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

6. Екстремальне значення цільової функції: $f{*} = f(X{*}) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{33}{2}$.

Відповідь: $f^* = \max f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{33}{2}$.

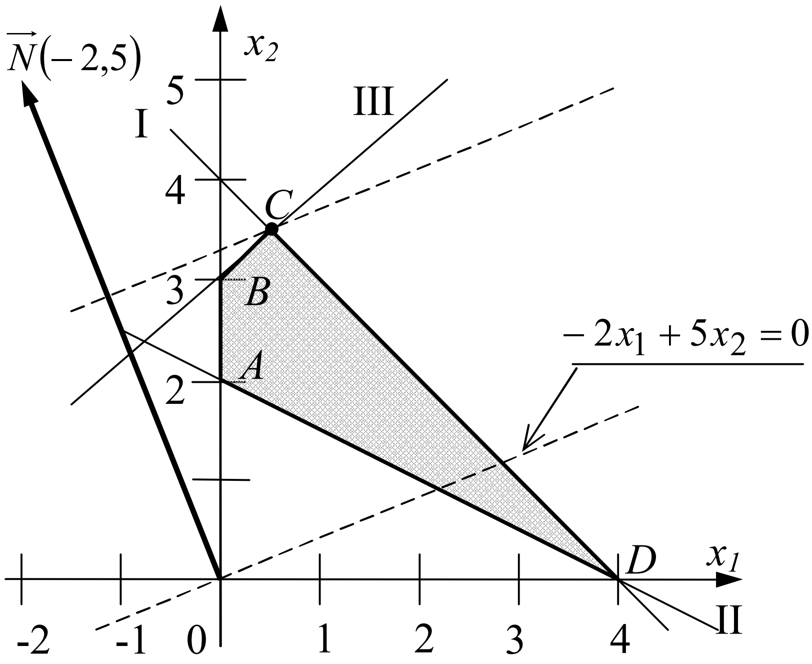


Рис. 2.6. Графічне розв’язання прикладу 8

Приклад 9. Розв’язати графічним методом:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to \min(\max);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, & I \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, & II \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, & III \\ x_1, x_2 \geq 0. & IV \end{cases}$$

Розв’язання. 1. Багатокутник розв'язків – це незамкнена область (рис. 2.7).

2. Будуємо вектор-градієнт із точки $O(0,0)$ у точку $(3,2)$ і проводимо лінію рівня через початок координат перпендикулярно вектора-градієнта.

3. Для пошуку мінімуму функції необхідно зсувати лінії рівня в напрямі протилежному вектору $\vec{N}$. Вершина A багатокутника є останньою в цьому напрямі (рис. 2.7). Це точка перетину прямих I і III. Її координати знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ -3x_1 + x_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow x_1^* = \frac{1}{4},\ x_2^* = \frac{15}{4}.$$

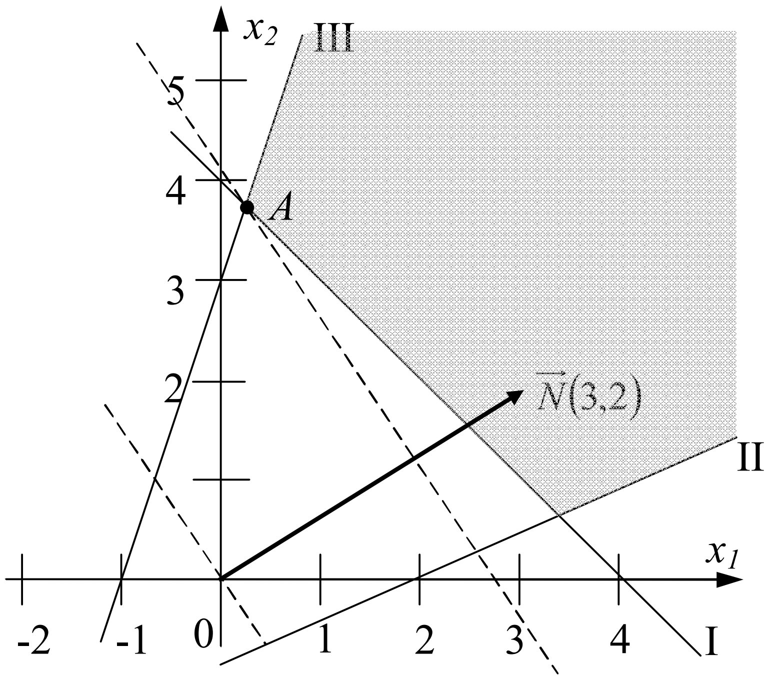


Рис. 2.7. Графічне розв'язання прикладу 9

Мінімальне значення цільової функції $f^* = \min f = f\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right) = \frac{33}{4}$.

4. Рухаючи лінії рівня в напрямі вектора $\overrightarrow{N}$ для пошуку максимуму функції, бачимо, що неможливо знайти останню точку області допустимих розв'язків. Звідси випливає, що цільова функція необмежена на множині планів зверху, тобто $\max f(x_1, x_2) = +\infty$.

Відповідь: функція необмежена на множині планів зверху ($\max f(x_1, x_2) = +\infty$), а точка $A\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right)$ є точкою мінімуму функції, $\min f = \frac{33}{4}$.

Приклад 10. Розв'язати графічним методом:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, & I \\ x_2 \le 3, & II \\ x_1 \le 4, & III \\ x_1 + 4x_2 = 8 & IV \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Будуємо багатокутник розв'язків задачі. Обмеження – рівність IV допускає тільки точки, які лежать на цій прямій. Таким чином, враховуючи інші обмеження, область допустимих розв'язків – це відрізок AB (рис. 2.8).

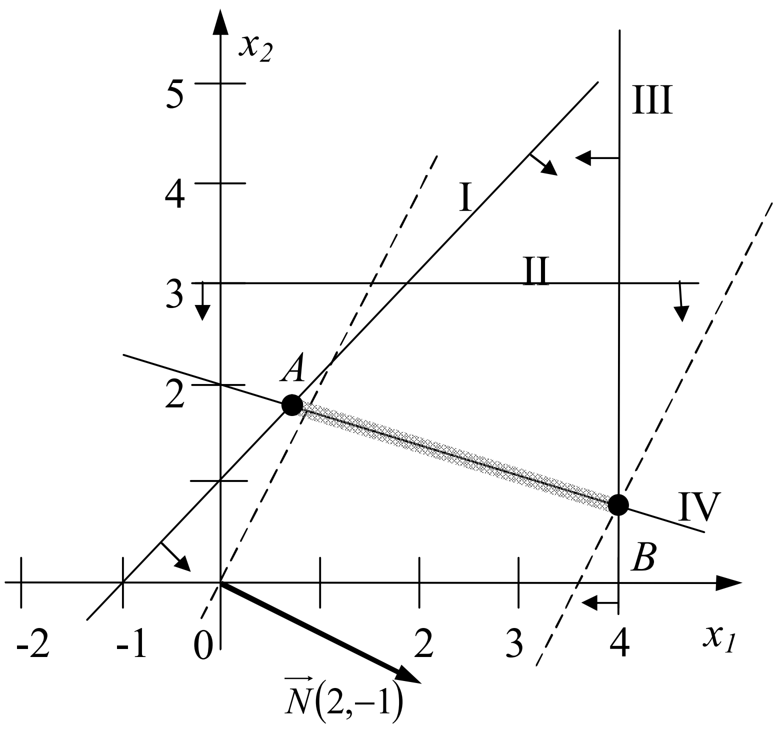


Рис. 2.8. Графічне розв'язання прикладу 10

2. Будуючи лінії рівня в напрямі вектора-градієнта $\vec{N}(2,-1)$, бачимо, що найбільшого значення функція досягає в точці *B*, яка є точкою перетину прямих $x_1 = 4$ і $x_1 + 4x_2 = 8$. Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо $x_1{*} = 4,\ x_2{*} = 1$.

3. Оптимальне значення цільової функції $f{*} = \max f = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 7$.

Відповідь: $f{*} = \max f = f(4,1) = 7$.

2.5. Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування

Вище був розглянутий графічний метод розв'язання ЗЛП, зручний для випадку, коли кількість змінних не перевищує $n-m=2$. У 1947 р. американський вчений Дж. Данциг запропонував універсальний метод розв'язання ЗЛП для будь-якої кількості змінних, який отримав назву *симплекс-метод*. Ідея цього методу полягає в послідовному направленому переборі вершин опуклого багатогранника в просторі. Розв'язання задачі починається з розгляду однієї з вершин ОДР. Якщо ця вершина не відповідає максимуму або мінімуму цільової функції (залежно від постановки задачі), то переходять до сусідньої згідно з критерієм оптимальності, покращуючи значення функції цілі. Таким чином, через певну кількість кроків, знаходиться оптимальний план задачі або доводиться, що ЗЛП немає розв'язку. Перехід до наступного плану здійснюється за допомогою методу жорданових виключень, який детально розглянутий у п. 1.1. На кожному кроці симплекс-методу одна базисна змінна стає вільною, а вільна - базисною. Ця процедура здійснюється таким чином, щоб значення цільової функції було не менше (не більше), ніж на попередньому кроці для задачі на максимум (мінімум). Геометрично така заміна призводить до переходу від однієї кутової точки багатогранника до сусідньої, яка пов'язана з попередньою спільним ребром.

Теорема 5. Якщо ЗЛП в канонічній формі має оптимальний план, то він обов'язково відповідає принаймні одному опорному розв'язку її системи обмежень.

2.5.1. Алгоритм симплекс-методу

Застосування симплекс-методу для розв'язання ЗЛП потребує попередньо привести систему її обмежень до канонічної форми (2.8). Серед змінних задачі обирається початковий базис з m змінних, які мають невід'ємні значення, а останні $(n-m)$ вільні змінні дорівнюють нулю.

Розглянемо ЗЛП у канонічній постановці:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \to \max(\min),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Припустимо для визначеності, що змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, ($n = r + m$) є базисними, тоді систему обмежень можна переписати в базисній формі:

$$\begin{cases} x_{r+1} = b_1^/ - a_{11}^/x_1 - a_{12}^/x_2 - \ldots - a_{1r}^/x_r, \\ x_{r+2} = b_2^/ - a_{21}^/x_1 - a_{22}^/x_2 - \ldots - a_{2r}^/x_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+m} = b_m^/ - a_{m1}^/x_1 - a_{m2}^/x_2 - \ldots - a_{mr}^/x_r. \end{cases}$$

Виразивши в цільовій функції змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ через $x_1, x_2, \ldots, x_r$, отримаємо ЗЛП, записану в базисній формі:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_r) = c_1^/x_1 + c_2^/x_2 + \ldots + c_r^/x_r + c_0^/ \to \max(\min),$$
$$\begin{cases} x_{r+1} = b_1^/ - a_{11}^/x_1 - a_{12}^/x_2 - \ldots - a_{1r}^/x_r, \\ x_{r+2} = b_2^/ - a_{21}^/x_1 - a_{22}^/x_2 - \ldots - a_{2r}^/x_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+m} = b_m^/ - a_{m1}^/x_1 - a_{m2}^/x_2 - \ldots - a_{mr}^/x_r. \end{cases}$$

Ця формальна модель задачі лінійного програмування зазвичай задається в табличній формі, яка називається *симплекс-таблицею* (табл. 2.2), зручною для виконання операцій симплекс-методу.

Кожен рядок симплекс-таблиці, окрім останнього, відповідає певному обмеженню-рівності задачі. Вільні члени обмежень складають крайній правий стовпець таблиці. Останній рядок таблиці складений з коефіцієнтів цільової функції, взятих *з* *протилежним знаком*. Обмеження вигляду $x_j \geq 0$, $j=\overline{1,n}$ до таблиці не включають. Кількість базисних змінних завжди дорівнює кількості обмежень, а їх значення $x_{r+j} = b_j$, $j=\overline{1,m}$ використовуються в якості початкового плану.

Таблиця 2.2

Симплекс-таблиця

		Вільна змінна				Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_r$	1
Базисна змінна	x_{r+1}	a'_{11}	a'_{12}	…	a'_{1r}	b'_1
	x_{r+2}	a'_{21}	a'_{22}	…	a'_{2r}	b'_2
	…	…	…	…	…	…
	x_{r+m}	a'_{m1}	a'_{m2}	…	a'_{mr}	b'_m
Цільова функція	f	$-c'_1$	$-c'_2$	…	$-c'_r$	c'_0

У випадку, коли $b_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, отриманий початковий план є опорним. Випадок неопорного плану буде розглянутий нижче (п. 2.5.2).

Критерій оптимальності опорного плану:

- для задачі на максимум: серед коефіцієнтів при вільних змінних рядка "Цільова функція" не повинно бути від'ємних;

- для задачі на мінімум: серед коефіцієнтів при вільних змінних рядка "Цільова функція" не повинно бути додатних.

Загальна схема симплекс-методу складається з таких кроків:

1. Будують симплекс-таблицю і визначають початковий базис і відповідну йому початкову точку X^0.

2. Перевіряють отриманий опорний на *оптимальність.*

Якщо критерій оптимальності виконаний, то отриманий план є оптимальним і розв'язання завершено. Якщо критерій оптимальності не виконаний, то переходять до третього кроку.

3. Визначають змінну, яку будуть вводити в базис.

Якщо розв'язується задача на максимум, то в якості такої змінної обирають змінну, якій відповідає найменший від'ємний коефіцієнт рядка "Цільова функція".

Для задачі на мінімум обирають змінну, що відповідає найбільшому додатному коефіцієнту рядка "Цільова функція".

Стовпець, який відповідає цій змінній, називається *провідним стовпцем*.

4. Визначають змінну, яку потрібно вивести з базису.

Рядок, який відповідає цій змінній, називається *провідним рядком*. Провідний рядок обирається з умови мінімуму відношень елементів стовпця вільних членів до відповідних *додатних* елементів провідного стовпця:

$$\theta = \min_{a_{ij}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (2.16)$$

Такі відношення називаються *симплексними відношеннями*. На перетині провідних рядка і стовпця знаходиться *провідний елемент*.

5. Виконують жорданове перетворення симплекс-таблиці з обраним провідним елементом і повертаються до кроку 2.

Кроки 2-5 утворюють одну ітерацію симплекс-методу.

Зауваження:

1. Для того щоб балансуючі змінні були невід'ємними, необхідно перед складанням симплекс-таблиці привести всі нерівності до вигляду $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i$, $i=\overline{1,m}$. Тоді рядки базисних змінних у початковій таблиці будуть складатися з коефіцієнтів при змінних приведеної системи обмежень, а цільовий рядок – з коефіцієнтів цільової функції, записаних з протилежним знаком.

2. Балансуючі змінні у відповідь не включають.

Приклад 11. Розв'язати задачу:

$$f(x_1,x_2)=3x_1-2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \le 4, \\ x_2 \le 3, \\ x_1,x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку необхідно звести цю задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо додаткові змінні $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$, тоді матимемо:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 - 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_4 = 3, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Виразимо балансуючі змінні x_3, x_4 через вільні x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - (1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2), \\ x_4 = 3 - 1 \cdot x_2, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

1. Складаємо симплексну таблицю (табл.2.3).

Таблиця 2.3

Симплексна таблиця

Приклад 11		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	*1*
Базисна змінна	x_3	1	1	4
	x_4	0	1	3
Цільова функція	f	-3	2	0

Початковий план $X^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,3,4)$ є опорним. Значення цільової функції $f(X^0) = 0$. Для перевірки підставимо знайдені значення змінних у цільову функцію: $f(X^0) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$.

2. Перевіряємо отриманий план на оптимальність. Серед оцінок рядка "Цільова функція" є додатне число "2", тобто критерій оптимальності невиконаний і потрібно поліпшувати початковий план.

3. Визначаємо змінну, яку будемо вводити в базис. Згідно з п. 3 загальної схеми симплекс-методу це змінна x_2 (табл.2.4).

Таблиця 2.4

Провідний стовпець

Приклад 11		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	1
Базисна змінна	x_3	1	1	4
	x_4	0	1	3
Цільова функція	f	-3	2	0

4. Обчислимо відношення елементів стовпця вільних членів до відповідних елементів провідного стовпця: $\frac{4}{1}=4$; $\frac{3}{1}=3$. Для визначення провідного рядка знайдемо найменше симплексне відношення:

$$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\} = \min\left\{\frac{4}{1};\frac{3}{1}\right\} = \min\{4;3\} = 3,$$

тобто необхідно вивести з базису змінну x_4 (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

Провідний рядок

Приклад 11		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	1	
Базисна змінна	x_3	1	1	4	4/1=4
	x_4	0	1	3	3/1=3
Цільова функція	f	-3	2	0	$\min\{4;3\}=3$

5. Виконуємо жорданове перетворення таблиці (табл. 2.6)

Таблиця 2.6

Ітерація 1

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_1$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_3	1	-1	1
	x_2	0	1	3
Цільова функція	f	-3	-2	-6

Відповідний опорний план $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0{,}3{,}1{,}0)$. Бачимо, що серед оцінок цільового рядка немає додатних, тобто отриманий план є оптимальним.

Відповідь: $X^* = (x_1, x_2) = (0{,}3)$, $\min f = f(X^*) = -6$.

Перевірка: $f = 3x_1 - 2x_2 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$.

Приклад 12. Знайти максимум функції $f = -3x_1 + 2x_2$ при додаткових обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. На змінну x_1 не накладається умова невід'ємності, тому перед застосуванням симплекс-методу необхідно замінити її різницею двох невід'ємних змінних $x_1 = x_1' - x_1''$. Тоді отримаємо еквівалентну задачу лінійного програмування:

$$f = -3(x_1' - x_1'') + 2x_2 = -3x_1' + 3x_1'' + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1' + 3x_1'' - 3x_2 \le 12, \\ -x_1' + x_1'' + x_2 \le 6, \\ x_1', x_1'', x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вводимо балансуючі змінні x_3, x_4

$$\begin{cases} 2x_1' + 3x_1'' - 3x_2 \le 12, & x_3 \\ -x_1' + x_1'' + x_2 \le 6, & x_4 \\ x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 \ge 0, & \end{cases}$$

і складаємо початкову симплекс-таблицю (табл.2.7).

Таблиця 2.7

Симплексна таблиця

Приклад 12		Вільна змінна			Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1'$	$-x_1''$	$-x_2$	*1*	
Базисна змінна	x_3	2	3	-3	12	12/3=4
	x_4	-1	1	1	6	6/1=6
Цільова функція	f	3	-3	-2	0	$\min\{4;6\}=4$

Як видно з таблиці, умова оптимальності не виконана, оскільки серед оцінок цільового рядка є від'ємні. Поліпшуємо отриманий опорний план $X=(x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4)=(0{,}0{,}0{,}12{,}6)$. Стовпець, який відповідає змінній x_1'', обираємо провідним, провідний рядок знаходимо з симплексних відношень, наведених у табл. 2.7. Тоді друга симплекс-таблиця набуде вигляду табл. 2.8:

Таблиця 2.8

Ітерація 1

Після обміну $x_1'' \leftrightarrow x_3$		Вільна змінна			Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1'$	$-x_3$	$-x_2$	*1*	
Базисна змінна	x_1''	2/3	1/3	-1	4	—
	x_4	-5/3	-1/3	2	2	2/2=1
Цільова функція	f	5	1	-5	12	

Оптимальний розв'язок ще не отримано, оскільки залишилась ще одна від'ємна оцінка. Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_4$ одержимо оптимальний план (табл. 2.9).

Таблиця 2.9

Ітерація 1

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна			Вільний член
		$-x_1'$	$-x_3$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1''	-1/6	1/6	1/2	5
	x_2	-5/6	-1/6	1/2	1
Цільова функція	f	5/6	1/6	5/2	17

Максимальне значення цільової функції $f = 17$, оптимальний розв'язок $X = (x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4) = (0{,}5{,}1{,}0{,}0)$.

Повернемося до поставленої задачі і знайдемо змінну x_1: $x_1 = x_1' - x_1'' = 0 - 5 = -5$.

Таким чином, оптимальний план $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5{,}1{,}0{,}0)$.

Відповідь: $X^* = (x_1, x_2) = (-5{,}1)$, $f^* = \min f = f(X^*) = 17$.

2.5.2. Знаходження початкового опорного розв'язку

У вищерозглянутому пункті перший отриманий розв'язок виявився опорним. Але в багатьох задачах початковий базисний розв'язок може містити від'ємні компоненти, тобто не бути опорним. У такому випадку потрібно спочатку за допомогою спеціального правила симплекс-методу знайти будь-який опорний розв'язок поставленої задачі, а потім вже шукати оптимальний розв'язок (або зробити висновок про суперечність умов задачі).

Схема знаходження опорного розв'язку:

1. Визначають рядок з від'ємним вільним членом. (Зазвичай обирають рядок з найменшим від'ємним членом.) Серед коефіцієнтів обраного рядка, які відповідають вільним змінним, обирають будь-який від'ємний. Він визначає провідний стовпець.

Якщо в обраному рядку від'ємних коефіцієнтів немає, то *система обмежень задачі несумісна* і задача розв'язана.

2. Визначають провідний рядок.

Для цього знаходять мінімум *додатних* відношень елементів стовпця вільних членів до відповідних елементів провідного стовпця:

$$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\}, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}.$$

3. Виконують жорданове перетворення симплекс-таблиці з обраним провідним елементом.

Цей алгоритм повторюють доти, поки не буде отриманий опорний план.

Повернемося до прикладу 9, який раніше був розв'язаний графічно. Область обмежень задана системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Знайти: а) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \min$;

б) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$. (2.17)

Розв'язання. *Задача а*. Зводимо цю систему до канонічного вигляду. Для того, щоб балансуючі змінні x_3, x_4, x_5 набували лише невід'ємних значень, спочатку приведемо кожну нерівність системи обмежень до вигляду $ax_1 + bx_2 \le c$. Для цього першу і третю нерівність помножимо на “-1”:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -4, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -3x_1 + x_2 \le 3. \end{cases}$$

Вводимо балансуючі змінні, які будуть базисними в початковому плані:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -4, & \Big| \; x_3 \\ x_1 - 2x_2 \le 2, & \Big| \; x_4 \\ -3x_1 + x_2 \le 3, & \Big| \; x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

1. Складаємо симплексну таблицю (табл. 2.10).

Таблиця 2.10

Симплексна таблиця

Приклад 9		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	1	
Базисна змінна	x_3	-1	-1	-4	-4/(-1)=4
	x_4	1	-2	2	—
	x_5	-3	1	3	3/1=3
Цільова функція	f	-3	-2	0	$\min\{4;3\}=3$

Початковий план $X^0=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,0,-4,2,3)$ не є опорним, тому що $x_3=-4$. Значення цільової функції $f=0$. Обираємо рядок, що відповідає базисній змінній x_3. У ньому два однакові від'ємні коефіцієнти, які відповідають вільним змінним x_1,x_2. Виключимо зі списку вільних, наприклад, змінну x_2, тобто провідним буде стовпець, який відповідає цій змінній. Змінну, яку будемо виводити з базису, знаходимо з симплексних відношень, наведених у табл. 2.10. Після її перерахунку методом жорданових виключень, маємо (табл. 2.11).

Таблиця 2.11

Ітерація 1

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_5$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_5$	1	
Базисна змінна	x_3	-4	1	-1	-1/(-4)=1/4
	x_4	-5	2	8	—
	x_2	-3	1	3	—
Цільова функція	f	-9	2	6	$\min\left\{\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}$

Отриманий план $X^1=(0,3,-1,8,0)$ також не є опорним оскільки $x_3=-1$. Повторюємо процедуру знаходження опорного плану ще раз (табл. 2.12). Необхідні для цього симплексні відношення наведені в табл. 2.11.

Таблиця 2.12

Ітерація 2

Після обміну $x_1 \leftrightarrow x_3$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_3$	$-x_5$	*1*
Базисна змінна	x_1	-1/4	-1/4	1/4
	x_4	-5/4	3/4	37/4
	x_2	-3/4	1/4	15/4
Цільова функція	f	-9/4	-1/4	33/4

У стовпці, який відповідає вільним членам, немає від'ємних елементів, тобто отриманий план $X^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}, 0, \frac{33}{4}, 0\right)$ - опорний. Далі переходимо до звичайного алгоритму симплекс-методу, але, як бачимо, критерій оптимальності виконаний, тобто отриманий опорний план є оптимальним.

Відповідь: $X^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right)$, $\min f = f(X^*) = \frac{33}{4}$.

Для наочного пояснення пригадаємо графічний розв'язок цієї задачі (рис. 2.9.)

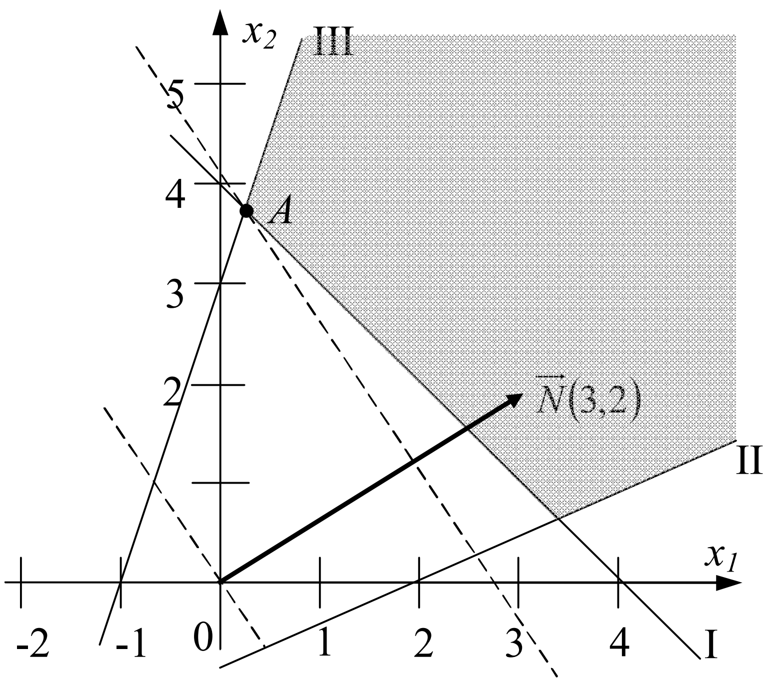


Рис. 2.9. Графічний розв'язок прикладу 9

Отриманий початковий план $X^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0{,}-4{,}2{,}3)$ геометрично на площині відповідає початку координат. Але точка $O(0{,}0)$ не належить ОДР, тому цей план не є опорним, це видно з наявності від'ємних координат. Після першого перетворення таблиці ми знов приходимо до неопорного плану в точку $(0{,}3)$ (переміщуючись вздовж прямої $x_1 = 0$), яка теж не належить ОДР, але лежить на одній з прямих, утворюючих ОДР. І, нарешті, після другого перетворення, ми потрапляємо в точку $A = \left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right)$, яка є оптимальним розв'язком задачі. Бачимо, що для цього ми рухалися вздовж прямої $-3x_1 + x_2 = 3$.

Таким чином, кожен крок симплекс-методу геометрично відповідає руху з отриманої вершини багатокутника розв'язків вздовж однієї з прямих, що проходять через цю точку, до сусідньої вершини.

Зауважимо, що якщо б у першому перетворенні ми вводили в базис змінну x_1, то рухалися б спочатку по прямій $x_2 = 0$ до точки з координатами $(2{,}0)$, потім вздовж прямої $x_1 - 2x_2 = 2$ до точки $B\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ і на останньому кроці, рухаючись вздовж прямої $x_1 + x_2 = 4$, потрапили б у точку $A = \left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right)$. У цьому випадку було б потрібно здійснити три перетворення симплекс-таблиць. Це неважко перевірити, якщо в початковій таблиці вибрати провідним елемент $a_{21} = 1$.

Задача б. З графічного розв'язку вже відомо, що цільова функція необмежена на ОДР. Подивимося, як це буде видно з аналітичного методу. Ця задача відрізняється від задачі а) лише цільовою функцією. Тому, повторюючи попередні обчислення, після двох ітерацій отримаємо табл. 2.13.

Бачимо, що критерій оптимальності не виконаний (у рядку "Цільова функція" є від'ємні числа), потрібно застосовувати звичайний алгоритм симплекс-методу. Для вибору провідного стовпця для максимізації цільової функції зазвичай потрібно взяти найменший від'ємний коефіцієнт у цільовому рядку: $\min\left\{-\frac{9}{4}, -2\right\} = -\frac{9}{4}$. Але в нашому випадку це неможливо зробити, бо не можна скласти додатних симплексних відношень (всі елементи цього стовпця від'ємні в той час, як елементи стовпця вільних членів додатні). Тому оберемо стовпець x_5 в якості провідного (табл. 2.14).

Таблиця 2.13

Ітерація 2

Після обміну $x_1 \leftrightarrow x_3$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_5$	1	
Базисна змінна	x_3	-1/4	-1/4	1/4	–
	x_4	-5/4	3/4	37/4	(37/4)/(3/4)=37/3
	x_2	-3/4	1/4	15/4	(15/4)/(1/4)=15
Цільова функція	f	-9/4	-1/4	33/4	$\min\left\{\frac{37}{3},15\right\}=\frac{37}{3}$

Таблиця 2.14

Ітерація 3

Після обміну $x_5 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_3$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1	-2/3	1/3	10/3
	x_5	-5/3	4/3	37/3
	x_2	-1/3	-1/3	2/3
Цільова функція	f	-8/3	1/3	34/3

Отриманий опорний план $X=\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3},0,0,\frac{37}{3}\right)$ не є оптимальним. (Геометрично цей план відповідає точці $B\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$ на рис. 2.8.) Поліпшити його вже не можна, бо у провідному стовпці, який відповідає змінній x_3, нема додатних елементів. Це говорить про те, що задача немає оптимального розв'язку внаслідок того, що функція необмежена на ОДР.

Відповідь: $\max f(x_1,x_2)=+\infty$.

2.5.3. Особливі випадки симплекс-методу

Розглянемо чотири особливі випадки, що зустрічаються при використанні симплекс-методу: виродженість і проблема зациклення, нескінчена множина оптимальних планів, необмеженість цільової функції на ОДР, відсутність допустимих розв'язків.

1. Виродженість і проблема зациклення

Може статися так, що на деякому етапі буде отриманий вироджений план (у стовпці вільних членів є нульові компоненти). Ця проблема виникає коли на попередньому етапі існує декілька однакових найменших симплексних відношень (2.16), у результаті чого вибір провідного рядка буде неоднозначним.

У цьому випадку провідним рядком необхідно обрати саме той рядок, у якому $b_i = 0$, провідний елемент повинний бути *додатним.* Значення цільової функції при переході до нового базису при цьому не зміниться. Як правило, після декількох кроків, що супроводжуються незмінністю значення цільової функції, приходять все ж таки до опорного плану з кращим, ніж раніше, значенням функції цілі і розв'язання задачі закінчується. У той же час не виключається випадок, коли після декількох ітерацій одержують базис, що вже зустрічався. Це явище називається *зацикленням*. Проте і теоретичні дослідження і досвід розв'язання прикладних задач показують, що зациклення виникає надзвичайно рідко. Існують певні прийоми для того, щоб швидше позбутися зациклення та скоротити час розрахунків. Наведемо один з них.

Правило подолання зациклення:

Якщо на деякому етапі є декілька однакових найменших симплексних відношень $\dfrac{b_i}{a_{ij}}, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, то необхідно обрати рядок, для якого буде найменшим відношення елементів першого (непровідного) стовпця до провідного:

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{a_{i1}}{a_{ij}}\right\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо і в цих відношеннях буде декілька однакових мінімальних, то складають відношення елементів другого (непровідного) стовпця до провідного:

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{a_{i2}}{a_{ij}}\right\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Процедуру продовжують доти, доки провідний рядок не визначиться однозначно.

Приклад 13. Розв’язати задачу:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 6x_1 + 3x_2 - 8 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 16, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_5 = 24, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв’язання: Вводячи балансуючу змінну $x_6 \ge 0$ у четверте обмеження задачі, складаємо початкову симплекс-таблицю, беручи в якості базисних змінних x_3, x_4, x_5, x_6 (табл. 2.15).

Таблиця 2.15

Симплексна таблиця

Приклад 13		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	*1*	
Базисна змінна	x_3	1	-2	8	8/1=8
	x_4	2	-1	16	16/2=8
	x_5	3	-8	24	24/3=8
	x_6	1	1	11	11/1=11
Цільова функція	f	-6	-3	-8	$\min\{8{,}8{,}8{,}11\} = 11$

Початковий опорний план $X^0 = (0{,}0{,}8{,}16{,}24{,}11)$, значення цільової функції $f = -8$. За критерієм оптимальності необхідно вилучити зі списку вільних змінну x_1. Провідний рядок визначаємо за симплексними відношеннями, наведеними в табл. 2.15. Але в даному прикладі маємо три однакових мінімальних значення, тому необхідно скласти відношення елементів непровідного стовпця (відповідає змінній x_2) до елементів провідного:

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{a_{i2}}{a_{i1}}\right\} = \min\left\{\frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \underline{\frac{-8}{3}}, \frac{1}{1}\right\} = -\frac{8}{3},\ i = \overline{1,4}.$$

Отже, провідним буде третій рядок. Після першого кроку жорданових виключень приходимо до табл. 2.16.

Таблиця 2.16.

Ітерація 1

Після обміну $x_1 \leftrightarrow x_5$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_5$	$-x_2$	1	
Базисна змінна	x_3	-1/3	2/3	0	0/(2/3)=0
	x_4	-2/3	13/3	0	0/(13/3)=0
	x_1	1/3	-8/3	8	–
	x_6	-1/3	11/3	3	3/(11/3)=9/11
Цільова функція	f	2	-19	40	$\min\left\{0,0,\frac{9}{11}\right\} = 0$

Отриманий план є виродженим, бо дві базисні змінні дорівнюють нулю, і неоптимальним. Для його поліпшення обираємо провідним стовпець, який відповідає змінній x_2. Знов маємо два однакових найменших симплексних відношення (табл. 2.16), тому складаємо відношення елементів першого стовпця до провідного:

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{a_{i1}}{a_{i2}}\right\} = \min\left\{\frac{-1}{3} : \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} : \frac{13}{3}, \frac{-1}{3} : \frac{11}{3}\right\} = \min\left\{\underline{\frac{-1}{2}}, \frac{-2}{13}, \frac{-1}{11}\right\} = -\frac{1}{2},$$

$$i = 1{,}2{,}4.$$

Бачимо, що провідним буде перший рядок. Тоді після обміну $x_2 \leftrightarrow x_3$ отримуємо табл. 2.17.

Таблиця 2.17

Ітерація 2

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_3$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_5$	$-x_3$	1	
Базисна змінна	x_2	-1/2	3/2	0	—
	x_4	3/2	-13/2	0	0/(3/2)=0
	x_1	-1	4	8	—
	x_6	3/2	-11/2	3	3/(3/2)=2
Цільова функція	f	-15/2	57/2	40	$\min\{0{,}2\} = 0$

Значення цільової функції залишилося таким самим. У цільовому рядку залишився один від'ємний коефіцієнт при вільних змінних, який визначає провідний стовпець. Провідний рядок визначаємо за симплексними відношеннями. Отримуємо табл. 2.18.

Таблиця 2.18

Ітерація 3

Після обміну $x_5 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_4$	$-x_3$	1	
Базисна змінна	x_2	1/3	-2/3	0	—
	x_5	2/3	-13/3	0	—
	x_1	2/3	-1/3	8	—
	x_6	-1	1	3	3/1=3
Цільова функція	f	5	-4	40	

Після перерахунку табл. 2.18 отримуємо оптимальний план (табл. 2.19).

Таблиця 2.19

Ітерація 4

Після обміну $x_6 \leftrightarrow x_3$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_4$	$-x_6$	*1*
Базисна змінна	x_2	-1/3	2/3	2
	x_5	-11/3	13/3	13
	x_1	1/3	1/3	9
	x_3	1	1	3
Цільова функція	f	9	4	52

Критерій оптимальності виконаний:
$x_1{*} = 9, x_2{*} = 2, x_3{*} = 3, x_4{*} = 0,\ x_5{*} = 13,\ x_6{*} = 0,\ f{*} = f(X{*}) = 52$.
Відповідь: $X{*} = (9,2,3,0,13)$, $f{*} = \max f = f(X{*}) = 52$.

2. ***Нескінчена множина оптимальних планів***

Якщо серед оцінок цільового рядку симплекс-таблиці, яка визначає оптимальний план, є хоча б один нульовий елемент (не враховуючи вільного члена), то ЗЛП має нескінчену множину оптимальних планів. Для знаходження іншого оптимального плану необхідно взяти провідним той зі стовпців, якому відповідає нульова оцінка, а провідний рядок обрати за симплексними відношеннями.

Приклад 14. Розв'язати задачу:

$$f = 4x_2 - 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 2, \\ 2x_2 - x_3 \le 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язання. Вводимо дві додаткові невід'ємні змінні x_4, x_5 і заповнюємо початкову таблицю (табл. 2.20).

Таблиця 2.20

Симплексна таблиця

Приклад 14		Вільна змінна			Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	*1*	
Базисна змінна	x_4	2	-1	0	2	—
	x_5	0	2	-1	1	1/2
Цільова функція	f	0	-4	2	0	

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_5$ одержимо табл. 2.21.

Таблиця 2.21

Ітерація 1

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_5$		Вільна змінна			Вільний член
		$-x_1$	$-x_5$	$-x_3$	*1*
Базисна змінна	x_4	2	1/2	-1/2	5/2
	x_2	0	1/2	-1/2	1/2
Цільова функція	f	0	2	0	2

Отриманий план $X^1 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0\right)$ є оптимальним. Наявність нулів серед коефіцієнтів вільних змінних цільового рядка свідчить про те, що задача має нескінчену множину оптимальних планів. Змінну x_1 можна ввести в базис. Обравши провідними перший рядок і стовпець, знову отримаємо новий оптимальний план $X^2 = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ (табл. 2.22).

Як відомо, також оптимальними будуть всі точки відрізка $X^1 X^2$, тобто точки з координатами

$$\alpha\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0\right) + (1-\alpha)\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right) = \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\alpha, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}\alpha, 0\right),\ \alpha \in [0,1].$$

Таблиця 2.22

Ітерація 2

Після обміну $x_1 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна			Вільний член
		$-x_4$	$-x_5$	$-x_3$	*1*
Базисна змінна	x_1	1/2	1/4	-1/4	5/4
	x_2	0	1/2	-1/2	1/2
Цільова функція	f	0	2	0	2

Надаючи параметру α значення з відрізка $[0,1]$, будемо отримувати нові оптимальні плани. Наприклад, при $\alpha = \frac{1}{2}$ одержимо $X = \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{4}, 0\right)$.

Відповідь: $X^* = \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\alpha, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\alpha \in [0,1]$, $\max f = f(X^*) = 2$.

3. Необмеженість цільової функції на ОДР

Якщо отриманий на деякому кроці опорний план не є оптимальним, але неможливо обрати провідний елемент за симплексними відношеннями, то задача немає оптимального розв’язку внаслідок того, що цільова функція необмежена на ОДР (див. табл. 2.14).

4. Відсутність допустимих розв'язків

Якщо обмеження ЗЛП несумісні (тобто вони не можуть виконуватися одночасно), то задача не має допустимих розв'язків.

Приклад 15. Розв’язати задачу:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язання. Вводимо до другої і третьої нерівності системи обмежень балансуючі зміні x_4, x_5 відповідно. Обираючи змінні x_3, x_4, x_5 базисними, складаємо початкову симплекс-таблицю (табл. 2.23).

Таблиця 2.23

Симплексна таблиця

Приклад 15		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	1	
Базисна змінна	x_3	-1	1	-2	-2/(-1)=2
	x_4	5	4	20	20/5=4
	x_5	-1	-1	-5	-5/(-1)=5
Цільова функція	f	-3	-4	0	$\min\{2,4,5\}=2$

Як видно з табл. 2.23, початковий план $X^0=(0,0,-2,20,-5)$ не є опорним, бо має дві від'ємні змінні. Знайдемо опорний план (див. п. 2.5.2). Після обміну $x_1 \leftrightarrow x_3$ маємо табл. 2.24

Таблиця 2.24

Ітерація 1

Після обміну $x_1 \leftrightarrow x_3$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_3$	$-x_2$	1	
Базисна змінна	x_1	-1	-1	2	—
	x_4	5	9	10	10/9
	x_5	-1	-2	-3	-3/(-2)=3/2
Цільова функція	f	-3	-7	6	$\min\left\{\frac{10}{9},\frac{3}{2}\right\}=\frac{10}{9}$

Знов серед вільних членів є від'ємний, тобто отриманий план $X=(2,0,0,10,-3)$ не є опорним. Обираючи провідним елемент $a_{22}=9$, після одного кроку жорданових виключень одержимо табл. 2.25.

Таблиця 2.25

Ітерація 2

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_3$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1	-4/9	1/9	28/9
	x_2	5/9	1/9	10/9
	x_5	1/9	2/9	-7/9
Цільова функція	f	8/9	7/9	124/9

Отриманий план $X = \left(\frac{28}{9}, \frac{10}{9}, 0, -\frac{7}{9}, 0 \right)$ містить від'ємну змінну $x_5 = -\frac{7}{9}$, але в рядку, що відповідає цій змінній, немає від'ємних елементів. Згідно з правилом знаходження опорного плану (п. 2.5.2) це означає, що неможливо обрати провідний стовпець, тобто задача не має розв'язку, бо система її обмежень суперечлива.

Відповідь: задача немає розв'язку.

2.6. Метод штучного базису розв'язання задач лінійного програмування

Розв'язання задач лінійного програмування починається зі знаходження початкового плану, виходячи з якого за допомогою симплекс-методу отримують оптимальний план вихідної задачі. Для визначення початкового плану необхідно, щоб ЗЛП мала канонічну форму, причому система обмежень повинна мати одиничний базис.

У деяких випадках знаходження початкового плану є досить легкою процедурою. Наприклад, коли обмеження вихідної задачі мають вигляд нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n},$$

то для переходу до канонічної форми ЗЛП необхідно ввести додаткові невід'ємні змінні x_{n+i}:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m}.$$

Ці додаткові змінні можна взяти в якості початкового базису і записати опорний план

$$x_j = 0, x_{n+i} = b_i, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Але в багатьох задачах складно знайти початковий план безпосередньо, бо це потребує громіздких перетворень. У цьому випадку використовують метод штучного базису (М-метод), який дозволяє розв'язати ЗЛП без попереднього знаходження опорного плану.

Розглянемо ЗЛП у канонічній формі

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_0 \to \max, \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0, b_i \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Допоміжна задача для задачі (2.18)-(2.19) складається таким чином:

1. До кожного обмеження системи (2.19), яке не містить базисну змінну, додають додатну *штучну змінну* $r_s \geq 0, s = \overline{1,k}$.

2. Цільову функцію допоміжної задачі записують у вигляді

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 - M\sum_{s=1}^{k} r_s \to \max,$$

де М вважають як завгодно великим додатним числом, яке значно перевищує решту коефіцієнтів цільової функції. Коефіцієнти М цільової функції мають зміст “штрафів” за введення штучних змінних.

У результаті отримують ЗЛП, яка називається *М-задачею*:

$$f(x_1, x_2 ... x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 - M\sum_{s=1}^{m} r_s \to \max, \qquad (2.20)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + r_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + r_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + r_m = b_m, \\ x_j \ge 0, r_s \ge 0, b_i \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, s = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (2.21)$$

У ЗЛП (2.20)-(2.21) штучні змінні $r_i \ge 0, i = \overline{1,m}$ утворюють базис, який називається *штучним*. При $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ маємо початковий опорний план $X^\circ = (0,...,0,b_1,...,b_m)$.

Для розв’язання М-задачі (2.20)-(2.21) застосовують симплексний метод.

Теорема 6. Якщо в оптимальному плані М-задачі (2.20)-(2.21) всі штучні змінні дорівнюють нулю, то цей план є оптимальним планом вихідної задачі (2.18)-(2.19).

Теорема 7. Якщо в оптимальному плані М-задачі (2.20)-(2.21) хоча б одна зі штучних змінних відмінна від нуля, то система обмежень вихідної задачі (2.19) несумісна і вихідна задача не має розв’язків.

Симплекс-таблиця, яка складається в процесі розв’язання М-задачі називається *розширеною*. Вона відрізняється від звичайної тим, що містить два рядки для цільової функції: перша – для коефіцієнтів цільової функції f вихідної задачі (2.18), а друга – для складової $M\sum_{s=1}^{m} r_s$.

Початкова таблиця для "Методу штучного базису" має вигляд (табл. 2.26).

Таблиця 2.26

Початкова таблиця

Штучний базис		Вільна змінна				Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_n$	1
Базисна змінна	r_1	a_{11}	a_{11}	…	a_{1n}	b_1
	r_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
	…	…	…	…	…	…
	r_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Цільова функція	f	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	c_0
М-рядок	M	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	$-\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$	…	$-\sum_{i=1}^{m} a_{in}$	$-\sum_{i=1}^{m} b_i$

Елементи додаткового рядка М – це сума відповідних коефіцієнтів обмежень, у які були введені штучні змінні, взята з протилежним знаком.

Критерій оптимальності опорного плану

Отриманий план є оптимальним, якщо серед елементів симплексної таблиці, які находяться в рядках М і f і відповідають вільним змінним, немає від'ємних.

Алгоритм методу штучного базису:

1. Складаємо допоміжну задачу (2.20)-(2.21).
2. Складаємо початкову симплексну таблицю (табл. 2.26).
3. Якщо серед елементів стовпця вільних членів немає від'ємних, то переходимо до кроку 4.

Якщо в стовпці вільних членів є від'ємні елементи, то спочатку потрібно знайти опорний план (п. 2.5.2) і після цього перейти до кроку 4.

4. Отриманий на другому кроці опорний план перевіряємо на оптимальність.

Якщо в рядку М і в стовпці вільних членів всі елементи додатні, то переходимо до кроку 6.

Якщо в рядку М є від'ємні елементи то необхідно поліпшувати розв'язок. Для цього обираємо серед від'ємних елементів рядка М, які відповідають вільним змінним, найменший. Цей елемент визначає провідний стовпець.

Провідний рядок визначається аналогічно симплекс-методу за симплексними відношеннями.

5. Перераховуємо симплекс-таблицю методом жорданових перетворень. Кроки 4 і 5 повторюють до тих пір, поки з М-рядка не будуть вилучені всі від'ємні елементи.

Якщо на деякому етапі неможливо знайти провідний рядок, оскільки немає додатних елементів у провідному стовпці, то функція в ОДР задачі не обмежена і алгоритм завершує роботу.

6. Якщо в рядку "Цільова функція" всі оцінки, які відповідають вільним змінним, невід'ємні, то отриманий план є оптимальним. Якщо ж серед оцінок є від'ємні, то перераховуємо таблицю звичайним симплекс-методом доти, доки або не буде знайдено оптимальний план або не буде доведено, що цільова функція необмежена в ОДР.

Зауваження:

1. Таблиця для М-задач містить додатковий М-рядок, який можна виключити з таблиці лише тоді, коли з базису будуть виведені всі штучні змінні. Після цього провідний стовпець визначають за елементами рядка "Цільова функція".

2. Якщо матриця системи обмежень містить $k, k < m$ різних одиничних векторів, то при складанні М-задачі вводять $m - k$ штучних змінних.

3. Стовпець, який відповідає штучній змінній, що була виведена з базису після деякого кроку перетворень симплекс-таблиці, у подальших таблицях можна не перераховувати. Але якщо буде потреба знаходження розв'язку двоїстої задачі до даної (п. 2.7), то такий стовпець необхідно обов'язково перераховувати надалі.

У результаті розрахунків можливі два варіанти:

1. Всі штучні змінні виведені з базису. У цьому випадку ми отримали деякий опорний розв'язок вихідної задачі і далі продовжуємо знаходження її оптимального плану за цільовим рядком.

2. У базисі оптимального плану залишаються штучні змінні, причому всі оцінки М-рядка невід'ємні. Це означає, що вихідна задача не має розв'язків.

Приклад 16. Розв'язати задачу:

$$f = 3x_1 + 5x_2 - x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 38, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Розв'язання. Система обмежень (2.22) не містить одиничного базису. Тому будемо розв'язувати задачу за допомогою штучного базису, для цього введемо в кожне обмеження системи (2.22) по одній невід'ємній штучній змінній r_1, r_2 відповідно. Тоді М-задача має вигляд

$$f = 3x_1 + 5x_2 - x_3 - Mr_1 - Mr_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + r_1 = 38, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + r_2 = 2, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0. \end{cases}$$

Обираючи змінні r_1, r_2 базисними, записуємо початкову симплекс-таблицю (табл.2.27).

Таблиця 2.27

Початкова таблиця

Приклад 16		Вільна змінна				Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	*1*	
Базисна змінна	r_1	5	7	4	2	38	38/7
	r_2	-1	1	2	3	2	2/1
Цільова функція	f	-3	-5	1	0	0	$\min\left\{\frac{38}{7}, 2\right\} = 2$
М-рядок	M	-4	-8	-6	-5	-40	

Початковий план $X=(x_1,x_2,x_3,x_4,r_1,r_2)=(0,0,0,0,38,2)$ є опорним, але його необхідно поліпшувати оскільки в М-рядку є від'ємні елементи. Змінну x_2 будемо вводити в базис, бо їй відповідає найменша оцінка М-рядка ($\min\{-4,-8,-6,-5\}=-8$). Провідний рядок визначаємо за симплексними відношеннями, наведеними в табл. 2.27. Тоді після перерахунку маємо (табл. 2.28).

Таблиця 2.28

Ітерація 1

Після обміну $x_2 \leftrightarrow r_2$		Вільна змінна				Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-r_2$	$-x_3$	$-x_4$	1	
Базисна змінна	r_1	12	-7	-10	-19	24	24/12
	x_2	-1	1	2	3	2	—
Цільова функція	f	-8	5	11	15	10	
М-рядок	M	-12	8	10	19	-24	

В М-рядку залишилась ще одна від'ємна оцінка, тому необхідне подальше поліпшення отриманого плану $X=(0,2,0,0,24,0)$.

Після ще одного кроку жорданових виключень, отримаємо табл. 2.29.

Таблиця 2.29

Ітерація 2

Після обміну $x_1 \leftrightarrow r_1$		Вільна змінна				Вільний член
		$-r_1$	$-r_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1	1/12	-7/12	-5/6	-19/12	2
	x_2	1/12	5/12	7/6	17/12	4
Цільова функція	f	2/3	1/3	13/3	7/3	26
М-рядок	M	1	1	0	0	0

Всі оцінки М-рядка додатні, також додатні і оцінки рядка "Цільова функція", тому отриманий план $X^* = (2,4,0,0,0,0)$ є оптимальним.

Відповідь: $X^* = (2,4,0,0)$, $\max f = f(X^*) = 26$.

Зауважимо, що при першій ітерації з базису була виведена штучна змінна r_2, тому в табл. 2.27 можна було викреслити стовпець, який відповідає цій змінній, що надалі скоротило би час розрахунків.

Приклад 17. Розв'язати задачу:

$$f = 7x_1 + 3x_2 - 14x_3 + x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 \ge 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Розв'язання. Спочатку приводимо вихідну задачу до вигляду (2.20)-(2.21):

$$z = -f = -7x_1 - 3x_2 + 14x_3 - x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 \le -10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

У перше обмеження системи (2.23) вводимо невід'ємну штучну змінну r_1, а в інші два обмеження – балансуючі змінні x_5, x_6 відповідно. Випишемо М-задачу:

$$z = -7x_1 - 3x_2 + 14x_3 - x_4 - Mr_1 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 + r_1 = 6, \\ -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = -10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 10 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6},\ r_1 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману задачу симплекс-методом (табл. 2.30).

Таблиця 2.30

Початкова таблиця

Приклад 17		Вільна змінна				Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1	
Базисна змінна	r_1	3	-2	-6	1	6	6/3
	x_5	-2	-5	4	-3	-10	-10/(-2)
	x_6	1	4	-2	2	10	10/1
Цільова функція	z	7	3	-14	1	0	$\min\{2,5,10\}=2$
М-рядок	M	-3	2	6	-1	-6	

Серед вільних членів є від'ємний, тому спочатку застосовуємо метод знаходження опорного плану (п. 2.5.2). Після жорданового перетворення табл. 2.30, маємо табл. 2.31.

Таблиця 2.31

Ітерація 1

Після обміну $x_1 \leftrightarrow r_1$		Вільна змінна				Вільний член	Симплексні відношення
		$-r_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1	
Базисна змінна	x_1		-2/3	-2	1/3	2	—
	x_5		-19/3	0	-7/3	-6	-6/(-19/3)
	x_6		14/3	0	5/3	8	8/(14/3)
Цільова функція	z		23/3	0	-4/3	-14	$\min\left\{\frac{18}{19},\frac{12}{7}\right\}=\frac{18}{19}$

На цьому етапі єдина штучна змінна виведена з базисних, тому можна убрати з таблиці М-рядок, а також стовпець, який їй відповідає (табл. 2.31). Подальше розв'язання наведене у вигляді наступних симплекс-таблиць без подробиць вибору провідного елемента (табл. 2.32-2.34).

Таблиця 2.32

Ітерація 2

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_5$		Вільна змінна			Вільний член	Симплексні відношення
		x_5	$-x_3$	$-x_4$	1	
Базисна змінна	x_1	-2/19	-2	11/19	50/19	50/11
	x_2	-3/19	0	7/19	18/19	18/7
	x_6	14/19	0	-1/19	68/19	—
Цільова функція	z	23/19	0	-79/19	-404/19	$\min\left\{\frac{50}{11},\frac{18}{7}\right\}=\frac{18}{7}$

Таблиця 2.33

Ітерація 3

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна			Вільний член	Симплексні відношення
		x_5	$-x_3$	$-x_2$	1	
Базисна змінна	x_1	1/7	-2	-11/7	8/7	8/1
	x_4	-3/7	0	19/7	18/7	—
	x_6	5/7	0	1/7	26/7	26/5
Цільова функція	z	-4/7	0	79/7	-74/7	$\min\left\{8,\frac{26}{5}\right\}=\frac{26}{5}$

Таблиця 2.34

Ітерація 4

Після обміну $x_5 \leftrightarrow x_6$		Вільна змінна			Вільний член
		x_6	$-x_3$	$-x_2$	1
Базисна змінна	x_1				2/5
	x_4				24/5
	x_5				26/5
Цільова функція	z	4/5	0	57/5	-38/5

Допоміжна задача розв’язана, оптимальний план має вигляд $X^* = \left(\frac{2}{5},0,0,\frac{24}{5}\right)$, $\max z = z(X^*) = -\frac{38}{5}$.

Відповідь: $X^* = \left(\frac{2}{5},0,0,\frac{24}{5}\right)$, $\min f = f(X^*) = \frac{38}{5}$.

2.7. Двоїста задача

Кожну задачу лінійного програмування можна відповідним чином зв'язати з іншою оптимізаційною задачею лінійного програмування, яку називають *двоїстою*. Початкова задача при цьому називається *прямою*. При цьому поділ на пряму і двоїсту задачу досить умовний. Про такі задачі говорять як про пару взаємодвоїстих задач. З практичної точки зору доцільність такого зіставлення обумовлена причинами:

1. При розв'язанні однієї з пари взаємодвоїстих задач відповідь іншої отримують автоматично без додаткових зусиль, що надає можливість обрати для розв'язання ту з задач, яку простіше розв'язати.
2. У деяких випадках потрібно знати розв'язок обох з пари взаємодвоїстих задач.
3. Розв'язок двоїстої задачі дає можливість провести аналіз стійкості прямої задачі відносно малих змін у її умовах.

2.7.1. Визначення двоїстої задачі

Розглянемо ЗЛП, яка має k обмежень-нерівностей, $m-k$ обмежень-рівнянь і l невід'ємних змінних:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \to \max, \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m, \\ x_1, x_2, \ldots, x_l \ge 0, \\ x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n - \textit{вільного знаку}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Двоїстою до задачі (2.24)-(2.25) називається задача

$$g(y_1, y_2 \dots y_m) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m + c_0 \to \min, \tag{2.26}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \dots + a_{m,l+1}y_m = c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,l+1}y_2 + \dots + a_{m,l+1}y_m = c_{l+1}, \\ y_1, y_2, \dots, y_k \ge 0, \\ y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_m - \textit{вільного знаку}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Теорема 8. Двоїстою до двоїстої задачі (2.26)-(2.27) є пряма задача (2.24)-(2.25).

Порівнюючи дві сформульовані задачі, бачимо, що ***двоїста задача складається за такими правилами***:

1. Пряма задача потребує знайти максимум функції, а двоїста – мінімум.
2. Кількість змінних $y_1, y_2, \dots, y_m$ двоїстої задачі (2.26)-(2.27) дорівнює кількості обмежень прямої задачі (2.24)-(2.25).
3. Кількість обмежень двоїстої задачі (2.26)-(2.27) дорівнює кількості змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ прямої задачі (2.24)-(2.25).
4. Коефіцієнтами при невідомих цільової функції двоїстої задачі (2.26)-(2.27) є вільні члени системи обмежень прямої задачі (2.24)-(2.25) і навпаки.
5. Якщо деяка змінна x_j, $j = \overline{1,n}$ прямої задачі (2.24)-(2.25) може набувати лише невід'ємних значень, то відповідне їй j-те обмеження двоїстої задачі (2.26)-(2.27) задається нерівністю. Якщо на змінну x_j задачі (2.24)-(2.25) не накладено умову невід'ємності, тобто вона може набувати як від'ємних так і додатних значень, то відповідне їй j-те обмеження двоїстої задачі (2.26)-(2.27) задається рівнянням.
6. Якщо i-те обмеження прямої задачі (2.24)-(2.25) задано рівнянням, то на відповідну змінну y_i, $i = \overline{1,m}$ задачі (2.26)-(2.27) умова невід'ємності не накладається.

7. Матриці систем обмежень прямої та двоїстої задач взаємно транспоновані:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Зауваження. Якщо в оптимальному плані прямої задачі (2.24)-(2.25) i-те обмеження прямої задачі виконується як строга нерівність, то оптимальне значення відповідної змінної y_i, $i = \overline{1,m}$ двоїстої задачі (2.26)-(2.27) дорівнює нулю, тобто $y^*_i = 0$, і навпаки.

Паралельний запис пари взаємодвоїстих задач виглядає так:

Пряма задача Знайти ***максимум*** лінійної функції $f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0$	**Двоїста задача** Знайти ***мінімум*** лінійної функції $g = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m + c_0$
при додаткових обмеженнях-нерівностях $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, $i = \overline{1,k}$,	з невід'ємними змінними $y_i \ge 0$, $i = \overline{1,k}$
при додаткових обмеженнях-рівняннях $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = \overline{k+1,m}$	зі змінними вільного знаку y_i, $i = \overline{k+1,m}$,
з невід'ємними змінними $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,l}$	при додаткових обмеженнях-нерівностях $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \ge c_i$, $j = \overline{1,l}$,
зі змінними вільного знаку x_j, $j = \overline{l+1,n}$	при додаткових обмеженнях-рівняннях $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji}y_i = c_i$, $j = \overline{l+1,n}$

Умови пари взаємодвоїстих задач можна записати однією таблицею. Для цього запишемо систему обмежень прямої задачі (2.24)-(2.25) у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n, \\ x_{n+2} = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+k} = b_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots - a_{kn}x_n, \\ 0 = b_{k+1} - a_{k+1,1}x_1 - a_{k+1,2}x_2 - \ldots - a_{k+1,n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

і складемо табл. 2.35.

Таблиця 2.35

Умови пари взаємодвоїстих задач

		y_{m+1}	…	y_{m+l}	0	…	0	g
		$-x_1$	**…**	**$-x_l$**	**$-x_{l+1}$**	**…**	**$-x_n$**	**1**
y_1	**x_{n+1}**	a_{11}	…	a_{1l}	$a_{1,l+1}$	…	a_{1n}	b_1
…	**…**	…	…	…	…	…	…	…
y_k	**x_{n+k}**	a_{k1}	…	a_{kl}	$a_{k,l+1}$	…	a_{kn}	b_k
y_{k+1}	**0**	$a_{k+1,1}$	…	$a_{k+1,l}$	$a_{k+1,l+1}$	…	$a_{k+1,n}$	b_{k+1}
…	**…**	…	…	…	…	…	…	…
y_m	**0**	a_{m1}	…	a_{m2}	…	…	a_{mn}	b_m
1	**f**	$-c_1$	…	$-c_l$	$-c_{l+1}$	…	$-c_n$	c_0

Розв'язуючи за допомогою симплекс-методу пряму задачу (2.24)-(2.25), ми одночасно отримуємо і оптимальний план двоїстої задачі (2.26)-(2.27).

З табл. 2.35 видно, що між змінними задачі можна встановити зв'язок: *вільним змінним прямої задачі відповідають базисні змінні двоїстої задачі і навпаки*.

Теорема 9 ***(Перша теорема двоїстості)***. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то й інша задача теж має оптимальний план, при цьому екстремальні значення цільових функцій співпадають:

$$\max f = \min g .$$

Якщо цільова функція однієї з пари двоїстих задач необмежена, то інша задача не має допустимих розв'язків.

Теорема 10 ***(Друга теорема двоїстості)***. Розв’язки X^* і Y^* задач (2.24)-(2.25) і (2.26)-(2.27) відповідно будуть оптимальними тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0,\ j = \overline{1,n};$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - c_j\right) y_i^* = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Теорема 11 ***(Третя теорема двоїстості)***. Значення змінних y_i, $i = \overline{1,m}$ в оптимальному розв’язку двоїстої задачі є оцінками впливу вільних членів обмежень прямої задачі на оптимальне значення цільової функції f^* прямої задачі.

Приклад 18. Записати двоїсту задачу до заданої:

$$f = x_1 - 12x_2 - 9x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Розв’язання. Запишемо дану задачу в симетричній формі. Для цього першу нерівність помножимо на (-1):

$$f = x_1 - 12x_2 - 9x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

і складемо табл. 2.36 для цієї задачі.

Таблиця 2.36

Пряма задача

Приклад 18		y_3	y_4	y_5	g
		$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	***1***
y_1	$\boldsymbol{x_4}$	1	-3	-1	-2
y_2	$\boldsymbol{x_5}$	1	-2	-3	5
1	***f***	1	-12	-9	0

Після транспонування таблиця набуде вигляду (табл. 2.37).

Таблиця 2.37

Двоїста задача

Приклад 18		y_1	y_2	1
		x_4	x_5	f
y_3	x_1	1	1	1
y_4	x_2	-3	-2	-12
y_5	x_3	-1	-3	-9
g	1	-2	5	0

Виписуємо з отриманої таблиці двоїсту задачу, враховуючи правила її складання:

$$g = -2y_1 + 5y_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 1, \\ -3y_1 - 2y_2 \ge -12, \\ -y_1 - 3y_2 \ge -9, \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Приклад 19. Записати двоїсту задачу до заданої:

$$f = 2x_1 + 12x_2 - x_3 + 19 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \le 6, \\ x_1, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Пряма задача шукає мінімум цільової функції, тому для переходу до двоїстої задачі змінимо знак другого обмеження-нерівності:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, & \Big| \; 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 \ge -6, & \Big| \; x_5 \\ x_1, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

На змінну x_2 не накладено умову невід'ємності, тому друге обмеження двоїстої задачі буде задано рівнянням (у табл. 2.38 цій змінній відповідає "0"). Подамо пряму задачу у табличній формі (табл. 2.38).

Таблиця 2.38

Пряма задача

Приклад 19		y_3	0	y_5	g
		$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	**1**
y_1	**0**	1	-3	-1	-3
y_2	$\boldsymbol{x_5}$	-2	4	1	-6
1	$\boldsymbol{f}$	2	12	-1	19

Транспонуємо отриману таблицю (табл. 2.39).

Таблиця 2.39

Двоїста задача

Приклад 19		$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	**1**
		0	x_5	f
$\boldsymbol{y_3}$	x_1	1	-2	2
0	x_2	-3	4	12
$\boldsymbol{y_5}$	x_3	-1	1	-1
$\boldsymbol{g}$	1	-3	-6	19

Виписуємо двоїсту задачу:

$$g = -3y_1 - 6y_2 + 19 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \le 2, \\ 3y_1 + 4y_2 = 12, \\ -y_1 + y_2 \le -1, \\ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

При цьому перша змінна y_1 буде вільного знаку, бо перше обмеження прямої задачі має знак "=". Це видно і з табл. 2.39: цій змінній відповідає "0".

2.7.2. Розв'язання пари двоїстих задач

Розглянемо задачу (2.28):

$$f = x_1 - 12x_2 - 9x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 5, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

і розв'яжемо її за допомогою симплексного методу.

Розв'язання. Початкова таблиця має вигляд (табл. 2.40).

Таблиця 2.40

Симплексна таблиця

Приклад 18		Вільна змінна			Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	*1*	
Базисна змінна	x_4	1	-3	-1	-2	-2/(-3)=2/3
	x_5	1	-2	-3	5	—
Цільова функція	f	-1	12	9	0	

У стовпці вільних членів є від'ємний елемент, тобто початковий план не є опорним. Переходимо до опорного плану. Після кроку жорданових перетворень з провідним елементом $a_{12} = -3$ отримаємо табл. 2.41.

Таблиця 2.41

Ітерація 1

Після обміну $x_2 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна			Вільний член
		$-x_1$	$-x_4$	$-x_3$	*1*
Базисна змінна	x_2	-1/3	-1/3	1/3	2/3
	x_5	1/3	-2/3	-7/3	19/3
Цільова функція	f	3	4	5	-8

Як видно з табл. 2.41, знайдено оптимальний план прямої задачі (2.28):

$$X^* = \left(0, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{19}{3}\right), \; f^* = \max f = f(X^*) = -8 .$$

Користуючись зв'язком між змінними двоїстих задач

$$\begin{array}{ccc|cc} \multicolumn{3}{c|}{\text{Вільні змінні}} & \multicolumn{2}{c}{\text{Базисні змінні}} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_3 & y_4 & y_5 & y_1 & y_2 \\ \multicolumn{3}{c|}{\text{Базисні змінні}} & \multicolumn{2}{c}{\text{Вільні змінні}} \end{array},$$

запишемо оптимальний план двоїстої задачі (2.29): $Y^* = (4,0,3,0,5)$. За першою теоремою двоїстості: $\min g = \max f = -8$.

Розв'яжемо двоїсту задачу (2.29) і порівняємо отримані результати. Опускаючи подробиці обчислень, наведемо тільки останню таблицю, яка відповідає оптимальному плану (табл. 2.42).

Таблиця 2.42

Оптимальна таблиця

		Вільна змінна		Вільний член
		$-y_4$	$-y_2$	*1*
Базисна змінна	y_1	1/3	2/3	4
	y_3	1/3	-1/3	3
	y_5	-1/3	7/3	5
Цільова функція	f	-2/3	-19/3	-8

Таким чином, $Y^* = (4,0)$, $g^* = \min g = -8$.

Тобто розв'язавши одну з пари двоїстих задач, можна з останньої таблиці, використовуючи зв'язок між змінними цих задач і першу теорему двоїстості, знайти оптимальний план іншої задачі.

Відповідь: $X^* = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right)$, $Y^* = (4,0)$, $g^* = f^* = -8$.

2.7.3. Двоїстий симплекс-метод

На основі ідей двоїстості в поєднанні з загальною ідеєю симплекс-метода було розроблено ще один метод розв'язання задачі лінійного програмування – *двоїстий симплекс-метод*, що дозволяє розв'язувати задачі лінійного програмування, системи обмежень яких містять вільні члени довільного знаку. Цей метод надає можливість зменшити кількість перетворень системи обмежень, а також розмір симплексної таблиці.

Двоїстий симплекс-метод виявляється зручним для розв'язання задач, умови яких одразу формулюються у стандартній формі (2.5)-(2.6).

Алгоритм двоїстого симплекс-метода:

1. *Вибір провідного рядка*: вибирається рядок з мінімальним від'ємним елементом у стовпці вільних членів. Якщо всі елементи провідного рядка, що відповідають вільним змінним, невід'ємні, то система обмежень несумісна і задача немає розв'язку. Якщо, принаймні, один з коефіцієнтів від'ємний, то переходять до кроку 2.
2. *Вибір провідного стовпця*: обирається стовпець з умови мінімуму **додатних** відношень елементів цільового рядка, які відповідають вільним змінним, до відповідних елементів провідного рядка.
3. Виконують жорданове перетворення симплекс-таблиці з обраним провідним елементом.
4. Перевіряють отриманий план на оптимальність. У разі оптимальності розв'язання закінчено, інакше повертаються до першого кроку.

Розв'яжемо задачу (2.29) за допомогою двоїстого симплекс-методу. Приводимо систему обмежень до вигляду $ay_1 + by_2 \le c$:

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \le -1, \\ 3y_1 + 2y_2 \le 12, \\ y_1 + 3y_2 \le 9, \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Переходимо до канонічної форми шляхом введення балансуючих невід'ємних змінних y_3, y_4, y_5 і складаємо початкову симплекс-таблицю (табл. 2.43).

Таблиця 2.43

Симплексна таблиця

		Вільна змінна		Вільний член
		$-y_1$	$-y_2$	1
Базисна змінна	y_3	-1	-1	-1
	y_4	3	2	12
	y_5	1	3	9
Цільова функція	g	2	-5	0

У стовпці вільних членів є від'ємний елемент, тобто отриманий план не є опорним. Цей елемент визначає провідний рядок. Складаємо відношення елементів цільового рядка до відповідних елементів провідного рядка. Враховуючи, що ці відношення повинні бути додатними, можна скласти лише одне: $\frac{-5}{-1} = 5$. Таким чином, до базису потрібно ввести змінну y_2. Виконуючи крок жорданових перетворень, отримуємо (табл. 2.44).

Таблиця 2.44

Ітерація 1

Після обміну $y_2 \leftrightarrow y_3$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-y_1$	$-y_3$	1	
Базисна змінна	y_2	1	-1	1	1/1
	y_4	1	2	10	10/1
	y_5	-2	3	6	—
Цільова функція	g	7	-5	5	$\min\{1,10\} = 1$

Від'ємних елементів у стовпці вільних членів немає, але отриманий план поки що неоптимальний. Далі застосовуємо звичайний симплекс-метод. Найменше симплексне відношення відповідає першому рядку.

Після обміну $y_1 \leftrightarrow y_2$ отримуємо (табл. 2.43, 2.46).

Таблиця 2.45

Ітерація 2

Після обміну $y_1 \leftrightarrow y_2$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-y_2$	$-y_3$	1	
Базисна змінна	y_1	1	-1	1	—
	y_4	-1	3	9	9/3
	y_5	2	1	8	8/1
Цільова функція	g	-7	2	-2	$\min\{3,8\} = 3$

Таблиця 2.46

Ітерація 3

Після обміну $y_3 \leftrightarrow y_4$		Вільна змінна		Вільний член
		$-y_2$	$-y_4$	1
Базисна змінна	y_1	2/3	1/3	4
	y_3	-1/3	1/3	3
	y_5	7/3	-1/3	5
Цільова функція	g	-19/3	-2/3	-8

Умова оптимальності виконана, $Y^* = (4,0,3,0,5)$. Як видно, табл. 2.46 співпадає з табл. 2.42, яка була отримана при застосуванні звичайного симплекс-методу.

Відповідь: $Y^* = (4,0)$, $g^* = \min g = -8$.

2.8. Цілочислове програмування

2.8.1. Постановка задачі цілочислового програмування

При розв’язанні багатьох задач виникає необхідність накладати на деякі або на всі змінні умову цілочисловості, бо багато видів ресурсів визначається цілими числами: люди, потяги, устаткування і т. д.

Загальна постановка задачі цілочисловоного програмування (ЗЦЛП) відрізняється від загальної постановки ЗЛП лише наявністю додатковою умови цілочисловості змінних:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \to extr, \qquad (2.30)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1, k_1}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i = \overline{k_1 + 1, k_2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{k_2 + 1, m}; \end{cases} \qquad (2.31)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n};$$

$$x_j \in Z,\ j = \overline{1, k}, k \le n; \qquad (2.32)$$

де a_{ij}, b_i, c_j - дійсні числа;

Z – множина цілих чисел.

Задача лінійного програмування називається *повністю цілочисловою*, якщо вимога цілочисловості розповсюджується на всі змінні.

Задача лінійного програмування називається *частково цілочисловою*, якщо вимога цілочисловості поширюється лише на частину змінних.

На перший погляд здається, що можна розв’язати таку задачу як звичайну задачу лінійного програмування, відкинувши умову (2.32), а потім заокруглити значення змінних в оптимальному плані. Але на практиці це рідко приводить до правильної відповіді. Розглянемо такий приклад.

Приклад 20. Розв'язати задачу:

$$f = -2x_1 + 4x_2 \to \max, \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 28, \\ -x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 \le 3; \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases} \tag{2.34}$$

Розв'язання. Відкинувши умову цілочисловості, отримуємо звичайну ЗЛП:

$$f = -2x_1 + 4x_2 \to \max, \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 28, \\ -x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Оптимальним планом цієї задачі є точка $A = \left(\frac{21}{13}, \frac{40}{13}\right)$ (рис. 2.10). Розглянувши всі можливі округлення компонент оптимального плану, отримаємо чотири цілочислові точки: (1,3), (1,4), (2,3), (2,4). Але жодна з цих точок не належить ОДР задачі (2.35)-(2.36) (рис. 2.10). Також жодна з найближчих до оптимального плану $A = \left(\frac{21}{13}, \frac{40}{13}\right)$ допустимих цілочислових точок (1,2), (2,2) не є справжнім розв'язком прикладу 21.

Як буде показано пізніше (п. 2.7.2.1), оптимальний розв'язок задачі (2.33)-(2.34): $f^* = \max f = f(X^*) = f(0,2) = 8$. Таким чином, умова цілочисловості є істотною і вимагає застосування спеціальних методів для розв'язання ЗЦЛП.

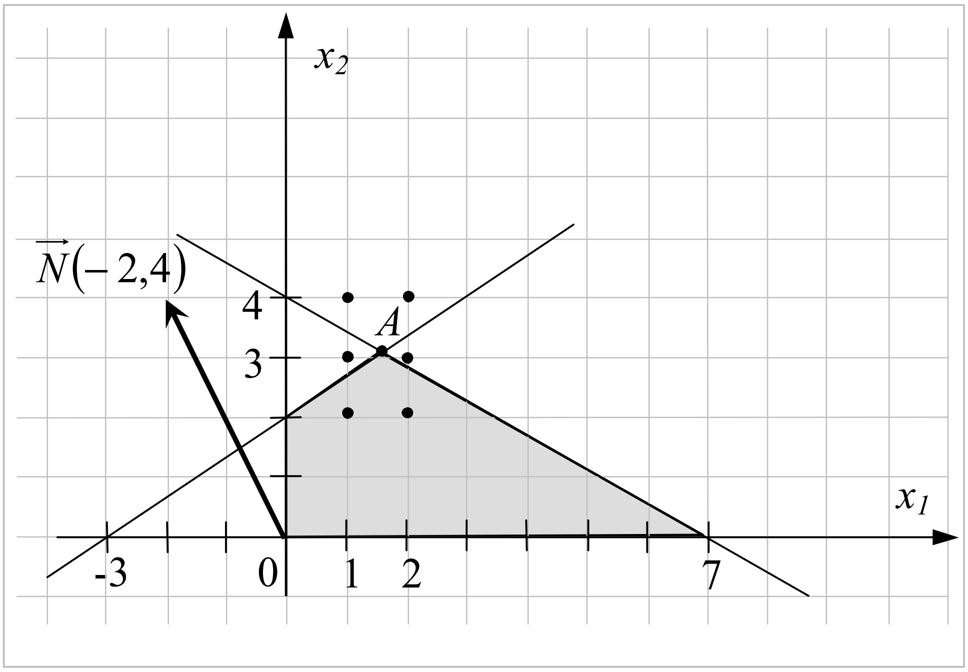


Рис. 2.10. Графічний розв'язок задачі (2.35)-(2.36)

2.8.2. Методи розв'язання задач цілочислового програмування

Методи розв'язання таких задач можна поділити на два типи: методи відсікання та комбінаторні методи.

Метод відсікань базується на процедурі введення додаткових обмежень з урахуванням вимоги цілочисловості, завдяки яким багатогранник розв'язків поступово змінюється до тих пір, поки координати оптимального плану не стануть цілочисловими. Тобто нові додаткові обмеження відсікають області багатогранника, які не містять цілих точок. Вперше правило складання додаткових обмежень для повністю цілочислових задач, а потім і для частково-цілочислових було запропоновано американським вченим Р. Гоморі в 1958 році.

Комбінаторні методи базуються на переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків і порівнянні отриманих результатів. Зручною для використання така процедура буде тільки тоді, коли існує можливість скоротити перебір додатковими міркуваннями. Найбільш розповсюдженим комбінаторним методом є метод гілок і меж, ідею якого вперше запропонували в 1960 році А. Ленд і А. Дойг.

2.8.2.1. Метод відсікань Гоморі

Ідея методу Гоморі ґрунтується на тому, що початкова ЗЦЛП спочатку розглядається без умови цілочисловості. Якщо отриманий оптимальний розв'язок такої задачі виявляється цілочисловим, то він співпадає з розв'язком початкової задачі і обчислення закінчують. Якщо ж отриманий план містить принаймні одну дробову компоненту, то за спеціальним алгоритмом будують додаткове лінійне обмеження з такими властивостями:

1. Це обмеження відсікає отриманий оптимальний план з дробовими компонентами.
2. Це обмеження не відсікає жодного цілочислового оптимального розв'язку.

Додаткове лінійне обмеження, яке задовольняє ці властивості, називають *правильним відсіканням*.

При правильній побудові відсікань після скінченного числа кроків отримують задачу лінійного програмування, оптимальний план якої є цілочисловим і співпадає з розв'язком початкової ЗЦЛП.

Геометрично додавання лінійного обмеження означає відсікання області багатогранника розв'язків, що містить знайдений оптимальний план, який не є цілочисловим, не зачіпаючи при цьому жодної з цілочислових точок цього багатогранника.

Алгоритм методу Гоморі

1. Розв'язуємо ЗЛП (2.30)-(2.31) симплекс-методом без урахування умови цілочисловості (2.32).
2. Якщо ЗЛП не має розв'язку, то і ЗЦЛП теж не має розв'язку. Якщо отриманий оптимальний розв'язок є цілочисловим, то початкова ЗЦЛП розв'язана.
3. Якщо серед компонент оптимального плану є дробові компоненти, які за умовою початкової задачі повинні бути цілочисловими, то до обмежень задачі додають правильне відсікання і повертаються до кроку 1.

Процес приєднання додаткових обмежень продовжується доти, доки або не буде отримано цілочисловий план або доведено, що задача не має цілочислового розв'язку.

Зауваження:

1. Нерівності з раціональними коефіцієнтами перед введенням балансуючих змінних потрібно помножити на спільний знаменник раціональних коефіцієнтів.

2. Нерівності, які мають ірраціональні коефіцієнти, приводять до частково-цілочислових задач, бо в цьому випадку неможливо вимагати цілочисловості для балансуючих змінних.

Різниця між розв'язанням повністю цілочислових і частково-цілочислових задач полягає в побудові відсікань.

Побудова відсікань

1. Повністю цілочислові задачі лінійного програмування

Введемо такі позначення:

$[w]$ - *ціла частина* числа w, тобто найбільше ціле число, що **не перебільшує** w;

$\{w\}$ - *дробова* частина w, $0 \le \{w\} < 1$, тобто $\{w\} = w - [w]$.

Наприклад, для $w = \dfrac{21}{13}$ маємо $[w] = \left[\dfrac{21}{13}\right] = \left[1\dfrac{8}{13}\right] = 1$, $\{w\} = \left\{\dfrac{21}{13}\right\} = \dfrac{21}{13} - \left[\dfrac{21}{13}\right] = \dfrac{21}{13} - 1 = \dfrac{8}{13}$, тобто $w = \dfrac{21}{13} = [w] + \{w\} = 1 + \dfrac{8}{13}$.

Якщо $w = -\dfrac{21}{13}$, то $[w] = \left[-\dfrac{21}{13}\right] = -2$, $\{w\} = \left\{-\dfrac{21}{13}\right\} = -\dfrac{21}{13} - \left[-\dfrac{21}{13}\right] =$ $= \dfrac{21}{13} - (-2) = \dfrac{5}{13}$, $w = -\dfrac{21}{13} = [w] + \{w\} = -2 + \dfrac{5}{13}$.

Припустимо, що внаслідок розв'язання ЗЛП отримана оптимальна таблиця, яка має m рядків і n стовпців. Нехай базисній змінній x_i, $i = \overline{1,m}$ відповідає рядок з дробовим вільним членом b_i (табл. 2.47).

Тоді до таблиці приписують ще один рядок, який відповідає умові

$$\{b_i\} - \{a_{i,m+1}\} x_{m+1} - \{a_{i,m+2}\} x_{m+2} - \ldots - \{a_{in}\} x_n \le 0. \qquad (2.37)$$

Таблиця 2.47

Оптимальна таблиця ЗЛП без вимоги цілочисловості

		Вільна змінна				Вільний член
		$-x_{m+1}$	$-x_{m+2}$	…	$-x_n$	1
Базисна змінна	x_1	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	…	a_{1n}	b_1
	x_2	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	…	a_{2n}	b_2
	…	…	…	…	…	…
	x_i	$a_{i,m+1}$	$a_{i,m+2}$	…	a_{in}	b_i
	…	…	…	…	…	…
	x_m	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	…	a_{mn}	b_m
Цільова функція	f	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	c

Нерівність (2.37) задає правильне відсікання. Шляхом введення балансуючої невід'ємної змінної s_1 нерівність (2.37) перетворюють в рівність:

$$\{b_i\} - \{a_{i,m+1}\}x_{m+1} - \{a_{i,m+2}\}x_{m+2} - \ldots - \{a_{in}\}x_n + s_1 = 0.$$

Виражають нову змінну

$$s_1 = -\{b_i\} + \{a_{i,m+1}\}x_{m+1} + \{a_{i,m+2}\}x_{m+2} + \ldots + \{a_{in}\}x_n$$

і заносять дані табл. 2.48.

Таблиця 2.48

Правильне відсікання

		Вільна змінна				Вільний член
		$-x_{m+1}$	$-x_{m+2}$	…	$-x_n$	1
Базисна змінна	x_1	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	…	a_{1n}	b_1
	x_2	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	…	a_{2n}	b_2
	…	…	…	…	…	…
	x_i	$a_{i,m+1}$	$a_{i,m+2}$	…	a_{in}	b_i
	…	…	…	…	…	…
	x_m	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	…	a_{mn}	b_m
	s_1	$-\{a_{i,m+1}\}$	$-\{a_{i,m+2}\}$	…	$-\{a_{in}\}$	$-\{b_i\}$
Цільова функція	f	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	c

Зауваження:

1. Якщо в оптимальному плані є декілька дробових вільних членів, то зазвичай обирають той, який має максимальну дробову частину.
2. Для побудови відсікання доцільно одразу залишати в таблиці порожній рядок.
3. Якщо в процесі обчислень буде отримана оптимальна таблиця, яка містить додатну додаткову змінну s_i, то відповідний рядок може бути викреслений. Це надасть можливість перешкодити надмірному збільшенню змінних.

Розв'яжемо ЗЦЛП (2.33)-(2.34) методом відсікань Гоморі.

Розв'язання. Нагадаємо, що для розв'язання повністю цілочислових задач лінійного програмування коефіцієнти системи обмежень повинні бути цілими. Друга нерівність у системі обмежень (2.34) містить раціональний коефіцієнт. Помноживши цю нерівність на «2», отримаємо нерівність з цілими коефіцієнтами:

$$f = -2x_1 + 4x_2 \to \max\,, \tag{2.37}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 28, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases} \tag{2.38}$$

Етап 1. Після розв'язання задачі (2.37)-(2.38) симплекс-методом без урахування вимоги цілочисловості, отримуємо оптимальну табл. 2.49.

Таблиця 2.49

Оптимальна таблиця без вимоги цілочисловості

		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_3$	$-x_4$	*1*
Базисна змінна	x_1	3/26	-7/26	21/13
	x_2	1/13	2/13	40/13
Цільова функція	f	1/13	15/13	118/13

Отриманий оптимальний план $X^0 = \left(\frac{21}{13}, \frac{40}{13}, 0, 0\right)$ не задовольняє умову цілочисловості.

Етап 2. Будуємо правильне відсікання. Знайдемо максимальну дробову частину: $\max\left\{\left\{\frac{21}{13}\right\}, \left\{\frac{40}{13}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{8}{13}, \frac{1}{13}\right\} = \frac{8}{13}$. Для побудови відсікання використовуємо перший рядок (табл. 2.49):

$$\left\{\frac{21}{13}\right\} - \left\{\frac{3}{26}\right\} x_3 - \left\{-\frac{7}{26}\right\} x_4 \le 0,\ \frac{8}{13} - \frac{3}{26} x_3 - \frac{19}{26} x_4 \le 0.$$

Вводимо додаткову змінну $s_1 \ge 0$:

$$-\frac{3}{26} x_3 - \frac{19}{26} x_4 + s_1 = -\frac{8}{13}. \tag{2.39}$$

Запишемо коефіцієнти отриманого рівняння в табл. 2.50.

Таблиця 2.50

Перше відсікання

		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		-x_3	*-x_4*	*1*	
Базисна змінна	x_1	3/26	-7/26	21/13	(21/13)/(3/26)
	x_2	1/13	2/13	40/13	(40/13)/(1/13)
	s_1	-3/26	-19/26	-8/13	(-8/13)/(-3/26)
Цільова функція	f	1/13	15/13	118/13	$\min\left\{14{,}40; \frac{16}{3}\right\} = \frac{16}{3}$

Отриманий план $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, s_1) = \left(\frac{21}{13}, \frac{40}{13}, 0, 0, -\frac{8}{13}\right)$ не є опорним. Знаходимо опорний план, обравши провідними третій рядок і перший стовпець (табл. 2.51).

Таблиця 2.51

Ітерація 1

Після обміну $x_3 \leftrightarrow s_1$		Вільна змінна		Вільний член
		$-s_1$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1	1	-1	1
	x_2	2/3	-1/3	8/3
	x_3	-26/3	19/3	16/3
Цільова функція	f	2/3	2/3	26/3

Критерій оптимальності виконаний, але серед компонент плану є нецілі компоненти $x_2 = \frac{8}{3}$, $x_3 = \frac{16}{3}$. Тому складемо ще одне обмеження для $b_2 = \frac{8}{3}$, яке має найбільшу дробову частину $\{b_2\} = b_2 - [b_2] = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$:

$$\left\{\frac{8}{3}\right\} - \left\{-\frac{1}{3}\right\} x_4 - \left\{\frac{2}{3}\right\} s_1 \le 0\,,\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} x_4 - \frac{2}{3} s_1 \le 0\,.$$

Перетворюємо нерівність у рівність, ввівши ще одну додаткову змінну $s_2 \ge 0$:

$$-\frac{2}{3} x_4 - \frac{2}{3} s_1 + s_2 = -\frac{2}{3}, \tag{2.40}$$

і дописуємо до табл. 2.51 ще один рядок (табл. 2.52).

Таблиця 2.52

Друге відсікання

Після обміну $x_3 \leftrightarrow s_1$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-s_1$	$-x_4$	1	
Базисна змінна	x_1	1	-1	1	1/1
	x_2	2/3	-1/3	8/3	(8/3)/(2/3)
	x_3	-26/3	19/3	16/3	—
	s_2	-2/3	-2/3	-2/3	(-2/3)/(-2/3)
Цільова функція	f	2/3	2/3	26/3	$\min\{1;4;1\} = 1$

Після кроку жорданових перетворень одержимо табл. 2.53.

Таблиця 2.53

Ітерація 2

Після обміну $s_2 \leftrightarrow s_1$		Вільна змінна		Вільний член
		$-s_2$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1	3/2	-2	0
	x_2	1	-1	2
	x_3	13	-15	14
	s_1	-3/2	1	1
Цільова функція	f	1	0	8

Отриманий оптимальний план $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2) = (0,2,14,0,1,0)$ є цілочисловим, тобто задача розв'язана.

Відповідь: $X^* = (x_1, x_2) = (0,2)$, $f^* = \max f = f(X^*) = 8$.

Зауважимо, що в разі необхідності подальших розрахунків рядок, який відповідає змінній s_1, можна було б викреслити (табл. 2.54).

Таблиця 2.54

Оптимальна таблиця після викреслення s_1

Після обміну $s_2 \leftrightarrow s_1$		Вільна змінна		Вільний член
		$-s_2$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1	3/2	-2	0
	x_2	1	-1	2
	x_3	14	-15	14
Цільова функція	f	1	0	8

Нульова оцінка в цільовому рядку говорить про те, що існує ще розв'язки, але з урахуванням того, що базисну змінну s_1 викреслили з подальших розрахунків (табл. 2.54), видно, що інших цілих розв'язків немає.

Пояснимо зміст додаткових обмежень графічно. Для розв'язання симплекс-методом були введені додаткові змінні $x_3, x_4 \geq 0$ для зведення системи обмежень (2.38) до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 28, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6. \end{cases}$$

Виражаючи балансуючи змінні, отримаємо:

$$\begin{cases} x_3 = 28 - 4x_1 - 7x_2, \\ x_4 = 6 + 2x_1 - 3x_2. \end{cases} \tag{2.41}$$

Розглянемо перше відсікання (2.39) і підставимо туди вирази (2.41):

$$-\frac{3}{26}x_3 - \frac{19}{26}x_4 + s_1 = -\frac{8}{13},$$

$$-\frac{3}{26}(28 - 4x_1 - 7x_2) - \frac{19}{26}(6 + 2x_1 - 3x_2) + s_1 = -\frac{8}{13},$$

$$-x_1 + 3x_2 + s_1 = 7 \Rightarrow \ s_1 = 7 + x_1 - 3x_2 \geq 0 .$$

Тобто ми вводимо додаткове обмеження $7 + x_1 - 3x_2 \geq 0$.

Як бачимо, додаткове обмеження відсікає від ОДР частину, яка не містить жодної цілочислової точки (рис. 2.11). Останнє додаткове обмеження (2.40)

$$-\frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}s_1 + s_2 = -\frac{2}{3}, \qquad -\frac{2}{3}(6 + 2x_1 - 3x_2) - \frac{2}{3}(7 + x_1 - 3x_2) + s_2 = -\frac{2}{3},$$

$$s_2 = 8 + 2x_1 - 4x_2 \geq 0$$

деформує багатокутник розв'язків так, як нарис. 2.12.

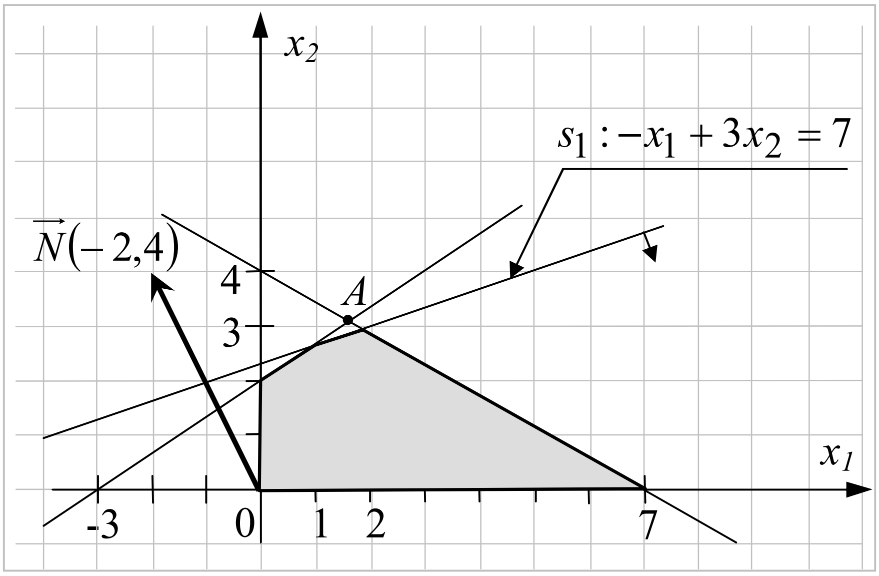


Рис. 2.11. Правильне відсікання s_1

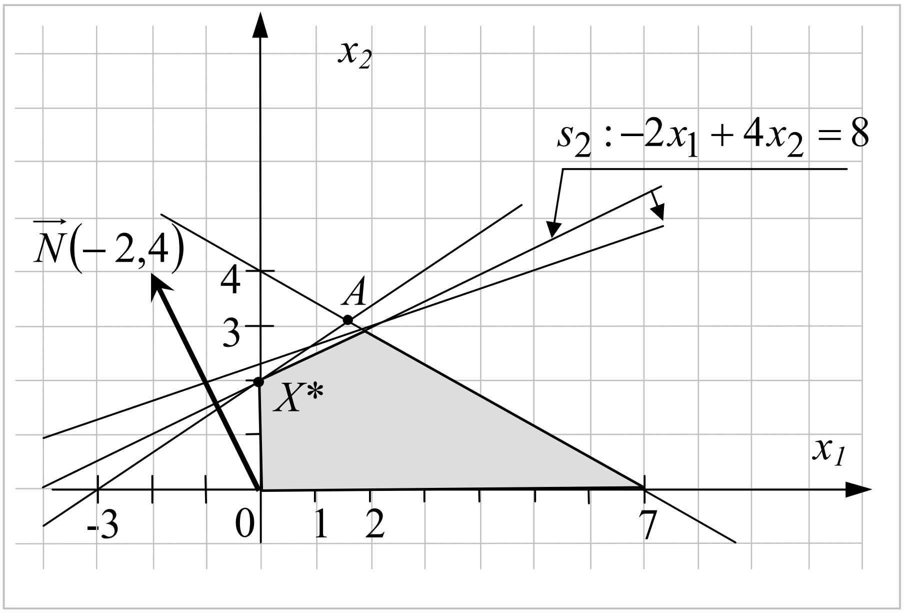


Рис. 2.12. Правильне відсікання s_2

2. Частково-цілочислові задачі лінійного програмування

Алгоритм розв'язання таких задач відрізняється від описаного вище для повністю цілочислових задач лише *правилом побудови додаткових обмежень*. Припустимо, що внаслідок розв'язання ЗЦЛП без умови цілочисловості було отримано оптимальний план (табл. 2.47), компонента x_i якого не є цілою. Тоді до таблиці потрібно дописати ще один рядок, який відповідає обмеженню

$$\{b_i\} - \gamma_{i,m+1}x_{m+1} - \gamma_{i,m+2}x_{m+2} - \ldots - \gamma_{i,m+2}x_n \le 0. \qquad (2.42)$$

Коефіцієнти $\gamma_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{m+1,n}$ знаходять ***за таким правилом:***

а) якщо змінні $x_j, j=\overline{m+1,n_1}$ мають приймати лише цілі значення, то

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}\{a_{ij}\}, \text{ якщо } \{a_{ij}\}\le\{b_i\},\\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}\left(1-\{a_{ij}\}\right), \text{ якщо } \{a_{ij}\}>\{b_i\};\end{cases} \qquad (2.43)$$

б) якщо на змінні $x_j, j=\overline{n_1+1,n}$ не накладено умову цілочисловості, то

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, \text{ якщо } a_{ij}\ge 0,\\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}\left|a_{ij}\right|, \text{ якщо } a_{ij}>0.\end{cases} \qquad (2.44)$$

Приклад 21. Розв’язати задачу частково цілочислового програмування:

$$f=-3x_1-4x_2\to\min,$$
$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=7,\\ 3x_1-2x_2+x_4=8,\\ x_j\ge 0, j=\overline{1,4},\\ x_2,x_4 - \text{цілочислові}.\end{cases}$$

Розв’язання. Обираючи базисними змінні x_3, x_4, складемо початкову таблицю (табл. 2.55).

Таблиця 2.55

Симплексна таблиця

Приклад 21		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_2$	1	
Базисна змінна	x_3	1	3	7	7/3
	x_4	3	-2	8	—
Цільова функція	f	3	4	0	$\min\{7/3\}=7/3$

Початковий опорний план $X = (0,0,7,8)$ не задовольняє умову оптимальності. Розв'язуємо задачу симплекс-методом.

Крок 1. Після обміну $x_3 \leftrightarrow x_2$ отримуємо табл. 2.56.

Таблиця 2.56

Ітерація 1

Після обміну $x_3 \leftrightarrow x_2$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_1$	$-x_3$	1	
Базисна змінна	x_2	1/3	1/3	7/3	(7/3)/(1/3)
	x_4	11/3	2/3	38/3	(38/3)/(11/3)
Цільова функція	f	5/3	-4/3	28/3	$\min\left\{7, \frac{38}{11}\right\} = \frac{38}{11}$

Крок 2. Після обміну $x_4 \leftrightarrow x_1$ отримуємо табл. 2.57.

Таблиця 2.57

Ітерація 2

Після обміну $x_4 \leftrightarrow x_1$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_4$	$-x_3$	1
Базисна змінна	x_2	-1/11	3/11	13/11
	x_1	3/11	2/11	38/11
	s_1	-2/99	-3/11	-2/11
Цільова функція	f	-5/11	-18/11	-166/11

Залишимо в табл. 2.57 пустий рядок, куди потім впишемо коефіцієнти відсікання. За результатами, які наведені в табл. 2.57, видно, що отриманий оптимальний план $X^* = \left(\frac{13}{11}, \frac{38}{11}, 0, 0\right)$ містить дві дробові компоненти, зокрема x_2, яка за умовою задачі повинна бути цілочисловою.

Складемо додаткове обмеження (2.42) по першому рядку, який відповідає x_2:

$$\{b_2\} - \gamma_{2,4}\, x_4 - \gamma_{2,3}\, x_3 \le 0 .$$

Змінна x_4 повинна бути цілою. Враховуючи, що її дробова частина $\left\{-\frac{1}{11}\right\} = \frac{10}{11}$ перевищує дробову частину вільного члена першого рядка $\left\{\frac{13}{11}\right\} = \frac{2}{11}$, згідно з виразом (2.43) одержимо $\gamma_{2,4} = \frac{\frac{2}{11}}{1-\frac{2}{11}}\left(1-\frac{10}{11}\right) = \frac{2}{99}$. На змінну x_3 не накладено вимогу цілочисловості, тому за виразом (2.44) $\gamma_{2,3} = \frac{3}{11}$.

Отже правильне відсікання набуде вигляду

$$\frac{2}{11} - \frac{2}{99}x_4 - \frac{3}{11}x_3 \le 0 .$$

Перетворюючи отриманий вираз у рівність за допомогою балансуючої змінної $s_1 \ge 0$, запишемо коефіцієнти обмеження в табл. 2.57. Після кроку жорданових перетворень отримуємо оптимальний план початкової задачі (табл. 2.58).

Таблиця 2.58

Оптимальна таблиця

Після обміну $x_3 \leftrightarrow s_1$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_4$	$-s_1$	1
Базисна змінна	x_2	1/9	1	1
	x_1	7/27	2/3	10/3
	x_3	-2/27	-11/3	2/3
Цільова функція	f	-1/3	-6	-14

Відповідь: $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{10}{3}, 1, \frac{2}{3}, 0\right)$,

$$f^* = \max f = f(X^*) = -14 .$$

2.8.2.2. Метод гілок і меж

Метод гілок і меж безпосередньо застосовується як до повністю цілочислових задач, так і до частково-цілочислових, чим відрізняється від методу відсікань. Для цього методу необхідні дві процедури: розгалуження і знаходження оцінок (меж).

Аналогічно до методу відсікань процес починається з розв'язання задачі (2.30)-(2.31) без урахування вимоги цілочисловості (2.32). Будемо вважати, що задача (2.30)-(2.31) має оптимальний розв'язок $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Нехай $x_k^0 \geq 0,\ k = \overline{1,n}$ - цілочислова змінна за умовами задачі, яка в отриманому оптимальному плані X^0 є дробовою. Тоді інтервал $\left[x_k^0\right] < x_k < \left[x_k^0\right] + 1$ не містить допустимих цілочислових компонент плану. Тому допустиме ціле значення x_k повинно задовольняти строго одну з нерівностей:

$$x_k \leq \left[x_k^0\right] \quad \text{або} \quad x_k \geq \left[x_k^0\right] + 1. \tag{2.45}$$

Завдяки введенню додаткових нерівностей (2.44) до задачі (2.30)-(2.31) ми отримуємо дві задачі, які не пов'язані між собою. У цьому випадку кажуть, що задача розгалужується на дві подзадачі:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + c_0 \rightarrow extr, \tag{2.46}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{1, k_1}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{k_1 + 1, k_2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{k_2 + 1, m}; \\ x_k \leq \left[x_k^0\right]; \end{cases} \tag{2.47}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n};$$

і

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_0 \to extr, \qquad (2.48)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1, k_1}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{k_1 + 1, k_2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{k_2 + 1, m}; \\ x_k \ge \left[x_k^0\right] + 1; \end{cases} \qquad (2.49)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Кожна з задач (2.46)-(2.47) і (2.48)-(2.49) розв’язується як задача лінійного програмування. Якщо отриманий допустимий план задовольняє умову цілочисловості, то такий розв’язок слід зафіксувати як “найкращий” і подальше розгалуження цієї підзадачі вже не має сенсу. Інакше підзадача знов розбивається на дві підзадачі. Як тільки отриманий цілочисловий допустимий розв’язок однієї з нових підзадач виявляється кращим за попередні, він фіксується замість зафіксованого раніше. Процес розгалуження припиняється в одному з випадків:

1. Обрана множина допустимих планів виявилася порожньою;
2. Оптимальне значення цільової функції на вибраній множині не перевищує (для задачі максимізації) або не є меншою (для задачі мінімізації) від “найкращого” значення цієї функції, яке вже отримано з інших підзадач.
3. На вибраній множині знайдено оптимальний цілочисловий розв’язок відповідної підзадачі.

Скоротити час розрахунків можна ввівши в розгляд поняття *межі*, яке надасть можливість зробити висновки про доцільність подальшого розгалуження кожної підзадачі: *якщо оптимальний план підзадачі без вимоги цілочисловості забезпечує “гірше ” значення цільової функції порівняно з вже отриманим, цю підзадачу далі розглядати не слід*.

Алгоритм методу гілок і меж:

1. Розв'язують ЗЛП симплекс-методом без урахування умови цілочисловості.
2. Якщо ЗЛП не має розв'язку, то і ЗЦЛП теж не має розв'язку. Якщо отриманий оптимальний розв'язок є цілочисловим, то початкова ЗЦЛП розв'язана.
3. Якщо серед компонент оптимального плану є дробові компоненти, які за умовою початкової задачі повинні бути цілочисловими, то записують дві нові підзадачі (2.46)-(2.47) і (2.48)-(2.49).
4. Кожну з отриманих задач розв'язують симплекс-методом і повертаються до кроку 2.

Відповідь на питання про найкращий спосіб вибору змінної галуження або послідовності розв'язання конкретних підзадач на сьогодні не знайдено.
Цей метод можна подати у вигляді схеми на рис. 2.13.

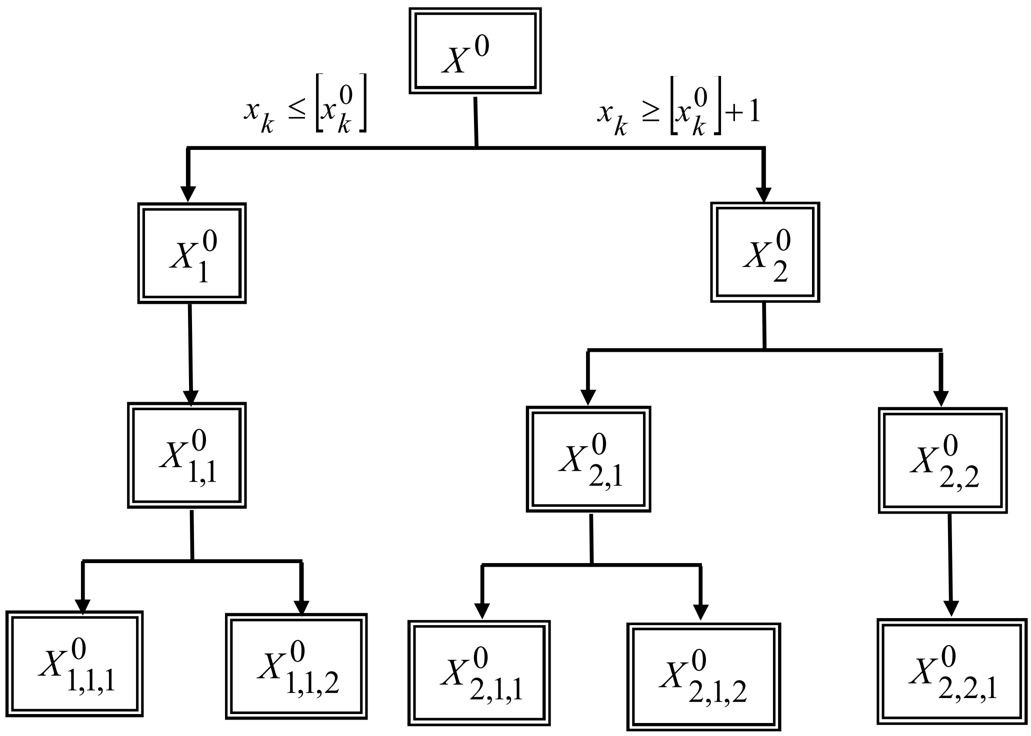


Рис. 2.13. Метод гілок і меж

На рис. 2.13 вершина X^0 відповідає оптимальному плану X^0 задачі лінійного програмування без урахування вимоги цілочисловості (2.30)-(2.31).

Розв'яжемо приклад 20 методом гілок і меж:

$$f = -2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 28, \\ -x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 \le 3, \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$$

Розв'язання. *Етап 1*. Оптимальний план задачі (2.37)-(2.38) без урахування умови цілочисловості $X^0 = \left(\frac{21}{13}, \frac{40}{13}, 0, 0\right)$ (див. табл. 2.49), тобто змінні x_1, x_2 не задовольняють умову цілочисловості.

Етап 2. Виберемо одну з нецілих компонент плану, наприклад $x_1 = \frac{21}{13} = 1\frac{8}{13}$. Розгалуження процесу пошуку цілочислового розв'язку визначається умовами $x_1 \le 1$ і $x_1 \ge 2$, тобто отримаємо дві підзадачі X_1^0, X_2^0.

1. Підзадача X_1^0. Це початкова задача з додатковою умовою $x_1 \le 1$. З табл. 2.49 випливає, що $x_1 = \frac{21}{13} + \frac{3}{26}(-x_3) - \frac{7}{26}(-x_4)$.

Враховуючи обмеження $x_1 \le 1$, отримуємо $\frac{21}{13} - \frac{3}{26}x_3 + \frac{7}{26}x_4 \le 1$, тобто $-\frac{3}{26}x_3 + \frac{7}{26}x_4 \le -\frac{8}{13}$. Переходимо до рівняння $-\frac{3}{26}x_3 + \frac{7}{26}x_4 + x_5 = -\frac{8}{13}$ за допомогою балансуючої змінної $x_5 \ge 0$ і записуємо нову симплексну таблицю, дописавши до табл. 2.58 додатковий рядок (табл. 2.59).

Таблиця 2.59

Підзадача X_1^0

X_1^0 Обмеження $x_1 \le 1$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_3$	$-x_4$	1	
Базисна змінна	x_1	3/26	-7/26	21/13	(21/13)/(3/26)
	x_2	1/13	2/13	40/13	(40/13)/(1/13)
	x_5	-3/26	7/26	-8/13	(-8/13)/(-3/26)
Цільова функція	f	1/13	15/13	118/13	$\min\left\{14{,}40;\frac{16}{3}\right\}=\frac{16}{3}$

Після кроку жорданових перетворень, отримаємо нову табл. 2.60.

Таблиця 2.60

Ітерація 1

Після обміну $x_3 \leftrightarrow x_5$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_5$	$-x_4$	1
Базисна змінна	x_1	1	0	1
	x_2	2/3	1/3	8/3
	x_3	-26/3	-7/3	16/3
Цільова функція	f	2/3	4/3	26/3

В отриманому плані є дві дробові компоненти $x_2=\frac{8}{3}, x_3=\frac{16}{3}$. Далі розгалужування будемо виконувати по змінній x_2.

2. Підзадача $X_{1,1}^0$. Це задача X_1^0 з додатковим обмеженням $x_2 \le 2$ $\left(\left[\frac{8}{3}\right]=2\right)$. Виписуємо з табл. 2.60 вираз для x_2:

$$x_2=\frac{8}{3}+\frac{2}{3}(-x_5)+\frac{1}{3}(-x_4)\le 2, \quad \frac{8}{3}-\frac{2}{3}x_5-\frac{1}{3}x_4 \le 2,$$

$$-\frac{2}{3}x_5-\frac{1}{3}x_4+x_6=-\frac{2}{3},$$

де $x_6 \ge 0$ - додаткова змінна.

Записуємо табл. 2.61.

Таблиця 2.61

Підзадача $X_{1,1}^{0}$

$X_{1,1}^{0}$ Обмеження $x_1 \le 1,\ x_2 \le 2$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_5$	$-x_4$	*1*	
Базисна змінна	x_1	1	0	1	1/1
	x_2	2/3	1/3	8/3	(8/3)/(2/3)
	x_3	-26/3	-7/3	16/3	–
	x_6	-2/3	-1/3	-2/3	(-2/3)/(-2/3)
Цільова функція	f	2/3	4/3	26/3	$\min\{1,4;1\}=1$

Після обміну $x_5 \leftrightarrow x_6$ маємо:

Таблиця 2.62

Ітерація 1

Після обміну $x_5 \leftrightarrow x_6$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_6$	$-x_4$	*1*
Базисна змінна	x_1	3/2	-1/2	0
	x_2	1	0	2
	x_3	13	2	14
	x_5	-3/2	1/2	1
Цільова функція	f	1	1	8

Розв'язком цієї задачі є $X_{1,1}^{*}=(0,2,14,1),\ f\left(X_{1,1}^{*}\right)=8$.

3. Підзадача $X_{1,2}^{0}$. Це задача X_{1}^{0} з обмеженням $x_2 \ge 3$, тобто додаткове обмеження має вигляд

$$\frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \le -\frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 + x_6 = -\frac{1}{3},\ x_6 \ge 0.$$

Нова симплексна таблиця має вигляд (табл. 2.63).

Таблиця 2.63

Підзадача $X_{1,2}^0$

$X_{1,2}^0$ Обмеження $x_1 \le 1,\ x_2 \ge 3$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_5$	$-x_3$	*1*
Базисна змінна	x_1	1	0	1
	x_2	2/3	1/3	8/3
	x_4	-26/3	-7/3	16/3
	x_6	2/3	1/3	-1/3
Цільова функція	f	2/3	4/3	26/3

ОДР цієї задачі порожня, бо в рядку з від’ємним вільним членом немає від’ємних елементів, тобто розв’язків немає.

4. Підзадача X_2^0. Це початкова задача з додатковою умовою $x_1 \ge 2$. Для змінної x_1 з табл. 2.49:

$$x_1 = \frac{21}{13} + \frac{3}{26}(-x_3) - \frac{7}{26}(-x_4) \ge 2.$$

Тоді

$$-\frac{3}{26}x_3 + \frac{7}{26}x_4 \ge 2 - \frac{21}{13}, \qquad -\frac{3}{26}x_3 + \frac{7}{26}x_4 \ge \frac{5}{13},$$
$$\frac{3}{26}x_3 - \frac{7}{26}x_4 \le -\frac{5}{13}.$$

Остаточно маємо

$$\frac{3}{26}x_3 - \frac{7}{26}x_4 + x_5 = -\frac{5}{13},\ x_5 \ge 0.$$

Таблиця 2.64

Підзадача X_2^0

X_2^0 Обмеження $x_1 \geq 2$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_3$	$-x_4$	1	
Базисна змінна	x_1	3/26	-7/26	21/13	–
	x_2	1/13	2/13	40/13	(40/13)/(2/13)
	x_5	3/26	-7/26	-5/13	(-5/13)/(-7/26)
Цільова функція	f	1/13	15/13	118/13	$\min\left\{20, \frac{10}{7}\right\} = \frac{10}{7}$

Після перерахунку табл. 2.64 отримуємо табл 2.65.

Таблиця 2.65

Ітерація 1

Після обміну $x_5 \leftrightarrow x_4$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_3$	$-x_5$	1
Базисна змінна	x_1	0	-1	2
	x_2	1/7	4/7	20/7
	x_4	-3/7	-26/7	10/7
Цільова функція	f	4/7	30/7	52/7

Отже, $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{20}{7}$. Далі розгалуження здійснюємо за змінною x_2, бо змінна x_1 - цілочислова.

5. *Підзадача* $X_{2,1}^0$. Це задача X_2^0 з обмеженням $x_2 \leq 2$ $\left(\left[\frac{20}{7}\right] = 2\right)$.

Оскільки, за табл. 2.81

$$x_2 = \frac{20}{7} + \frac{1}{7}(-x_3) + \frac{4}{7}(-x_5),$$

то остаточно додаткове обмеження для цієї задачі набуде вигляду $-\frac{1}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_5 + x_6 = -\frac{6}{7}$, $x_6 \ge 0$. Тоді отримуємо табл. 2. 66.

Таблиця 2.66

Підзадача $X_{2,1}^0$

$X_{2,1}^0$ Обмеження $x_1 \ge 2$, $x_2 \le 2$		Вільна змінна		Вільний член	Симплексні відношення
		$-x_3$	$-x_5$	1	
Базисна змінна	x_1	0	-1	2	—
	x_2	1/7	4/7	20/7	(20/7)/(1/7)
	x_4	-3/7	-26/7	10/7	—
	x_6	-1/7	-4/7	-6/7	(-6/7)/(-1/7)
Цільова функція	f	4/7	30/7	52/7	$\min\{20,6\} = 6$

Перераховуючи табл. 2.66, отримаємо табл.2.67.

Таблиця 2.67

Ітерація 1

Після обміну $x_6 \leftrightarrow x_3$		Вільна змінна		Вільний член
		$-s_2$	$-s_1$	1
Базисна змінна	x_1	0	-1	2
	x_2	1	0	2
	x_4	-3	-2	4
	x_3	-7	4	6
Цільова функція	f	4	2	4

Отже, оптимальний план задачі $X_{2,1}^0$: $X_{2,1}^* = (2,2,6,4,0,0)$, $f\left(X_{2,1}^*\right) = 4$, але значення цільової функції гірше, ніж в $X_{1,1}^0$.

6. Підзадача $X_{2,2}^0$. Це задача X_2^0 з обмеженням $x_2 \ge 3$. Записуємо нову симплексну таблицю (табл. 2.68), додаючи до табл. 2.65, нове обмеження $\frac{1}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_5 + x_6 = -\frac{1}{7}$, $x_6 \ge 0$.

Таблиця 2.68

Підзадача $X_{2,2}^0$

$X_{2,2}^0$ Обмеження $x_1 \ge 2$, $x_2 \ge 3$		Вільна змінна		Вільний член
		$-x_3$	$-x_5$	*1*
Базисна змінна	x_1	0	-1	2
	x_2	1/7	4/7	20/7
	x_4	-3/7	-26/7	10/7
	x_6	1/7	4/7	-1/7
Цільова функція	f	4/7	30/7	52/7

Задача $X_{2,2}^0$ немає розв'язків (у рядку, що відповідає базисній змінній x_6, немає від'ємних елементів).

Відповідь: $X^* = (x_1, x_2) = (0,2)$, $f^* = \max f = f(X^*) = 8$.

Дерево розв'язків прикладу 20 зображено на рис. 2.14.

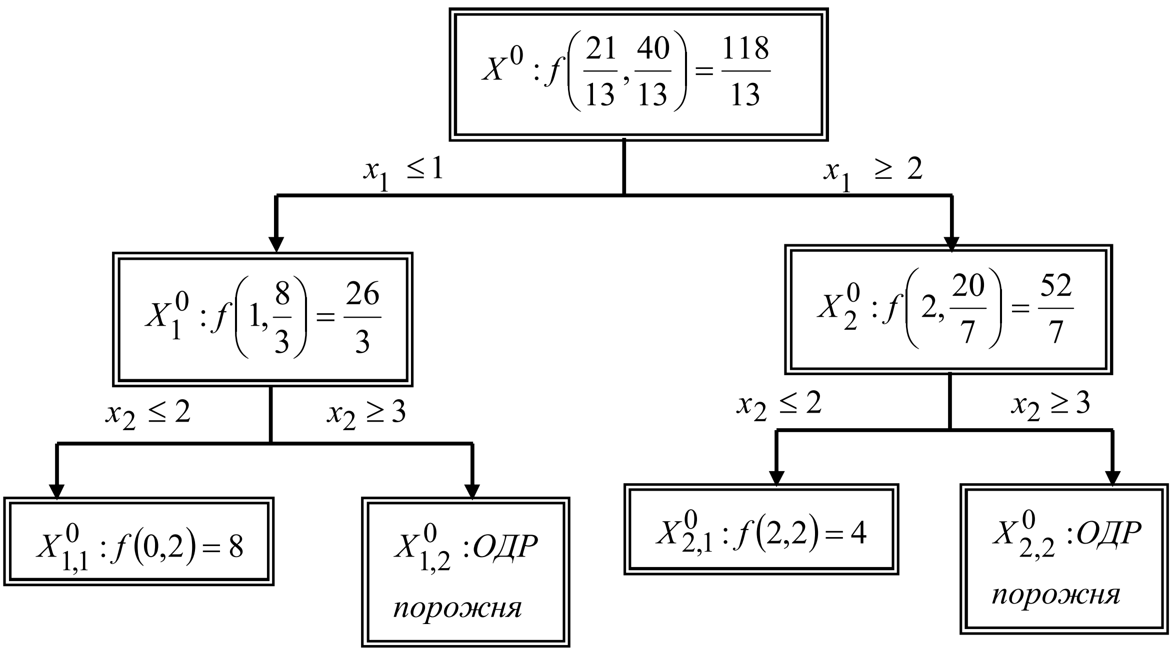


Рис. 2.14. Схема розв'язання прикладу 20

Питання до розділу

1. Математична модель задачі лінійного програмування.
2. Стандартна (симетрична) форма ЗЛП.
3. Канонічна форма ЗЛП.
4. Методика зведення Загальної ЗЛП до канонічної форми.
5. Скільки розв'язків може мати задача лінійного програмування?
6. Яким чином нерівності з системи обмежень можна замінити рівняннями?
7. Як задачу пошуку максимуму функції звести до задачі пошуку мінімуму?
8. Визначення опуклої множини.
9. Що характеризує вектор-градієнт?
10. Що називається багатокутником розв’язків?
11. Що називається опорним планом?
12. Що називається виродженим планом?
13. Як знайти початковий план?
14. Сформулювати алгоритм симплекс-метода.
15. Критерій оптимальності ЗЛП.
16. Що називається симплексними відношеннями?
17. Правила побудови двоїстої задачі.
18. Отримання оптимального розв’язку двоїстої ЗЛП за допомогою оптимальної симплекс-таблиці прямої задачі.
19. Сформулювати алгоритм двоїстого симплекс-методу.
20. Як за таблицею визначити, що ЗЛП має множину розв’язків?
21. Як за таблицею визначити, що цільова функція необмежена на ОДР?
22. Поняття зациклювання та правило його усунення.
23. Поняття М-задачі.
24. Алгоритм розв’язання ЗЛП методом штучного базису.
25. Необхідна умова оптимальності опорного плану при розв’язанні ЗЛП методом штучного базису.
26. Математична модель задачі цілочислового лінійного програмування.
27. У чому суть алгоритму методу відсікань (Гоморі)?
28. Що таке правильне відсікання?

29. Який геометричний зміст має правильне відсікання?

30. Правило побудови правильного відсікання для повністю цілочислових задач, частково-цілочислових задач.

31. Яка основна ідея методу гілок і меж?

32. Як здійснюється розгалуження при розв'язанні задач цілочислового програмування методом гілок і меж?

33. У яких випадках припиняється процес розгалуження?

Завдання

1. Звести до канонічного вигляду такі задачі:

$$1)\ f = -5x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$2)\ f = -10x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 21, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 2, \\ x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

2. Звести до симетричного вигляду такі задачі:

$$1)\ f = -x_1 - 4x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 21, \\ -2x_1 + 5x_2 - x_4 = 10, \\ x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0; \end{cases}$$

$$2)\ f = 15x_1 - 4x_2 - 3x_5 \to \min,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 20, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_4 = 15, \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_5 = 17, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

3. Розв'язати геометричним методом задачу лінійного програмування:

$$1)\ f = -x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$2)\ f = -2x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: $1)\ X^* = \left(\frac{4}{5}, 4\right),\ \max f = \frac{36}{5};$

$2)\ X^* = \left(3, \frac{3}{4}\right),\ \min f = -\frac{27}{4}.$

4. Симплексним методом розв'язати задачі:

$$1)\ f = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$2)\ f = -5x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

3) $f = 3x_1 - 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_2 \le 4, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

4) $f = -3x_1 - 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}; \end{cases}$$

5) $f = -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

6) $f = -2x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_3 \ge 1, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}; \end{cases}$$

7) $f = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 \le -1, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}; \end{cases}$$

8) $f = 3x_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 \le 2, \\ 5x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

9) $f = 5 - x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

10) $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 3, \\ 5x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь:

1) $X^* = (5,6)$, $\max f = 21$;

2) $X^* = (4,2)$, $\min f = -22$;

3) $X^* = \left(\frac{24}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)$, $\max f = \frac{52}{7}$;

4) $X^* = (8,2,7,0)$, $\min f = -28$;

5) $X^* = (12,7,0)$, $\min f = 16$;

6) $X^* = \alpha(3,0,2,0) + (1-\alpha)(0,0,5,6) = (3\alpha, 0, 5 - 3\alpha, 6 - 6\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, $\min f = -4$;

7) задача не має розв'язку (функція необмежена на ОДР);

8) $X^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $\max f = -\frac{3}{5}$;

9) $X^* = (-4,3)$, $\max f = 21$.

10) задача не має розв'язку (ОДР порожня).

5. Методом штучного базису розв'язати ЗЛП:

$$1)\ f = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max(\min),$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$2)\ f = -2x_1 + 3x_2 - 8x_3 \to \max(\min),$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 12, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}; \end{cases}$$

$$3)\ f = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 = 20, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$4)\ f = -5x_1 - 4x_2 + 15x_3 \to \max(\min),$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 10, \\ 8x_1 + 5x_2 - 24x_3 \leq 47, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Відповідь:

1) $\max f = f\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}$, $\min f = f\left(0, \frac{5}{8}, \frac{11}{4}\right) = -\frac{7}{8}$;

2) $\max f = f\left(\frac{1}{14}, 0, 0, \frac{12}{7}\right) = -\frac{1}{7}$, задача мінімізації розв'язку немає;

3) $\max f = f\left(\frac{60}{37}, 0, \frac{85}{37}\right) = \frac{520}{37}$, $\min f = f\left(0, \frac{12}{7}, \frac{19}{7}\right) = \frac{52}{7}$;

4) $\max f = f(2,2,0,0) = -18$, $\min f = f\left(\frac{86}{19}, \frac{41}{19}, 0, \frac{21}{19}\right) = -\frac{594}{19}$.

6. Скласти двоїсту задачу до даної, і, розв'язавши одну з них симплекс-методом, знайти розв'язок іншої:

$$1)\ f = -2x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$2)\ f = -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 - x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_3 = 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0; \end{cases}$$

$$3)\ f = 7x_1 - x_2 + 6x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 6x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $f = -12y_1 + 6y_2 + 5y_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -4y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -2, \\ -3y_1 + 3y_2 \ge 5, \\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$X^* = \left(5, \frac{16}{3}\right), Y^* = \left(0, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right),\ \max f = \min g = \frac{50}{3};$$

2) $g = -12y_1 + 4y_2 - 10y_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 2y_3 \ge 5, \\ 3y_1 + y_2 \ge 2, \\ y_3 \ge -4, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$X^* = \left(5, \frac{2}{3}, 0\right), Y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{11}{6}\right), \min f = \max g = -\frac{79}{3};$$

3) $g = 12y_1 + 9y_2 + 6y_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 7, \\ y_1 + y_2 - y_3 \ge -1, \\ 6y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 6, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0; \end{cases}$$

$$X^* = (3,0,0), Y^* = \alpha\left(\frac{5}{6},0,\frac{11}{6}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{7}{4},0,0\right) =$$

$$= \left(\frac{7}{4} - \frac{11}{12}\alpha, 0, \frac{11}{6}\alpha\right), \alpha \in [0,1], \max f = \min g = 21.$$

7. За допомогою двоїстого симплекс-методу знайти оптимальний план даної та двоїстої до неї задач:

1) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

2) $f = 3x_1 + 7x_2 + 8 \to \max$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_5 = 16, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $g = -9y_1 + 6y_2 + 7y_3 \to \max$,

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \le 3, \\ -3y_1 + 3y_2 \le 2, \\ y_j \ge 0, j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$$X^* = (7,0), Y^* = (0,0,3), \min f = \max g = 21;$$

2) $g = 12y_1 + 10y_2 + 16y_3 + 8 \to \min$,

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 3, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 7, \\ y_j \in \mathrm{R},\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

$X^* = (10,0,32,0,24), Y^* = (0,3,0), \max f = \min g = 38$.

8. Вагоноремонтне депо має у своєму розпорядженні певну кількість ресурсів: робочу силу, матеріали, запасні частини, обладнання, виробничі площі і т. п. Депо може ремонтувати вагони чотирьох типів. Інформація про кількість одиниць кожного з ресурсу, необхідного для ремонту одного вагона кожного типу, їх обсягу і прибутку, що може бути отриманий наведена в табл. 2.69. Потрібно знайти такий план ремонту вагонів, який забезпечує максимальний прибуток підприємству.

Таблиця 2.69

Дані завдання 8

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один вагон				Наявність ресурсів
	піввагон	критий	плат-форма	хопер-дозатор	
Робоча сила, люд.год	170	195	155	330	100000
Матеріали, тис. грн	7	6,5	6,25	13,5	3730
Фонд часу, год	15	20	16	30	9400
Спеціальні запчастини, тис. грн	0	0	0	3,5	630
Прибуток на 1 вагон, тис. грн	1,9	1,95	1,6	3,9	

Відповідь: $X^* = (0,200,0,180)$, $\max f = 1092$ тис. грош. од.

9. З пункту А в пункт В щодня вирушають пасажирські і швидкісні потяги. Дані про організацію перевезень наведені в табл. 2.70, 2.71. Скільки має бути сформовано швидкісних і пасажирських потягів, щоб перевезти найбільшу кількість пасажирів?

Таблиця 2.70

Дані завдання 9, варіант 1

		Потяг		Парк вагонів	Кількість пасажи-рів у вагоні
		швидкіс-ний	пасажир-ський		
Кількість вагонів у потязі	плацкарт	6	8	50	54
	купе	7	4	37	40
	СВ	1	2	15	18

Таблиця 2.71

Дані завдання 9, варіант 2

		Потяг		Парк вагонів	Кількість пасажи-рів у вагоні
		швидкіс-ний	пасажир-ський		
Кількість вагонів у потязі	плацкарт	7	9	41	54
	купе	10	8	45	36
	СВ	3	2	10	18

Відповідь: 1) $X^* = (3,4)$, $\max f = 4378$ пасажирів;
2) $X^* = (2,3)$, $\max f = 4014$ пасажирів.

10. Підприємство виготовляє запасні частини для двох видів пристроїв автоматики на залізничному транспорті. Для виробництва цих пристроїв використовуються сталь і кольорові метали, а також токарні і фрезерні верстати. За технологічними нормами на виробництво одиниці виробу першого типу потрібно 8 і 15 кг відповідно сталі і кольорових металів, а також 280 і 190 верстато-годин відповідно токарного і фрезерного устаткування. Для виробництва одиниці виробу другого типу необхідно 25, 14,

350 і 100 відповідних одиниць тих самих ресурсів. Цех має 12460 і 6800 верстато-годин відповідно токарного і фрезерного устаткування і 626 та 760 кг відповідно сталі і кольорових металів. Прибуток від реалізації одиниці виробу складає 20 грош. од. для пристрою першого типу і 50 грош. од. для пристрою другого типу. Побудувати математичну модель задачі, використовуючи як показник ефективності прибуток і враховуючи, що час роботи фрезерних верстатів має бути використаний повністю. Скласти план випуску продукції, що забезпечить підприємству максимальний прибуток.

Відповідь: $\max f = 20x_1 + 50x_2,$

$$\begin{cases} 8x_1 + 25x_2 \le 626, \\ 15x_1 + 14x_2 \le 760, \\ 280x_1 + 350x_2 \le 12460, \\ 190x_1 + 100x_2 \le 6800, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_j - \textit{цілочислові},\ j = 1,2; \end{cases}$$

(x_1, x_2 - кількість одиниць пристроїв першого та другого типу відповідно);

$X^* = (22,18)$, $\max f = 1340$ грош. од.

11. Завод з випуску залізничного електричного устаткування виробляє трансформатори двох видів, для виготовлення яких використовуються залізо і дріт. Загальний запас заліза складає 3 тонни, дроту – 4 тонни. На один трансформатор першого виду витрачаються 5 кг заліза і 3 кг дроту, а на один трансформатор другого виду витрачаються 3 кг заліза і 2 кг дроту. За кожен реалізований трансформатор першого виду завод отримує прибуток 10 грош. од., другого – 6 грош. од. Скласти план випуску трансформаторів, що забезпечує заводу максимальний прибуток.

Відповідь: $X^* = \alpha(600,0) + (1-\alpha)(0,1000) = (600\alpha, 1000 - \alpha),\ \alpha \in [0,1]$, $\max f = 6000$ грош. од.

12. Знайти цілочисловий розв'язок задачі методом Гоморі:

1) $f = -2x_1 - 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

2) $f = 2x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}2x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

3) $f = 6x_1 - 7x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2{,}5x_1 + x_2 \ge 5, \\ 0{,}5x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

4) $f = 5x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \le 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

5) $f = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

6) $f = -x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2.$

Відповідь: 1) $X^* = (1,2)$, $\min f = -12$; 2) $X^* = (2,3)$, $\max f = 7$;
3) $X^* = (2,2)$, $\min f = -2$; 4) $X^* = (2,2)$, $\min f = 8$;
5) $X^* = (1,3)$, $\max f = 7$; 6) $X^* = (3,1)$, $\max f = 1$.

13. Знайти цілочисловий розв’язок задачі методом гілок і меж:

1) $f = -6x_1 + 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 7x_2 \ge 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

2) $f = 2x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ 0{,}5x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

3) $f = -2x_1 + 14x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2;$

4) $f = -5x_1 + 6x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2.$

Відповідь: 1) $X^* = (1,1)$, $\min f = -3$; 2) $X^* = (2,3)$, $\min f = 1$;
3) $X^* = (2,3)$, $\max f = 38$; 4) $X^* = (1,4)$, $\max f = 19$.

14. Розв'язати частково цілочислові задачі:

$$1)\ f = 5x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ x_1 \in Z,\ j = 1,2;$$

$$2)\ f = -10x_1 + 4x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_4 = 28, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,4},$$
$$x_1, x_3 - \textit{цілочислові};$$

$$3)\ f = -x_1 - 8x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_4 = 18, \\ 3x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,4},$$
$$x_2, x_4 - \textit{цілочислові};$$

$$4)\ f = 8x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ -3x_1 + 5x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ x_1 \in Z,\ j = 1,2.$$

Відповідь: 1) $X^* = \left(4, \frac{3}{5}\right)$, $\max f = \frac{118}{5}$;

2) $X^* = \left(5, \frac{1}{2}, 0, \frac{9}{2}\right)$, $\min f = -48$;

$$3)\ X^*=\left(\frac{2}{3},5,\frac{2}{3},1\right),\ \min f=-\frac{122}{3};$$

$$4)\ X^*=\left(4,\frac{21}{5}\right),\ \max f=\frac{223}{5}.$$

15. Для виготовлення двох типів будівельних конструкцій, прибуток від реалізації яких складає 7 і 9 грош. од. використовується два види цементу, виробничі запаси яких складають 23 і 19 фіз. од. відповідно. Скласти план виробництва конструкцій кожного типу, який забезпечує максимальний прибуток від реалізації, якщо для виготовлення конструкції першого типу необхідно 2 фіз. од. цементу першого виду і 3 фіз. од. цементу другого виду, а для конструкції другого типу необхідно 4 фізичних од. цементу першого виду та 2 фіз. од. цементу другого виду.

Відповідь: $X^*=(1,7),\ \max f=70$ грош. од.

16. При виробництві залізобетонних конструкцій двох видів А і В використовують металеві конструкції трьох типів: K_1, K_2, K_3. Наявність ресурсів і норми витрат на один виріб кожного типу, а також ціна залізобетонних конструкцій і їх собівартість наведена в табл. 2.72. Скласти план випуску залізобетонних конструкцій, який би забезпечив підприємству найбільший прибуток.

Таблиця 2.72

Дані завдання 16

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Наявність ресурсів
	А	В	
K_1, фіз. од.	5	2	52
K_2, фіз. од.	6	4	63
K_3, фіз. од.	3	8	45
Ціна, грош. од.	50	70	
Собівартість, грош. од.	15	22	

Відповідь: $X^*=(9,2),\ \max f=411$ грош. од.

Розділ 3
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Постановка задачі та її математична модель

Однією з найпоширеніших спеціальних задач лінійного програмування є *транспортна задача*. Особлива структура такої задачі дала можливість розробити ефективніші методи її розв'язання, ніж методи, які застосовуються для розв'язання задач лінійного програмування.

Постановка транспортної задачі

Необхідно визначити оптимальний план перевезень деякого однорідного вантажу від m постачальників $A_1, A_2, \ldots, A_m$ до n споживачів $B_1, B_2, \ldots, B_n$, якщо відомі кількість вантажу a_i, зосередженого в пункті A_i, $i = \overline{1,m}$, кількість вантажу b_j, $j = \overline{1,n}$, потрібного споживачу B_j, тарифи перевезення одиниці вантажу c_{ij} від постачальника A_i до споживача B_j.

Для побудови моделі транспортної задачі введемо змінні x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що має бути перевезена з пункту A_i, $i = \overline{1,m}$ до пункту B_j, $j = \overline{1,n}$. Матриця

$$X = \left\| x_{ij} \right\|_{mn} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{21} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$
$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

називається *планом перевезень*, а величини x_{ij} – *перевезеннями*.

Задача полягає в знаходженні такого плану перевезень вантажу від постачальників до споживачів, щоб сумарні транспортні витрати

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

були мінімальними.

Транспортна задача називається *закритою* (*збалансованою*), якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3.1)$$

Якщо умова балансу (3.1)

не виконується, то транспортна задача називається відкритою.

Зауважимо, що транспортна задача має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується умова балансу (3.1)

Отже, математична модель транспортної задачі має вигляд

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \qquad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m}, \qquad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n}, \qquad (3.4)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \qquad (3.5)$$

Функція (3.2) називається *цільовою функцією*, система рівнянь (3.3)-(3.5) – *системою обмежень задачі*.

Умова (3.3) гарантує вивезення вантажу від кожного постачальника, а умова (3.4) дає можливість задовольнити потреби кожного споживача. Також на змінні накладається умова невід'ємності (3.5).

Допустимим планом перевезень називається такий план перевезень X, який задовольняє умови (3.3)-(3.5).

Допустимий план перевезень, у якому відмінними від нуля є не більш ніж $m+n-1$ перевезень, а інші дорівнюють нулю, називається *опорним планом перевезень*.

Якщо в опорному плані кількість відмінних від нуля компонент дорівнює $m+n-1$, то такий план називається *невиродженим*, а якщо менше – *виродженим*.

Оптимальним планом транспортної задачі називається такий допустимий план X^*, який серед інших допустимих планів має найменшу сумарну вартість перевезень.

Основні властивості транспортної задачі:

1) коефіцієнти цільової функції c_{ij}, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ невід'ємні (вартості перевезень не можуть бути від'ємними величинами);

2) коефіцієнти правих частин обмежень a_i, b_j, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ (запаси і потреби вантажу) невід'ємні;

3) коефіцієнти в обмеженнях набувають лише двох значень - це нулі або одиниці.

Задачу (3.2)-(3.5) та її розв'язання зручно подавати у вигляді таблиці (табл. 3.1), яка називається *транспортною таблицею*.

Клітинку таблиці, що відповідає пунктам A_i, B_j, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, будемо стисло позначати (i,j). У правому стовпці транспортної таблиці записують запаси вантажу $a_1,...,a_m$, у нижньому рядку – кількість необхідного споживачам вантажу $b_1,...,b_n$, у лівому верхньому куті кожної клітинки (i,j) – вартість c_{ij}, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ перевезення одиниці вантажу від постачальника A_i до споживача B_j.

Таблиця 3.1

Транспортна таблиця

Постачальники	Споживачі				Запаси a_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{1n} x_{1n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби b_j	b_1	b_2	…	b_n	

3.2. Методи побудови початкового плану транспортної задачі

Розв'язання задачі починається з визначення опорного плану. Це можна зробити за допомогою таких методів:

1. Метод північно-західного кута.
2. Метод мінімального елемента (мінімальної вартості).
3. Метод подвійної переваги.

Клітинки транспортної таблиці, що заповнені вантажем в опорному плані, називаються *базисними*, всі інші – *вільними*.

1. Метод північно-західного кута.

Заповнення транспортної таблиці починається з лівого верхнього кута транспортної таблиці (клітинка (1,1)) і закінчується в правому нижньому куті таблиці (1,1) (клітинка (m,n)). Значення x_{11} визначається за формулою

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} \tag{3.6}$$

і заноситься в правий нижній кут клітинки.

Якщо:

а) $a_1 < b_1$, тоді $x_{11} = a_1$. У цьому випадку весь вантаж постачальника A_1 буде вивезений і перший рядок виключається з розгляду. Споживачу B_1 не вистачає ще $b_1 - x_{11} > 0$ одиниць вантажу, який він повинен отримати від інших постачальників, тобто починаємо заповнювати клітинку (2,1);

б) $a_1 > b_1$, тоді $x_{11} = b_1$. У такому випадку потреби B_1 повністю задоволені і перший стовпець виключаємо з розгляду. У пункті A_1 залишилося ще $a_1 - x_{11} > 0$ одиниць продукції, яка буде спрямована на задоволення потреб інших споживачів, тобто починаємо заповнювати клітинку (1,2);

в) $a_1 = b_1$, тоді $x_{11} = a_1 = b_1$ і перший рядок і перший стовпець виключаються з розгляду, бо потреби споживача повністю задоволені і весь наявний вантаж у постачальника вивезений. Переходимо до заповнення клітинки (2,2).

Цю процедуру продовжують далі, доки не буде заповнена права нижня клітинка таблиці.

Розглянемо приклади побудови початкового плану перевезень.

Приклад 1. Скласти за методом *північно-західного кута* опорний план транспортної задачі, вихідні дані якої наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Дані прикладу 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2	5	6	3	25
A_2	5	4	2	7	46
A_3	8	1	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Розв'язання. Визначаємо x_{11} за формулою (3.6) $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{25,15\} = 15$ і записуємо отримане значення в клітинку (1,1) (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Крок 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5	6	3	25
A_2	5	4	2	7	46
A_3	8	1	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Перший стовпець, який відповідає споживачу B_1, з подальшого розгляду виключається, бо потреби цього споживача повністю задоволені. У постачальника A_1 ще залишилося 25-15=10 одиниць вантажу. Визначаємо кількість вантажу, який буде відправлено споживачу B_2:

$$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}, b_2\} = \min\{25 - 15, 21\} = 10.$$

Записуємо в клітинку (2,1) 10 одиниць вантажу, виключаючи з розгляду перший рядок, бо весь вантаж у першого постачальника вивезений (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Крок 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5 **10**	6	3	25
A_2	5	4	2	7	46
A_3	8	1	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Переходимо до заповнення клітинки (2,2). Споживачу B_2 необхідно доотримати ще $x_{22} = 21 - 10 = 11$ одиниць вантажу, тому

$$x_{22} = \min\{21 - 10, 46\} = 11.$$

Записуємо 11 од. вантажу в клітинку (2,2) і виключаємо другий стовпець з розгляду (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

Крок 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5 **10**	6	3	25
A_2	5	4 **11**	2	7	46
A_3	8	1	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Наступною для заповнення буде клітинка (2,3). Кількість вантажу, який потрібно записати в цю клітинку:

$$x_{23} = \min\{46 - 11, 24\} = 24 .$$

Споживач B_3 отримав весь потрібний йому вантаж, тому третій стовпець викреслюємо (табл. 3.6).

Таблиця 3.6

Крок 4

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5 **10**	6	3	25
A_2	5	4 **11**	2 **24**	7	46
A_3	8	1	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Продовжуючи аналогічно далі, одержуємо:

$$x_{24} = \min\{46 - 11 - 24, 20\} = \min\{11, 20\} = 11,$$
$$x_{34} = \min\{20 - 11, 9\} = 9 .$$

Отриманий план заносимо в табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Крок 5

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5 **10**	6	3	25
A_2	5	4 **11**	2 **24**	7 **11**	46
A_3	8	1	2	5 **9**	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Отримали початковий опорний план $X^\circ = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 24 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Для того щоб даний опорний план був невиродженим, необхідно заповнити $m - n + 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ клітинок транспортної таблиці. Бачимо, що одержаний нами початковий план є невиродженим.

Вартість перевезень за табл. 3.7 дорівнює:

$$f = 2 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 24 + 7 \cdot 11 + 5 \cdot 9 = 294 \text{ грош. од.}$$

Зауваження. Основним недоліком цього методу є те, що він не враховує матрицю тарифів.

2. *Метод мінімального елемента (мінімальної вартості)*.

Проглядається вся матриця тарифів перевезень і вибирається клітинка (i, j), яка відповідає найменшому тарифу. У цю клітинку записується значення $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$. Якщо запас a_i вичерпаний, то i - й рядок виключається з розгляду. У випадку, коли потреби b_j повністю задоволені, з подальшого розгляду виключається j - й стовпець. Може статися, що одночасно буде потрібно виключити і стовпець і рядок, що призводить до виродженого плану.

З таблиці вартостей, що залишилися, знову вибираємо найменшу і продовжуємо процес розподілу далі, доки не буде вичерпаний весь запас вантажу в постачальників, а потреби задоволені.

У випадку, коли є декілька клітинок з однаковою найменшою вартістю, то у першу чергу заповнюємо ту, у яку можна вписати найбільший обсяг перевезень.

Приклад 2. Скласти за *методом мінімальної вартості* опорний план транспортної задачі, вихідні дані якої наведені в табл. 3.2.

Розв'язання. Найменша вартість відповідає клітинці (3,2). Заповнюємо цю клітинку вантажем у кількості $x_{32} = \min\{9,21\} = 9$.

Оскільки весь вантаж від третього постачальника вивезений, третій рядок виключаємо з розгляду (табл. 3.8).

Таблиця 3.8

Крок 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2	5	6	3	25
A_2	5	4	2	7	46
A_3	8	1 **9**	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Серед вільних клітинок знов обираємо клітинку, якій відповідає найменша вартість. Таких клітинок дві: (1,1) і (2,3). Заповнимо спочатку, клітинку (2,3), оскільки сюди можна вписати $x_{23} = \min\{46,24\} = 24$, а в клітинку (1,1) лише $x_{11} = \min\{25,15\} = 15$ одиниць вантажу. У результаті повністю задоволені потреби третього споживача, що надає можливість викреслити третій стовпець з подальшого розгляду (табл. 3.9).

Таблиця 3.9

Крок 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2	5	6	3	25
A_2	5	4	2 **24**	7	46
A_3	8	1 **9**	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

У клітинку (1,1) записуємо вантаж у кількості $x_{11} = \min\{25,15\} = 15$ і виключаємо з розгляду перший стовпець (табл. 3.10).

Таблиця 3.10

Крок 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5	6	3	25
A_2	5	4	2 **24**	7	46
A_3	8	1 **9**	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Обираємо з клітинок, що залишилися клітинку з найменшим тарифом. Це клітинка (1,4), до якої потрібно вписати вантаж у кількості $x_{14} = \min\{25-15, 20\} = 10$ од. (табл. 3.11).

Таблиця 3.11

Крок 4

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5	6	3 **10**	25
A_2	5	4	2 **24**	7	46
A_3	8	1 **9**	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Найменша з вартостей, що залишилася, це $c_{22} = 4$. Вписуємо у відповідну клітинку $x_{22} = \min\{21-9, 46-24\} = 12$ од. вантажу, задовольнивши частково потреби другого споживача (табл. 3.12).

Таблиця 3.12

Крок 4

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5	6	3 **10**	25
A_2	5	4 **12**	2 **24**	7	46
A_3	8	1 **9**	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Залишилося заповнити тільки одну клітинку: $x_{24} = \min\{46 - 12 - 24, 20 - 10\} = \min\{10, 10\} = 10$ (табл. 3.13).

Таблиця 3.13

Крок 5

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2 **15**	5	6	3 **10**	25
A_2	5	4 **12**	2 **24**	7 **10**	46
A_3	8	1 **9**	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Отриманий план $X^{\circ} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 12 & 24 & 10 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ є опорним і невиродженим. Вартість перевезень знаходимо за табл. 3.13:

$$f = 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 24 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 9 = 235 \text{ грош. од.}$$

Бачимо, що завдяки цьому методу одержали меншу вартість перевезень, ніж у випадку, коли опорний план був побудований методом північно-західного кута.

3. Метод подвійної переваги.

Коли транспортна таблиця має великі розміри, важко застосовувати метод мінімальної вартості. У цьому випадку застосовують *метод подвійної переваги*.

У кожному рядку знаходимо мінімальну вартість і помічаємо її штрихом. Потім те саме роблять у кожному стовпці. Заповнення таблиці починають з клітинок, що позначені двома штрихами, потім заповнюють клітинки з одним штрихом. Так само, як і в попередніх методах, у кожну клітинку вписують максимально можливі обсяги вантажу, виключаючи з подальшого розгляду відповідні рядки або стовпці.

Приклад 3. Скласти за методом подвійної переваги опорний план транспортної задачі вихідні дані якої наведені в табл. 3.2.

Розв’язання. Відмітимо штрихами найменшу вартість перевезень у кожному рядку (табл. 3.14).

Таблиця 3.14

Крок 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2’	5	6	3	25
A_2	5	4	2’	7	46
A_3	8	1’	2	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Повторюючи цю процедуру для кожного стовпця таблиці, отримаємо табл. 3.15.

Таблиця 3.15

Крок 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2”	5	6	3’	25
A_2	5	4	2”	7	46
A_3	8	1”	2’	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Спочатку заповнюємо клітинки, що помічені двома штрихами: (1,1), (2,3), (3,2):

$$x_{11} = \min\{25{,}15\} = 15;$$
$$x_{23} = \min\{46{,}14\} = 14;$$
$$x_{32} = \min\{21{,}9\} = 9.$$

У результаті цих дій з подальшого розгляду виключається третій рядок і перший стовпець (табл. 3.16).

Таблиця 3.16

Крок 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2” **15**	5	6	3’	25
A_2	5	4	2” **24**	7	46
A_3	8	1” **9**	2’	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Тепер заповнюємо клітинки, які помічені одним штрихом у порядку зростання вартості. У табл. 3.16 є тільки одна така клітинка. Це клітинка (1,4). Кількість вантажу, який потрібно записати в цю клітинку, складає $x_{14} = \min\{25 - 15{,}20\} = 10$ од. (табл. 3.17).

Таблиця 3.17

Крок 4

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2” **15**	5	6	3’ **10**	25
A_2	5	4	2” **24**	7	46
A_3	8	1” **9**	2’	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Виключаємо перший рядок з розгляду. Серед клітинок, що залишилися, знов обираємо клітинку з найменшим тарифом. У нашому випадку це (2,2). Записуємо в цю клітинку $x_{22} = \min\{46-14, 21-9\} = 12$ од. вантажу (табл. 3.18).

Таблиця 3.18

Крок 5

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2” **15**	5	6	3’ **10**	25
A_2	5	4 **12**	2” **24**	7	46
A_3	8	1” **9**	2’	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Заповнюючи останню клітинку (2,4) вантажем у кількості $x_{22} = \min\{46-12-14, 20-10\} = 10$ од., отримаємо табл. 3.19.

Таблиця 3.19

Крок 6

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2” **15**	5	6	3’ **10**	25
A_2	5	4 **12**	2” **24**	7 **10**	46
A_3	8	1” **9**	2’	5	9
Потреби b_j	15	21	24	20	80

Вартість перевезень отриманого опорного, невиродженого плану $X^{\circ} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 12 & 24 & 10 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює:

$$f = 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 24 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 9 = 235 \text{ грош. од.}$$

Як бачимо, для цієї конкретної задачі опорні плани, отримані методами подвійної переваги і мінімальної вартості, співпали.

3.3. Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

Отримати оптимальний розв'язок задачі можна за допомогою симплексного методу, але зручніше використовувати для цього *метод потенціалів*.

Теорема 1. Якщо для деякого невиродженого опорного плану $X = \|x_{ij}\|_{mn}$ існують числа u_i, v_j, такі, що

$$u_i + v_j = c_{ij}, при \;\; x_{ij} > 0, \tag{3.7}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \; при \;\; x_{ij} = 0, \tag{3.8}$$

для всіх $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, то даний опорний план є оптимальним.

Числа u_i, v_j називаються *потенціалами* постачальників і споживачів відповідно.

Розв'язання транспортної задачі складається з таких етапів:

1. Побудова опорного плану і знаходження вартості перевезення для цього плану.
2. Розрахунок потенціалів постачальників і споживачів.
3. Визначення циклу.
4. Перерозподіл вантажу.

Розглянемо кожен етап більш детально.

1. Побудова опорного плану і знаходження вартості перевезення для цього плану (п. 3.2).

2. Розрахунок потенціалів постачальників і споживачів.

За формулою (3.7) для невиродженого плану отримуємо систему $m+n-1$ лінійних рівнянь з $m+n$ невідомими для базисних клітинок. Тобто, кількість невідомих завжди на одиницю більше, ніж кількість рівнянь. Це дозволяє одну з невідомих вибрати довільно (для спрощення розрахунків зазвичай цю невідому прирівнюють до нуля). Решту потенціалів знаходимо з системи (3.7). Після знаходження всіх потенціалів для кожної вільної клітинки транспортної таблиці, за формулою (3.8), складають оцінки:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right), \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \tag{3.9}$$

Критерій оптимальності опорного плану транспортної задачі

Якщо серед чисел Δ_{ij} (3.9) немає від'ємних, то даний опорний план оптимальний.

Якщо ж є від'ємні оцінки Δ_{ij}, то даний опорний план не є оптимальним і необхідно його поліпшувати, тобто

Оцінки	План
Всі оцінки $\Delta_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$	Оптимальний
Існує хоча б одна оцінка $\Delta_{ij} < 0$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$	Неоптимальний

3. Визначення циклу та перерозподіл вантажу.

У разі неоптимального плану потрібно перерозподілити вантаж, зменшивши вартість перевезень. Це робиться таким чином. Вибираємо вільну клітинку, якій відповідає найменше від'ємне значення Δ_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Потрібно заповнити цю клітинку, перерозподіливши обсяги поставок між клітинками, які пов'язані з обраною *циклом*.

Циклом називається замкнута ламана, створена взаємно перпендикулярними лініями, які можуть як перетинатися, так і не перетинатися.

Ця ламана має парну кількість вершин, перша з яких лежить у порожній клітинці з найменшим від'ємним значенням Δ_{ij},

$i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ (для неї створюється цикл), а всі інші вершини займають заповнені клітинки.

Точки самоперетину циклу не є його вершинами.

Доведено, що при правильній побудові опорного плану для будь-якої клітинки можна побудувати тільки один цикл.

На рис. 3.1. показані можливі цикли транспортних задач.

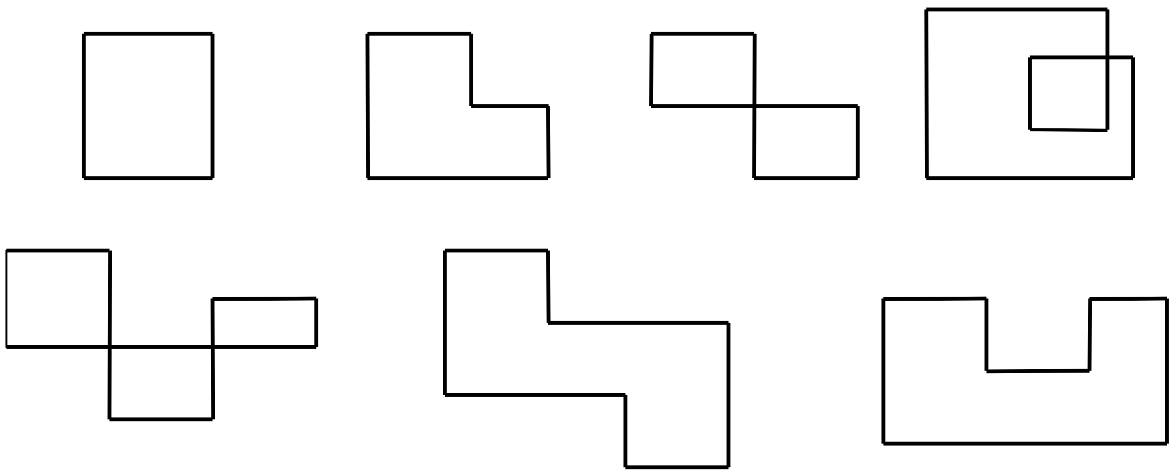


Рис. 3.1. Приклади циклів транспортної задачі

4. Перерозподіл вантажу в межах циклу.

а) умовно помітимо кожну клітинку циклу знаками «+» або «–» у такий спосіб: першу (вільну) клітинку – знаком «+», другу– знаком «–», третю – знаком «+» і т. д., чергуючи знаки. Враховуючи парну кількість клітинок у будь-якому циклі, остання клітинка буде мати знак «–» (рис. 3.2);

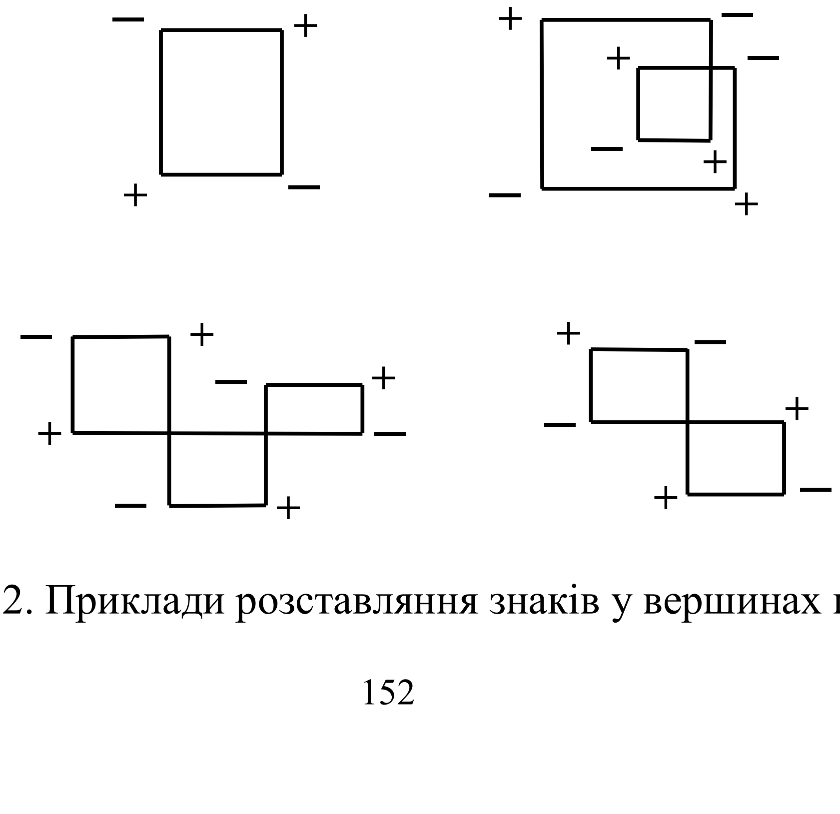


Рис. 3.2. Приклади розставляння знаків у вершинах циклу

б) кількість вантажу у клітинках, позначених знаком «+», збільшуємо на δ одиниць, а у клітинках, позначених знаком «–», зменшуємо на δ одиниць. Величина δ визначається як *мінімум* вантажу в клітинках, помічених знаком «–» (рис. 3.3).

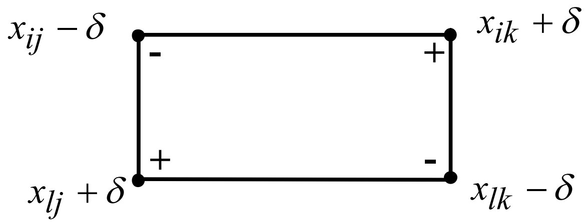


Рис. 3.3. Корекція вантажу в межах циклу

Умовно кажучи, з однієї клітинки забирається δ одиниць вантажу і передається наступній клітинці. Оскільки вміст клітинок змінюється на одну і ту саму величину, то баланси по стовпцях і рядках транспортної таблиці залишаються незмінними. У результаті такої процедури вантаж буде перерозподілений, причому обрана клітинка стане базисною, а інша –вільною.

Зауваження:

1. Якщо в циклі є декілька однакових найменших значень вантажу у від’ємних (помічених знаком «-») клітинках, то звільняємо лише одну з них, а інші від’ємні клітинки залишаємо зайнятими (з нульовим вантажем) для збереження невиродженого плану.
2. Якщо в результаті розрахунків отримали $\delta = 0$, то з цим нулем поводяться як зі звичайним числом при перерозподілі вантажу.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких кроків:

1. Складають опорний план.
2. Знаходять вартість перевезень за даним планом.
3. Обчислюють для базисних клітинок потенціали постачальників і споживачів u_i, v_j, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ за формулами (3.7) - (3.8).
4. Знаходять оцінки $\Delta_{ij} \ge 0$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ за формулою (3.9).

5. Перевіряють умову оптимальності. Якщо отриманий план оптимальний, розв'язання задачі закінчується, якщо ні – переходять до поліпшення плану.

6. Обирають клітинку з найменшою від'ємною оцінкою Δ_{ij} і будують для неї цикл.

7. Перерозподіляють вантаж у межах обраного циклу і повертаються до другого кроку.

Важливо пам'ятати, що сумарна вартість перевезень оновленого плану повинна бути не більшою за попередню.

Приклад 4. Розв'язати закриту транспортну задачу, вихідні дані якої наведені у табл. 3.20:

Таблиця 3.20

Дані прикладу 4

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси a_i
A_1	7	2	3	5	1	180
A_2	4	3	6	2	4	100
A_3	3	6	2	5	8	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

а) побудувавши опорний план за методом північно-західного кута;

б) побудувавши опорний план за методом подвійної переваги.

Розв'язання. *а) Етап 1.*

Крок 1. Визначаємо опорний план за методом північно-західного кута і заносимо його компоненти в табл. 3.21.

Таблиця 3.21

Опорний план

	$v_1 = 7$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = -1$	$v_5 = 2$	Запаси a_i
$u_1 = 0$	7 **60**	2 **55**	3 **65**	5	1	180
$u_2 = 3$	4	3	6 **60**	2 **40**	4	100
$u_3 = 6$	3	6	2	5 **50**	8 **70**	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

Отриманий план є опорним і невиродженим.

Крок 2. Вартість перевезень для цього плану:

$$f = 7 \cdot 60 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 65 + 6 \cdot 60 + 2 \cdot 40 + 5 \cdot 50 + 8 \cdot 70 = 1975 \text{ грош. од.}$$

Крок 3. Перевіримо цей план на оптимальність. Отриманий план невироджений. Для заповнених клітинок складемо систему рівнянь (3.7):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_2 = 2, \\ u_1 + v_3 = 3, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_3 + v_5 = 8. \end{cases}$$

Кількість змінних системи на одиницю більше кількості рівнянь. Тому одну зі змінних можна взяти довільно, наприклад, взявши $u_1 = 0$, знаходимо $v_1 = 7, v_2 = 2, v_3 = 3, u_2 = 3, v_4 = -1, u_3 = 6, v_5 = 2$.

Отримані значення потенціалів зручно одразу заносити в транспортну таблицю (табл. 3.21).

Крок 4. Для кожної вільної клітинки складають оцінки за формулою (3.9):

$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 6, \quad \Delta_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = -1,$

$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = -6, \quad \Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = -2,$
$\Delta_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = -1, \quad \Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = -10, \leftarrow$
$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = -2, \quad \Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = -7.$

Крок 5. Оскільки серед оцінок Δ_{ij} є від'ємні, то план неоптимальний.

Крок 6. Поліпшення плану. Для цього вибираємо клітинку (3,1), яка має найменшу оцінку $\Delta_{31} = -10$, і будуємо для неї цикл, чергуючи знаки «+» і «–» (табл. 3.22).

Таблиця 3.22

Цикл перерозподілу

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси a_i
A_1	7 – **60**	2 **55**	3 + **65**	5	1	180
A_2	4	3	6 – **60**	2 + **40**	4	100
A_3	3 ⊕	6	2	5 – **50**	8 **70**	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

Переміщуємо по циклу вантаж в обсязі $\delta = \min\{60,60,50\} = 50$ од., додаючи цю величину до наявного вантажу в клітинках, що мають знак «+», і віднімаючи від вантажу, розташованого в клітинках зі знаком «–» (табл. 3.23).

Таблиця 3.23

Перерозподіл вантажу

7 – **60-50**	2 **55**	3 + **65+50**	5
4	3	6 – **60-50**	2 + **40+50**
3 ⊕ **+50**	6	2	5 – **50-50**

Одержуємо новий опорний план (табл. 3.24).

Таблиця 3.24

Ітерація 1

	$v_1 = 7$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = -1$	$v_5 = 12$	Запаси a_i
$u_1 = 0$	7 **10**	2 **55**	3 **115**	5	1	180
$u_2 = 3$	4	3	6 **10**	2 **90**	4	100
$u_3 = -4$	3 **50**	6	2	5	8 **70**	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

Етап 2. Повторюємо алгоритм методу потенціалів, починаючи з другого кроку. Вартість перевезень за табл. 3.24:

$$f = 7 \cdot 10 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 115 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 50 + 8 \cdot 70 = 1475 \text{ грош. од.,}$$

що на 500 грош. од. менше, ніж на попередньому етапі.

Перевіряємо оптимальність нового плану, повторюючи дії попереднього етапу. Розв'язуючи систему рівнянь для заповнених клітинок:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_2 = 2, \\ u_1 + v_3 = 3, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_5 = 8, \end{cases}$$

отримуємо $u_1 = 0, v_1 = 7, v_2 = 2, v_3 = 3, u_2 = 3, v_4 = -1, u_3 = -4, v_5 = 12$. Для вільних клітинок:

$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 6, \qquad \Delta_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = -11, \leftarrow$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = -6, \qquad \Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = -2,$$
$$\Delta_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = -11, \leftarrow \quad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 8,$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 3, \qquad \Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 10.$$

Якщо є декілька клітинок з однаковою найменшою оцінкою, то вибирається клітинка, яка має найменший тариф. Такою є клітинка (1,5), для якої будуємо цикл, переміщуючи вантаж в обсязі $\delta = \min\{10,70\} = 10$ од. (табл. 3.25).

Таблиця 3.25

Цикл перерозподілу

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси a_i
A_1	7 − **10**	2 **55**	3 **115**	5	1 ⊕	180
A_2	4	3	6 **10**	2 **90**	4	100
A_3	3 + **50**	6	2	5	8 − **70**	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

У результаті перерозподілу вантажу, отримуємо новий опорний план (табл. 3.26).

Таблиця 3.26

Перерозподіл вантажу

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси a_i
A_1	7	2 **55**	3 **115**	5	1 **10**	180
A_2	4	3	6 **10**	2 **90**	4	100
A_3	3 **60**	6	2	5	8 **60**	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

Вартість перевезень якого складає:

$$f = 2 \cdot 55 + 3 \cdot 115 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 60 + 8 \cdot 60 = 1365 \text{ грош. од.}$$

Етап 3. Повторюючи так само процедуру перевірки на оптимальність і перерозподілу вантажу ще двічі, отримуємо оптимальний план перевезень (табл. 3.27).

Таблиця 3.27

Оптимальний план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси a_i
A_1	7	2 **55**	3 **55**	5	1 **70**	180
A_2	4 10	3	6	2 **90**	4	100
A_3	3 **50**	6	2 **70**	5	8	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

Значення цільової функції

$$f = 2 \cdot 55 + 3 \cdot 55 + 1 \cdot 70 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 50 + 2 \cdot 70 = 855 \text{ грош. од.}$$

Перевірка цього плану на оптимальність дає такі значення потенціалів:

$$u_1 = 0,\ v_2 = 2, v_3 = 3,\ v_5 = 1,\ u_3 = -1,\ v_1 = 4,\ u_2 = 0,\ v_4 = 2$$

та оцінок: $\Delta_{11} = 3, \Delta_{14} = 3, \Delta_{22} = 1, \Delta_{23} = 3, \Delta_{25} = 3, \Delta_{32} = 5, \Delta_{34} = 4, \Delta_{35} = 8$.

Відповідь: $f = 855$ (грош. од.), $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 55 & 0 & 70 \\ 10 & 0 & 0 & 90 & 0 \\ 50 & 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

б) Етап 1.

Крок 1. Опорний план за методом подвійної переваги заносимо до табл. 3.28.

Таблиця 3.28

Опорний план

	v_1=7	v_2=2	v_3=3	v_4=5	v_5=1	Запаси a_i
u_1=0	7 **50**	2’ **55**	3 **5**	5	1” **70**	180
u_2=-3	4 **10**	3	6	2” **90**	4	100
u_3=-1	3’	6	2” **120**	5	8	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

Крок 2. Вартість перевезень складає

$$f = 7 \cdot 50 + 2 \cdot 55 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 70 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 90 + 2 \cdot 120 = 1005 \text{ грош. од.}$$

Крок 3. Знайдемо потенціали споживачів і постачальників, розв’язавши систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_2 = 2, \\ u_1 + v_3 = 3, \\ u_1 + v_5 = 1, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_3 = 2. \end{cases} .$$

Крок 4. Для вільних клітинок маємо такі оцінки:

$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 0, \qquad \Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 4,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 6, \qquad \Delta_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = -3, \leftarrow$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = -3, \leftarrow \qquad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 5,$$
$$\Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 1, \qquad \Delta_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 8.$$

Крок 5. Бачимо, що критерій оптимальності не виконаний. Необхідно поліпшувати отриманий план.

Крок 6. Будуємо цикл для клітинки (3,1), оскільки вартість перевезень за цим маршрутом менша, ніж для (2,5) (табл. 3.29).

Таблиця 3.29

Цикл перерозподілу

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси a_i
A_1	7 − **50**	2 **55**	3 + **5**	5	1 **70**	180
A_2	4 10	3	6	2 **90**	4	100
A_3	3 ⊕	6	**2** − **120**	5	8	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

і проводимо корекцію перевезень в обсязі $\delta = \min\{50{,}120\} = 50$ од. вантажу (табл. 3.30).

Таблиця 3.30

Корекція перевезень

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси a_i
A_1	7	2 **55**	3 **55**	5	1 **70**	180
A_2	4 **10**	3	6	2 **90**	4	100
A_3	3 **50**	6	2 **70**	5	8	120
Потреби b_j	60	55	125	90	70	400

Значення цільової функції для плану $X = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 55 & 0 & 70 \\ 10 & 0 & 0 & 90 & 0 \\ 50 & 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ складає

$$f = 2 \cdot 55 + 3 \cdot 55 + 1 \cdot 70 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 50 + 2 \cdot 70 = 855 \text{ грош. од.}$$

Нескладно впевнитися, що цей план є оптимальним. Бачимо, що за методом подвійної переваги ми за одну корекцію отримали оптимальний план, значно скоротивши час на розрахунки.

Відповідь: $f = 855$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 55 & 0 & 70 \\ 10 & 0 & 0 & 90 & 0 \\ 50 & 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 5. На трьох складах у містах Харків, Сімферополь і Луганськ знаходиться металобрухт у кількості 80, 90, 150 тон відповідно. Цей вантаж потрібно перевезти залізницею в Донецьк, Дніпропетровськ і Запоріжжя в кількості відповідно 100, 115 і 105 тонн. Тариф на перевезення металобрухту складає 0,2 грн за тонну на відстань 1 км. Необхідно скласти план перевезень, який забезпечує мінімальні транспортні витрати. Довжина залізниць між містами наведена в табл. 3.31.

Таблиця 3.31

Дані прикладу 5

	Харків	Луганськ	Сімферополь
Донецьк	260	140	440
Дніпропетровськ	210	330	400
Запоріжжя	270	320	330

Розв’язання. Розрахуємо вартість перевезення 1 тонни металобрухту від постачальника до споживача. Для цього помножимо відстань між містами на тариф перевезення однієї тонни металобрухту. Складемо транспортну таблицю (табл. 3.32).

Таблиця 3.32

Транспортна таблиця

	Харків	Луганськ	Сімферополь	Запаси a_i
Донецьк	52	28	88	100
Дніпропетровськ	42	66	80	115
Запоріжжя	54	64	66	105
Потреби b_j	80	90	150	

Задача має закритий тип. Опускаючи подробиці розв’язання, запишемо відповідь.

Відповідь: Оптимальний план перевезень $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 10 \\ 80 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}$, транспортні витрати складають $f = 16490$ грн.

3.4. Відкритий тип транспортної задачі

Розглянемо відкриту транспортну задачу, тобто задачу, для якої не виконується умова балансу (3.1)

Для того щоб розв’язати таку задачу, необхідно збалансувати (зрівняти) потреби і поставки, тобто звести задачу до закритого типу. Це робиться введенням “фіктивного” постачальника або споживача залежно від сумарної кількості запасів вантажу і потреби в ньому. Розглянемо два випадки.

1. Загальний попит на продукцію перевищує її пропозицію:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \, .$$

Тоді постановка транспортної задачі має вигляд

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

У цьому випадку вводиться “фіктивний” $(m+1)$-й постачальник з запасом вантажу $a_ф = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і нульовими тарифами на перевезення, тобто $c_{фj} = 0, j = \overline{1,n}$. Зрозуміло, що вантаж від “фіктивного” постачальника $a_ф$ жодний його замовник не отримає.

2. Потреби споживачів менші, ніж наявна кількість продукції:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Тоді планування перевезень проводиться згідно з розв’язком задачі

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Для того щоб збалансувати цю задачу, необхідно ввести “фіктивного” $(n+1)$-го споживача, потреби якого складають $b_ф = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а тарифи на перевезення дорівнюють нулю:

$c_{iф} = 0, i = \overline{1,m}$. Частина вантажу, що призначена "фіктивному" споживачу залишиться в постачальників. Сума всіх цих залишків буде дорівнювати різниці $b_ф$ між пропозицією та попитом на неї.

Приклад 6. Розв'язати транспортну задачу, яка задана табл. 3.33.

Таблиця 3.33

Дані прикладу 6

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	2	1	3	200
A_2	5	7	8	125
A_3	2	4	9	120
Потреби b_j	90	85	220	

Розв'язання. Задача є відкритою, оскільки запаси вантажу $\sum_{i=1}^{m} a_i = 200 + 125 + 120 = 445$ од. перевищують попит на нього $\sum_{j=1}^{n} b_i = 90 + 85 + 220 = 395$ од. Вводимо "фіктивного" споживача $B_ф$, якому необхідно $b_ф = 445 - 395 = 50$ од. вантажу (табл. 3.35).

Таблиця 3.35

Закрита ТЗ

	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	Запаси a_i
A_1	2	1	3	0	200
A_2	5	7	8	0	125
A_3	2	4	9	0	120
Потреби b_j	90	85	220	50	445

Початковий опорний план знайдемо за методом подвійної переваги, тимчасово виключаючи з розгляду “фіктивного” споживача $B_ф$ (табл. 3.36).

Таблиця 3.36

Ітерація 1

	v_1=-3	v_2=1	v_3=3	v_4=-5	Запаси a_i
u_1=0	2’	1” – **85**	3’ + **115**	0	200
u_2=5	5’	7	8 – **105**	0 + **20**	125
u_3=5	2” **90**	4 ⊕	9	0 – **30**	120
Потреби b_j	90	85	220	50	445

Вартість перевезення вантажу за табл. 3.36 складає:

$$f = 1 \cdot 85 + 3 \cdot 115 + 8 \cdot 105 + 0 \cdot 20 + 2 \cdot 90 + 0 \cdot 30 = 1450 \text{ грош. од.}$$

Для перевірки цього плану на оптимальність розв’яжемо систему рівнянь для заповнених $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ клітинок:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_3 = 3, \\ u_2 + v_3 = 8, \\ u_2 + v_4 = 0, \\ u_3 + v_1 = 2, \\ u_3 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Для порожніх клітинок маємо такі оцінки:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 5, \qquad \Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 5,$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 3, \qquad \Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 1,$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = -2, \leftarrow \quad \Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = -2. \leftarrow$$

Для побудови циклу обираємо клітинку (3,2), яка має найменший тариф порівняно з клітинкою (3,3), і переміщуємо по циклу вантаж у кількості $\delta = \min\{85,105,30\} = 30$ од. Новий опорний план матиме вигляд табл. 3.37.

Таблиця 3.37

Ітерація 2

	v_1=-1	v_2=1	v_3=3	v_4=-5	Запаси a_i
u_1=0	2	1 **55**	3 **145**	0	200
u_2=5	5	7	8 **75**	0 **50**	125
u_3=3	2 **90**	4 **30**	9	0	120
Потреби b_j	90	85	220	50	445

Його вартість

$$f = 1 \cdot 55 + 3 \cdot 145 + 8 \cdot 75 + 0 \cdot 50 + 2 \cdot 90 + 4 \cdot 30 = 1390 \text{ грош. од.}$$

Для нього маємо

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1, \\ u_1 + v_3 = 3, \\ u_2 + v_3 = 8, \\ u_2 + v_4 = 0, \\ u_3 + v_1 = 2, \\ u_3 + v_2 = 4, \end{cases} \Rightarrow u_1 = 0,\ u_2 = 5, u_3 = 3,\ v_1 = -1,\ v_2 = 1,\ v_3 = 3,\ v_4 = -5.$$

Звідки одержуємо такі оцінки:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 3, \quad \Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 5,$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 1, \quad \Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 1,$$
$$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 3, \quad \Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 2.$$

Оскільки серед оцінок немає від'ємних, то отриманий план є оптимальним.

Відповідь: $f = 1390$ грош. од. , $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 145 \\ 0 & 0 & 75 \\ 90 & 30 & 0 \end{pmatrix}$. У другого постачальника залишилось 50 од. вантажу.

3.5. Випадок виродженого плану

Розглянемо випадок, коли опорний план є *виродженим*, тобто має менш ніж $m+n-1$ заповнених клітинок. У цьому разі необхідно "фіктивно" дозаповнити стільки клітинок, щоб їхня сумарна кількість дорівнювала $m+n-1$. Кількість вантажу в цих клітинках повинна дорівнювати нулю. Цей штучний прийом надасть можливість отримати невироджений план.

Приклад 7. Методом північно-західного кута було отримано такий план закритої транспортної задачі, як у табл. 3.38.

Таблиця 3.38

Дані прикладу 7

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	3 **200**	4	2	200
A_2	5	8 **30**	3 **95**	125
A_3	7	4	9 **120**	120
Потреби b_j	200	30	215	445

Знайти план перевезень, який має найменший тариф.

Розв'язання. Цей план – вироджений, оскільки заповнено 4 клітинки, а $m+n-1=3+3-1=5$. Необхідно заповнити ще одну клітинку. Виникає питання: яку саме клітинку необхідно заповнити? Бачимо, що план став виродженим тому, що весь вантаж першого постачальника був вивезений першому споживачу, повністю задовольнивши його потреби. Це призвело до того, що ми звільнили одночасно перший рядок і перший стовпець, а можна було звільнити щось одне: або рядок, або стовпець. Тому для заповнення підходять клітинки першого рядка або стовпця: (1,2), (1,3), (2,1), (3,1). Заповнюючи, наприклад, клітинку (1,3), отримаємо невироджений опорний план (табл. 3.39).

Таблиця 3.39

Невироджений план

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	3 **200**	4	2 **0**	200
A_2	5	8 **30**	3 **95**	125
A_3	7	4	9 **120**	120
Потреби b_j	200	30	215	445

Вартість перевезень складає

$$f = 3 \cdot 200 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 30 + 3 \cdot 95 + 9 \cdot 120 = 2205 \text{ грош. од.}$$

Далі розв'язуємо задачу методом потенціалів.

Відповідь: $f = 1635$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 125 \\ 90 & 30 & 0 \end{pmatrix}$.

3.6. Альтернативний оптимум у транспортних задачах

Ознакою того, що транспортна задача має не єдиний розв'язок є наявність хоча б однієї оцінки $\Delta_{ij} = 0$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ ***в оптимальному плані*** X_1^*. Якщо зробити перерозподіл вантажу по циклу, який відповідає клітинці з нульової оцінкою, отримаємо ще один оптимальний план X_2^*, при цьому значення цільової функції не зміниться. Таким чином, при наявності нульових оцінок оптимальний план має вигляд

$$X^* = \alpha X_1^* + (1-\alpha) X_2^*, \text{ де } \alpha \in [0,1]. \qquad (3.10)$$

Розглянемо наступну задачу.

Приклад 8. Три будівельних об'єкти використовують пісок, який видобувається на трьох кар'єрах. Добова продуктивність, т, кожного кар'єру A_1, A_2, A_3, потреби піску, т, на об'єктах B_1, B_2, B_3 та відстань від кар'єрів до об'єктів, км, наведені в табл. 3.40.

Таблиця 3.40

Дані прикладу 8

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	30	40	20	200
A_2	50	60	30	125
A_3	30	40	50	110
Потреби b_j	90	125	220	

Знайти план перевезень піску, який забезпечує найменшу кількість тонно-кілометрів.

Розв'язання. *Крок 1*. Транспортна задача закритого типу. Початковий опорний план, побудований методом подвійної переваги, наведений у табл. 3.41.

Таблиця 3.41

Ітерація 1

	v_1=40	v_2=50	v_3=20	Запаси a_i
u_1=0	30 ⊕	40	20 – **200**	200
u_2=10	50	60 – **105**	30 + **20**	125
u_3=-10	30 – **90**	40 + **20**	50	110
Потреби b_j	90	125	220	435

Крок 2. Значення цільової функції:

$$f = 20 \cdot 200 + 60 \cdot 105 + 30 \cdot 20 + 30 \cdot 90 + 40 \cdot 20 = 14400 \text{ т/км.}$$

Крок 3. Для базисних клітинок маємо

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 20, \\ u_2 + v_2 = 60, \\ u_2 + v_3 = 30, \\ u_3 + v_1 = 30, \\ u_3 + v_2 = 40, \end{cases} \Rightarrow u_1 = 0,\ u_2 = 10, u_3 = -10,\ v_1 = 40,\ v_2 = 50,\ v_3 = 20.$$

Крок 4. Для вільних клітинок

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = -10, \leftarrow \quad \Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = -10, \leftarrow$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 0, \quad \Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 40.$$

Крок 5. Одержали неоптимальний план. Поліпшуємо його.

Крок 6. Нагадаємо, якщо існує декілька клітинок з однаковими від'ємними оцінками, то обирається клітинка з найменшим тарифом. У нашому випадку це (1,1). Будуємо для цієї клітинки цикл (табл. 3.41), переміщуємо по ньому вантаж у кількості $\delta = \min\{200{,}105{,}90\} = 90$ од. У результаті отримуємо новий план (табл. 3.42).

Таблиця 3.42

Ітерація 2

	v_1=30	v_2=50	v_3=20	Запаси a_i
u_1=0	30 **90**	40 ⊕	20 − **110**	200
u_2=10	50	60 − **15**	30 + **110**	125
u_3=-10	30	40 **110**	50	110
Потреби b_j	90	125	220	435

Кількість тонно-кілометрів за цим планом дорівнює

$$f = 30 \cdot 90 + 20 \cdot 110 + 60 \cdot 15 + 30 \cdot 110 + 40 \cdot 110 = 13500.$$

Повторюючи алгоритм методу потенціалів, приходимо до наступного плану (табл. 3.43).

Таблиця 3.43

Ітерація 3

	v_1=30	v_2=40	v_3=20	Запаси a_i
u_1=0	30 − **90**	40 + **15**	20 **95**	200
u_2=10	50	60	30 **125**	125
u_3=0	30 ⊕	40 − **110**	50	110
Потреби b_j	90	125	220	435

Значення цільової функції

$$f = 30 \cdot 90 + 40 \cdot 15 + 20 \cdot 95 + 30 \cdot 125 + 40 \cdot 110 = 13350 \text{ т/км.}$$

Перевірка отриманого плану на оптимальність дає такі оцінки для вільних клітинок:

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 10, \qquad \Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 10,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 0, \leftarrow \qquad \Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 30.$$

Таким чином, $X_1^* = \begin{pmatrix} 90 & 15 & 95 \\ 0 & 0 & 125 \\ 0 & 110 & 0 \end{pmatrix}$. Бачимо, що $\Delta_{31} = 0$, тобто задача має альтернативний оптимум. Знайдемо інший оптимальний план. Для цього побудуємо цикл відносно клітинки (3,1) (табл. 3.43) і отримаємо інший оптимальний план (табл. 3.44).

Таблиця 3.44

Ітерація 4

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	30	40 **105**	20 **95**	200
A_2	50	60	30 **125**	125
A_3	30 **90**	40 **20**	50	110
Потреби b_j	90	125	220	

Неважко впевнитися, що план $X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 105 & 95 \\ 0 & 0 & 125 \\ 90 & 20 & 0 \end{pmatrix}$ оптимальний і має те саме значення цільової функції.

Загальний розв'язок поставленої задачі має вигляд

$$X^* = \alpha X_1^* + (1-\alpha) X_2^*, \ \alpha \in [0,1].$$

Знайдемо елементи матриці загального розв'язку:

$x_{11} = 90\alpha + 0(1-\alpha) = 90\alpha$;

$x_{12} = 15\alpha + 105(1-\alpha) = 105 - 90\alpha$;

$x_{13} = 95\alpha + 95(1-\alpha) = 95$;

$x_{21} = 0\alpha + 0(1-\alpha) = 0$;

$x_{22} = 0\alpha + 0(1-\alpha) = 0$;

$x_{23} = 125\alpha + 125(1-\alpha) = 125$;

$x_{31} = 0\alpha + 90(1-\alpha) = 90(1-\alpha)$;

$x_{32} = 110\alpha + 20(1-\alpha) = 20 + 90\alpha$;

$x_{33} = 0\alpha + 0(1-\alpha) = 0$.

Відповідь: $f = 13350$ т/км, $X^* = \begin{pmatrix} 90\alpha & 105-90\alpha & 95 \\ 0 & 0 & 125 \\ 90(1-\alpha) & 20+90\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0,1]$.

Наприклад, при $\alpha = \frac{1}{5}$ отримаємо ще один оптимальний план: $X^* = \begin{pmatrix} 18 & 87 & 95 \\ 0 & 0 & 125 \\ 72 & 38 & 0 \end{pmatrix}$.

3.7. Особливі види транспортних задач

Раніше була розглянута транспортна задача в класичній постановці. Але в багатьох прикладних задачах транспортного типу постановка відрізняється від класичної тим, що містить додаткові обмеження.

3.7.1. Задача з забороною на перевезення

На практиці такі задачі зустрічаються досить часто, наприклад, якщо ціни або якість продукції постачальника неприйнятні для деякого споживача, вийшло з ладу вантажне устаткування і т. д.

Припустимо, що існує заборона на перевезення вантажу з пункту $A_r, r=\overline{1,m}$ в пункт $B_k, k=\overline{1,n}$. Ця задача зводиться до класичної, якщо тариф на перевезення вантажу за даним напрямком штучно збільшити, тобто вважати $c_{rk}=C$, де C – досить велике додатне число. Така задача буде мати розв'язок тоді і тільки тоді, коли вона має хоча б один допустимий план перевезень, який не містить перевезення за даним маршрутом, бо, якщо в отриманому оптимальному плані задачі перевезення за забороненим маршрутом $x_{rk} \neq 0$ при досить великій вартості перевезень $(c_{rk}=C)$, це означає, що потреби споживача B_k неможливо задовольнити без постачальника A_r.

Приклад 9. Розв'язати транспортну задачу з урахуванням заборони перевезень за маршрутами (1,3), (3,3). Вихідні дані наведені в табл. 3.45.

Таблиця 3.45

Дані прикладу 9

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	8	3	1	150
A_2	5	7	3	225
A_3	2	4	5	175
Потреби b_j	155	205	190	550

Розв'язання. *Етап 1.* Позначимо тарифи за забороненими маршрутами через *C*. Визначимо опорний план за методом північно-західного кута і заносимо його компоненти в табл. 3.46.

Таблиця 3.46

Ітерація 1

	$v_1=5$	$v_2=7$	$v_3=3$	Запаси a_i
$u_1=3$	8 **150**	3	C	150
$u_2=0$	5 − **5**	7 **205**	3 + **15**	225
$u_3=C$-3	2 ⊕	4	C − **175**	175
Потреби b_j	155	205	190	550

Етап 2. Перевірка на оптимальність. Отриманий план невироджений. Для заповнених клітинок складемо систему рівнянь (3.7):

$$\begin{cases} u_1+v_1=8, \\ u_2+v_1=5, \\ u_2+v_2=7, \\ u_2+v_3=3, \\ u_3+v_3=C, \end{cases} \Rightarrow\ u_1=3,\ u_2=0, u_3=C-3,\ v_1=5, v_2=7, v_3=3.$$

Оцінки для вільних клітинок:

$$\Delta_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)=-7, \qquad \Delta_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)=C-6,$$

$$\Delta_{31}=c_{31}-(u_3+v_1)=-C,\leftarrow \quad \Delta_{32}=c_{32}-(u_3+v_2)=-C.\leftarrow$$

Оскільки *C* – велике додатне число, тому для заповнення вибираємо клітинку (3,1), бо вона має менший тариф ніж (3,2). Будуємо цикл (табл. 3.47). Після корекції перевезень отримуємо новий план (табл. 3.47).

Таблиця 3.47

Ітерація 2

	v_1=-C+5	v_2=7	v_3=3	Запаси a_i
u_1=C+3	8 – **150**	3 ⊕	C	150
u_2=0	5	7 – **205**	3 + **20**	225
u_3=C-3	2 + **5**	4	C – **170**	175
Потреби b_j	155	205	190	550

Вартість перевезень цього плану складає

$f = 8 \cdot 150 + 7 \cdot 205 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + C \cdot 170 = 2705 + 170C$ грош. од.

Етап 3. Перевірка на оптимальність нового плану. Складаємо систему для заповнених клітинок:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 8, \\ u_2 + v_2 = 7, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_1 = 2, \\ u_3 + v_3 = C, \end{cases} \Rightarrow u_1 = C + 3,\ u_2 = 0, u_3 = C - 3,\ v_1 = -C + 5, v_2 = 7, v_3 = 3.$$

Оцінки для вільних клітинок:

$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = -C - 7, \leftarrow \quad \Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = C,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = -6, \qquad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = -C.$$

Будуємо новий цикл для клітинки (1,2), переміщуючи вантаж у розмірі $\delta = \min\{150, 205, 170\} = 150$ од. (табл. 3.47).

Таблиця 3.48

Ітерація 3

	v_1=-C+5	v_2=7	v_3=3	Запаси a_i
u_1=-4	8	3 **150**	C	150
u_2=0	5	7 – **55**	3 + **170**	225
u_3=C-3	2 **155**	4 ⊕	C – **20**	175
Потреби b_j	155	205	190	550

Цільова функція за даним планом набуває значення

$f = 3 \cdot 150 + 7 \cdot 55 + 3 \cdot 170 + 2 \cdot 155 + C \cdot 20 = 1655 + 20C$ грош. од.

Етап 4. Для заповнених клітинок

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 8, \\ u_2 + v_2 = 7, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_1 = 2, \\ u_3 + v_3 = C, \end{cases} \Rightarrow u_1 = -4,\ u_2 = 0, u_3 = C - 3,\ v_1 = -C + 5, v_2 = 7, v_3 = 3.$$

Отже, для вільних клітинок маємо

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 7 + C, \qquad \Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = C + 1,$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = C, \qquad \Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = C. \leftarrow$$

Покращуємо план, переміщуючи $\delta = \min\{55,20\} = 20$ од. вантажу вздовж циклу, побудованого для клітинки (3,2) (табл. 3.48). Записуємо нову транспортну таблицю (табл. 3.48).

Таблиця 3.49

Ітерація 4

	v_1=5	v_2=7	v_3=3	Запаси a_i
u_1=-4	8	3 **150**	C	150
u_2=0	5 ⊕	7 − **35**	3 **190**	225
u_3=-3	2 − **155**	4 + **20**	C	175
Потреби b_j	155	205	190	550

Транспортні витрати дорівнюють:

$$f = 3 \cdot 150 + 7 \cdot 35 + 3 \cdot 190 + 2 \cdot 120 + 4 \cdot 20 = 1655 \text{ грош. од.}$$

Неважко впевнитись, що план $X = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 \\ 0 & 35 & 190 \\ 155 & 20 & 0 \end{pmatrix}$ є оптимальним, а також виконана умова заборони перевезення за маршрутами (1,3) і (3,3).

Оскільки оцінка $\Delta_{21} = 0$, то задача має альтернативний оптимум. Побудувавши цикл для цієї клітинки (табл. 3.49) і виконавши корекцію вантажу в розмірі 35 од., отримаємо інший оптимальний план:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 \\ 35 & 0 & 190 \\ 120 & 55 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$X^* = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 \\ 0 & 35 & 190 \\ 155 & 20 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 \\ 35 & 0 & 190 \\ 120 & 55 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in [0,1].$$

Відповідь: $f^* = 1655$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 \\ 35(1-\alpha) & 35\alpha & 190 \\ 120+35\alpha & 55-35\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0,1]$.

3.7.2. Задача з фіксованими обсягами перевезень за окремими маршрутами

Нехай від постачальника $A_r, r=\overline{1,m}$ до споживача $B_k, k=\overline{1,n}$ необхідно перевезти наперед визначений вантаж у кількості x_{rk}. Це перевезення потрібно обов'язково включити в оптимальний план, навіть, якщо воно невигідно.

Якщо $x_{rk} > b_k$, то задача розв'язку немає, бо відповідний постачальник не може забезпечити цей заказ.

Якщо обсяги обов'язкових перевезень не перевищують запасів, то ці перевезення реєструють і записують допоміжну транспортну задачу за такими правилами:

1) зменшують запаси постачальника $A_r, r=\overline{1,m}$ і потреби споживача $B_k, k=\overline{1,n}$ на величину фіксованих перевезень x_{rk};

2) вводять заборону на перевезення за маршрутом (*r,k*);

3) розв'язують транспортну задачу з забороною перевезень.

В оптимальний план допоміжної задачі $X^*_{доп}$ дописують обов'язкове перевезення x_{kr} і обчислюють значення цільової функції початкової задачі

$$f^* = f^*_{доп} + c_{rk}x_{rk},$$

де $f^*_{доп}$ - значення цільової функції, яке відповідає оптимальному плану $X^*_{доп}$.

3.7.3. Задача з обмеженнями на пропускну спроможність

Нехай при розв'язанні транспортної задачі необхідно обмежити перевезення від постачальника $A_r, r=\overline{1,m}$ до споживача $B_k, k=\overline{1,n}$. Існують обмеження двох типів:

а) $x_{rk} \geq a$, де a – невід'ємна стала величина, що визначає мінімальну кількість вантажу, який обов'язково треба перевезти;

б) $x_{rk} \leq b$, де b – додатна стала величина, яка визначає максимально допустиму кількість вантажу, який можна перевезти за даним маршрутом.

Якщо $x_{rk} \geq a$, то необхідно спочатку перевірити відповідність обмежень можливостям постачальників, тобто

$$a \leq a_r, r = \overline{1,m}. \tag{3.10}$$

У разі невиконання цієї умови задача не має розв'язку.

Якщо вираз (3.10) виконується, то перехід до класичної задачі здійснюється за допомогою введення нових змінних

$$\overline{x}_{rk} = x_{rk} - a,\ r = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n}$$

і перерахування запасів вантажу і потреби в ньому:

$$\begin{aligned} \overline{a}_r &= a_r - a,\ r = \overline{1,m}, \\ \overline{b}_k &= \max\{0; b_k - a\},\ k = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Приклад 10. Розв'язати транспортну задачу, яка задана табл. 3.50, враховуючи, що за маршрутами (1,3), (3,2) треба перевезти не менше, ніж 50 і 45 од. вантажу відповідно.

Таблиця 3.50

Дані прикладу 10

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	4	3	2	100
A_2	3	1	2	90
A_3	5	3	4	50
Потреби b_j	110	70	60	240

Розв’язання. *Етап 1.* Переконаємося в тому, що можна виконати обов’язкові перевезення, які зазначені в умові задачі. Для цього складемо нову таблицю (табл. 3.51).

Таблиця 3.51

Урахування обов’язкових перевезень

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i	Залишок запасів
A_1	4	3	2 ≥ 50	100	100-50
A_2	3	1	2	90	90
A_3	5	3 ≥ 45	4	50	50-45
Потреби b_j	110	70	60	240	
Залишилось завезти	110	70-45	60-50		240-95

Бачимо, що після виконання обов’язкових перевезень у постачальників залишається ще 50, 90 і 5 од. вантажу, тобто умова (3.10) виконана і задача має розв’язок. Згідно з формулами (3.11) перерахуємо запаси вантажу і потреби в ньому (табл. 3.52).

Таблиця 3.52

Допоміжна транспортна таблиця

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	4	3	2	50
A_2	3	1	2	90
A_3	5	3	4	5
Потреби b_j	110	25	10	145

Етап 2. Це класична транспортна задача. Її оптимальний розв’язок

$$\overline{f} = 425 \text{ грош. од.}, \ \overline{X}^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 10 \\ 65 & 25 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки на першому етапі були виконані обов’язкові перевезення

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix},$$

вартість яких складає $f_1 = 2 \cdot 50 + 3 \cdot 45 = 235$ грош. од., то розв’язок початкової задачі

$$f = \overline{f} + f_1 = 425 + 235 = 660 \text{(грош. од.)},$$

$$X^* = X_1 + \overline{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 0 & 10 \\ 65 & 25 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 60 \\ 65 & 25 & 0 \\ 5 & 45 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f^* = 660$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 60 \\ 65 & 25 & 0 \\ 5 & 45 & 0 \end{pmatrix}$.

Розглянемо випадок, коли $x_{rk} \le b$. Ця задача може бути розв’язана тільки тоді, коли виконується умова $b \le b_k, k = \overline{1,n}$.

Для розв’язання цієї транспортної задачі складаємо допоміжну транспортну задачу за такими правилами:

1) стовпець, який відповідає споживачу $B_k, k = \overline{1,n}$, розбиваємо на два: k_1 і k_2;

2) потреби споживача $A_r, r = \overline{1,m}$ теж розбиваємо на дві частини: $b_{k_1} = b$ і $b_{k_2} = b - b_{k_1}$;

3) за маршрутом (r,k) забороняємо перевезення;

4) записуємо однакові тарифи в клітинках стовпців B'_k і B''_k, які дорівнюють тарифам k*-того* стовпця початкової задачі.

Оптимальний план початкової задачі знаходиться з оптимального плану допоміжної задачі при складанні відповідних перевезень стовпців B_k' і B_k''.

Приклад 11. Розв'язати транспортну задачу, вихідні дані якої наведені у табл. 3.53, враховуючи, що за маршрутом (1,2) потрібно перевезти не більше 60 од. вантажу.

Таблиця 3.53

Дані прикладу 11

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	2	3	4	135
A_2	3	1	2	115
A_3	5	6	3	120
Потреби b_j	120	140	110	370

Розв'язання. *Етап 1***.** Переконаємося в тому, що можна виконати додаткову умову, тобто другий споживач потребує не менше, ніж 60 од. вантажу. (Його потреби складають 140 од., тобто ця задача має розв'язок.)

Етап 2. Складемо допоміжну транспортну таблицю (табл. 3.54), розбивши другий стовпець на два.

Таблиця 3.54

Допоміжна таблиця

	B_1	B_2'	B_2''	B_3	Запаси a_i
A_1	2	3	C	4	135
A_2	3	1	1	2	115
A_3	5	6	6	3	120
Потреби b_j	120	60	140-60	110	370

Опускаючи подробиці розв’язання, наведемо лише оптимальну таблицю для допоміжної задачі (табл. 3.55).

Таблиця 3.55

Оптимальна транспортна таблиця

	B_1	B_2'	B_2''	B_3	Запаси a_i
A_1	2 − **120**	3 + **15**	C	4	135
A_2	3	1 − **45**	1 + **70**	2	115
A_3	5 ⊕	6	6 − **10**	3 **110**	120
Потреби b_j	120	60	80	110	370

Неважко впевнитися, що ця задача має альтернативний оптимум. Побудувавши цикл для клітинки (3,1) (табл. 3.55), отримаємо інший оптимальний план:

$$X' = \begin{pmatrix} 110 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 80 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$X^*_{доп} = \alpha \begin{pmatrix} 120 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 110 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 110 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 80 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 110+10\alpha & 25-10\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 35+10\alpha & 80-10\alpha & 0 \\ 10-10\alpha & 0 & 10\alpha & 110 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Вартість перевезень складає $f = 790$ грош. од.

Запишемо відповідь початкової задачі, склавши відповідні елементи штучно введених стовпців:

$$X^* = \begin{pmatrix} 110+10\alpha & 25-10\alpha+0 & 0 \\ 0 & 35+10\alpha+80-10\alpha & 0 \\ 10-10\alpha & 0+10\alpha & 110 \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,1].$$

Відповідь: $f = 790$ (грош. од.),

$$X^* = \begin{pmatrix} 110+10\alpha & 25-10\alpha & 0 \\ 0 & 115 & 0 \\ 10-10\alpha & 10\alpha & 110 \end{pmatrix}, \alpha \in [0,1].$$

3.7.4. Транспортна задача за критерієм часу

Окрім транспортної задачі за критерієм вартості існує задача транспортного типу за критерієм часу, яка має важливе значення при транспортуванні вантажу, що швидко псується, у надзвичайних ситуаціях, коли загальна вартість перевезень має другорядне значення і т. д.

Постановка транспортної задачі

Необхідно визначити план перевезень $\|x_{ij}\|_{mn}$ деякого однорідного вантажу від m постачальників $A_1, A_2, \ldots, A_m$ до n споживачів $B_1, B_2, \ldots, B_n$, який забезпечить доставку вантажу в найкоротший час, якщо відомі кількість вантажу a_i, зосередженого в пункті A_i, $i = \overline{1,m}$, кількість вантажу b_j, потрібного споживачу B_j, $j = \overline{1,n}$, і час t_{ij} перевезення одиниці вантажу від постачальника A_i до споживача B_j.

Постановка такої транспортної задачі відрізняється від класичної лише цільовою функцією, система обмежень залишається такою самою. Ця задача не є задачею лінійного програмування, оскільки величина Т – нелінійна функція змінних x_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Продемонструємо метод, який дозволяє безпосередньо знайти оптимальний план транспортної задачі за критерієм часу за допомогою перетворення транспортної таблиці. Такий метод називається *методом заборонених клітинок*.

***Алгоритм розв'язання транспортної задачі за критерієм часу*:**

1. Будуємо початковий план за допомогою одного з методів, які описані вище.

2. Визначаємо для заповнених клітинок величину $T = \max\{t_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

3. Закреслюємо (забороняємо) вільні клітинки, для яких $t_{ij} > T$, виключаючи їх з подальшого розгляду (їх заповнювати недоцільно, тому що це призводить до збільшення величини T).

4. Визначаємо клітинку (i, j), для якої $t_{ij} = T$, і будуємо для неї цикл. Цю клітинку позначаємо знаком «–». Розставляємо знаки у вершинах циклу, як у класичній транспортній задачі.

5. Знаходимо для клітинок циклу, що позначені знаком «–», величину $\delta = \min\{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

6. Переміщуємо по циклу вантаж у кількості δ одиниць, додаючи його до вантажу клітинок зі знаком «+» і віднімаючи від вантажу, розміщеного у клітинках зі знаком «–»:

а) якщо $\delta = x_{ij}$, то клітинка (i, j) стає вільною і далі не розглядається (її треба закреслити). Далі знов починаємо з пункту 2;

б) якщо $\delta < x_{ij}$, то вантаж у клітинці (i, j) зменшується на δ одиниць: $\bar{x}_{ij} = x_{ij} - \delta$, і необхідно знову будувати для неї новий цикл. Цю процедуру потрібно повторювати доти, поки ця клітинка не розвантажиться. Після цього повертаємося до пункту 2.

7. Процес продовжуємо доти, поки можна будувати розвантажувальні цикли.

8. Якщо більше немає можливості побудувати цикл, то задача розв'язана. Максимальний час $T = \max\{t_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ для зайнятих клітинок і буде оптимальним розв'язком.

***Зауваження*:**

1. Цикл для транспортної задачі за критерієм часу складається з вільних і зайнятих клітинок. Таких циклів може бути декілька.

2. Умови, яким відповідають клітинки циклу:

а) клітинки зі знаком «+» повинні мати $t_{ij} < T$;

б) клітинки зі знаком «–» повинні мати $x_{ij} > 0$.

Приклад 12. Необхідно перевезти вантаж від трьох постачальників, запаси яких дорівнюють 135, 105 і 120 од. відповідно, до чотирьох споживачів, що потребують 120, 30, 100 та 110 од. вантажу. Скласти такий план перевезень, при якому час доставки всіх вантажів буде найменшим. Інтервали часу, необхідного для доставки за всіма маршрутами, наведений у табл. 3.56.

Таблиця 3.56

Дані прикладу 12

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	8	7	4
A_2	3	6	5	10
A_3	6	4	9	2

Розв'язання. *Етап 1.*

1. Складаємо початковий план за методом мінімальної вартості (мінімального інтервалу часу) (табл. 3.57).

Таблиця 3.57

Ітерація 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	5 + **15**	8 ⊖ **20**	7 **100**	4	135
A_2	3 – **105**	6 +	5	10	105
A_3	6	4 **10**	9	2 **110**	120
Потреби b_j	120	30	100	110	360

2. Визначаємо для заповнених клітинок величину

$$T = \max_{\substack{i=\overline{1,3},\\ j=\overline{1,4}}} \{t_{ij}\} = \max\{5,8,7,3,4,2\} = 8.$$

3. Закреслюємо вільні клітинки, для яких $t_{ij} > 8$, виключаючи їх з подальшого розгляду (табл. 3.57).

4. Будуємо розвантажувальний цикл для клітинки (1,2), для якої $T = 8$.

5. Визначаємо кількість вантажу для переміщення. Для цього визначаємо для клітинок, що позначені знаком «–», величину δ (табл. 3.57):

$$\delta = \min_{\substack{i=\overline{1,3},\\ j=\overline{1,4}}} \{x_{ij}\} = \min\{20,105\} = 20.$$

6. Проводимо перерозподіл вантажу (табл. 3.58).

Таблиця 3.58

Перерозподіл вантажу

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	5 **35**	8	7 **100**	4	135
A_2	3 **85**	6 **20**	5	10	105
A_3	6	4 **10**	9	2 **110**	120
Потреби b_j	120	30	100	110	360

Етап 2. Для отриманої табл. 3.58 визначаємо параметр $T = \max\{5,7,3,6,4,2\} = 7$ і забороняємо вільні клітинки, для яких $t_{ij} > 7$. Будуємо розвантажувальний цикл з вантажем у кількості $\delta = \min\{100,20,110\} = 20$ для клітинки (1,3), позначаючи її знаком «–» (табл. 3.59

Ітерація 2

Таблиця 3.59

Ітерація 2

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	5 **35**	8	7 ⊖ **100**	4 +	135
A_2	3 **85**	6 − **20**	5 +	10	105
A_3	6	4 + **10**	9	2 − **110**	120
Потреби b_j	120	30	100	100	360

Етап 3. Бачимо, що клітинка (1,3) повністю не розвантажена. Визначаючи параметри

$$T = \max\{5,7,4,3,4,2\} = 7\,, \delta = \min\{80,85\} = 80\,,$$

будуємо для неї ще один цикл (табл. 3.60).

Таблиця 3.60

Ітерація 3

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	5 + **35**	8	7 ⊖ **80**	4 **20**	135
A_2	3 − **85**	6	5 + **20**	10	105
A_3	6	4 **30**	9	2 **90**	120
Потреби b_j	120	30	100	110	360

Етап 4. Після перерозподілу отримуємо наступну таблицю (табл. 3.61)

Таблиця 3.61

Ітерація 4

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	5 **115**	8	7	4 **20**	135
A_2	3 **5**	6	5 **100**	10	105
A_3	6	4 **30**	9	2 **90**	120
Потреби b_j	120	30	100	110	360

На цьому етапі маємо $T = \max\{5,4,3,4,2\} = 5$. Спробуємо розвантажити клітинку (1,1), для чого потрібно знайти можливі переноси з цієї клітинки, які починаються горизонтально або вертикально. Рухаючись горизонтально, спершу потрапляємо в клітинку (1,4), потім у (3,4) (оскільки це єдина незаборонена клітинка в останньому стовпці), далі потрапляємо в (3,2) (єдина незаборонена клітинка в останньому рядку), виходу з якої немає, бо в другому стовпці всі інші клітинки заборонені. Міркуючи аналогічно, бачимо, що вертикальний перенос у (2,1) також неможливий. Таким чином, для клітинки (1,1) не можна побудувати цикл, тобто задача розв'язана.

Відповідь: $\min T = T^* = 5$ год, $X^* = \begin{pmatrix} 115 & 0 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 90 \end{pmatrix}$.

Зауваження. Отриманий оптимальний план транспортної задачі за критерієм часу може бути неєдиним. Це відбувається у випадку, коли для клітинки, що відповідає T^*, існує цикл, який не розвантажує її повністю або переміщує вантаж з цієї клітинки до іншої з таким самим часом.

Наприклад, у результаті розв'язання була отримана оптимальна таблиця (табл. 3.62) з $T^* = 5$ год.

Таблиця 3.62

Оптимальна таблиця 1

	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	Запаси a_i
A_1	6	2	5 **75**	8	75
A_2	3 **45**	2 **35**	7	4 **25**	105
A_3	6	4	3 **15**	2 **35**	50
Потреби b_j	45	35	90	60	

Бачимо, що для клітинки (1,3) можна побудувати ще один цикл з $\delta = 35$ од. (табл. 3.63), який повністю не розвантажує цю клітинку.

Таблиця 3.63

Оптимальна таблиця 2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	$B_ф$	Запаси a_i
A_1	6	2 +	5 – **75**	8	75
A_2	3 **45**	2 – **35**	7	4 + **25**	105
A_3	6	4	3 + **15**	2 – **35**	50
Потреби b_j	45	35	90	60	

Таким чином, отримаємо ще один оптимальний план $X = \begin{pmatrix} 0 & 35 & 40 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$, реалізація якого теж потребує $T^* = 5$ год, тобто

$$X^* = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 & 0 \\ 45 & 35 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 15 & 35 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 35 & 40 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 35-35\alpha & 40+35\alpha & 0 \\ 45 & 35\alpha & 0 & 60-35\alpha \\ 0 & 0 & 50-35\alpha & 35\alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,1].$$

3.7.5. Транспортна параметрична задача

Транспортна параметрична задача виникає у випадку, коли вартість перевезень може коливатися в межах деякого інтервалу.

Ця задача формулюється так:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(c'_{ij} + \lambda c''_{ij}\right)x_{ij} \to \min, \qquad (3.13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}, \qquad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1,n}, \qquad (3.15)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \qquad (3.16)$$

де $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, λ_1, λ_2 - довільні дійсні числа.

Число λ називається *параметром транспортної задачі*.

Для розв’язання задачі (3.13)-(3.16) застосовують метод потенціалів. Ознакою оптимальності отриманого розв’язку є відсутність від’ємних оцінок Δ_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ для вільних клітинок.

Алгоритм розв’язання транспортної параметричної задачі:

1. Знаходимо оптимальний розв’язок транспортної задачі при фіксованому значенні $\lambda = \lambda_1$.

2. Знаходимо інтервал змінення λ, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda'_1]$, при якому отриманий розв’язок залишається оптимальним. Для цього розв’язуємо систему нерівностей

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0, \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \qquad (3.16)$$

3. Якщо $\lambda_1' = \lambda_2$, то процес розв'язання завершується. Якщо $\lambda_1' < \lambda_2$, то перерозподіляємо вантаж, побудувавши цикл для клітинки, яка відповідає умові $\lambda > \lambda_1'$, і повертаємося до кроку 1.

Розглянемо розв'язок транспортної задачі на конкретному прикладі.

Приклад 13. На трьох складах зосереджено 50, 120 і 80 тонн однорідного вантажу, який потрібно перевезти чотирьом споживачам у кількості 60, 90, 45, 55 тонн відповідно. Вартість перевезень змінюється залежно від завантаження залізниці і задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} \textit{від } 6 \textit{ до } 12 & 7 & \textit{від } 5 \textit{ до } 2 & \textit{від } 3 \textit{ до } 6 \\ 5 & 3 & \textit{від } 2 \textit{ до } 8 & \textit{від } 9 \textit{ до } 6 \\ \textit{від } 2 \textit{ до } 11 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. В матрицю вартості введемо параметр λ, $\lambda \in [0{,}3]$. Тоді

$$\textit{від } 6 \textit{ до } 12 \Rightarrow c_{11} = 6 + 2\lambda, \qquad \textit{від } 5 \textit{ до } 2 \Rightarrow c_{13} = 5 - \lambda,$$
$$\textit{від } 3 \textit{ до } 6 \Rightarrow c_{14} = 3 + \lambda, \qquad \textit{від } 2 \textit{ до } 8 \Rightarrow c_{23} = 2 + 2\lambda.$$

Складемо початковий опорний план методом мінімальної вартості (табл. 3.64).

Таблиця 3.64

Початковий план

	v_1=2+3λ	v_2=5	v_3=4+2λ	v_4=8+2λ	Запаси a_i
u_1=-5+λ	6+2λ	7	5-λ	3+λ **50**	50
u_2=-2	5	3 + **75**	2+2λ − **45**	9-λ	120
u_3=0	2+3λ **60**	5 − **15**	6 ⊕	8 **5**	80
Потреби b_j	60	90	45	55	250

Крок 1. $0 \le \lambda \le 3$.

Оцінки для вільних клітинок дорівнюють

$$\Delta_{11} = 6 + 2\lambda - (-5 + \lambda + 2 + 3\lambda) = 9 - 2\lambda,\ \Delta_{12} = 7 - (-5 + \lambda + 5) = 7 - \lambda,$$
$$\Delta_{13} = 5 - \lambda - (-5 + \lambda + 4 + 2\lambda) = 6 - 4\lambda,\ \ \Delta_{21} = 5 - (-2 + 2 + 3\lambda) = 5 - 3\lambda,$$
$$\Delta_{24} = 9 - \lambda - (-2 + 8 + 2\lambda) = 3 - 3\lambda,\qquad \Delta_{33} = 6 - (0 + 4 + 2\lambda) = 2 - 2\lambda.$$

Шукаємо розв’язок при $\lambda = 0$:

$$\Delta_{11} = 9,\ \Delta_{12} = 7,\ \Delta_{13} = 6,\ \ \Delta_{21} = 5,\ \Delta_{24} = 3,\ \ \Delta_{33} = 2.$$

Бачимо, що при $\lambda = 0$ отриманий план є оптимальним. Знайдемо діапазон змінення λ, у якому розв’язок буде залишатися оптимальним:

$$\begin{cases} \Delta_{11} = 9 - 2\lambda \ge 0, \\ \Delta_{12} = 7 - \lambda \ge 0, \\ \Delta_{13} = 6 - 4\lambda \ge 0, \\ \Delta_{21} = 5 - 3\lambda \ge 0, \\ \Delta_{24} = 3 - 3\lambda \ge 0, \\ \Delta_{33} = 2 - 2\lambda \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \le \dfrac{9}{2}, \\ \lambda \le 7, \\ \lambda \le \dfrac{3}{2}, \\ \lambda \le \dfrac{5}{3}, \\ \lambda \le 1, \leftarrow \\ \lambda \le 1. \leftarrow \end{cases} \Rightarrow \lambda \in [0,1].$$

Таким чином, отримаємо оптимальний розв’язок при $\lambda \in [0,1]$

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 75 & 45 & 0 \\ 60 & 15 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ f_1 = 700 + 320\lambda \text{ грош. од.}$$

Крок 2. $1 \le \lambda \le 3$.

Якщо $\lambda > 1$, оцінки Δ_{24} і Δ_{33} стають від’ємними. Знайдемо новий розв’язок перерозподіливши вантаж у розмірі 15 од. (табл. 3.64) в клітинку (3,3).

Таблиця 3.65

Крок 2

	v_1=2+3λ	v_2=7-2λ	v_3=6	v_4=8	Запаси a_i
u_1=-5+λ	6+2λ	7	5-λ	3+λ **50**	50
u_2=-4+2λ	5 ⊕	3 **90**	2+2λ — **30**	9-λ	120
u_3=0	2+3λ — **60**	5	6 + **15**	8 **5**	80
Потреби b_j	60	90	45	55	250

Система нерівностей (3.16) для табл. 3.65 набуває вигляду

$$\begin{cases} \Delta_{11} = 6 + 2\lambda - (-5 + \lambda + 2 + 3\lambda) = 9 - 2\lambda \geq 0, \\ \Delta_{12} = 7 - (-5 + \lambda + 7 - 2\lambda) = 5 + \lambda \geq 0, \\ \Delta_{13} = 5 - \lambda - (-5 + \lambda + 6) = 4 - 2\lambda \geq 0, \\ \Delta_{21} = 5 - (-4 + 2\lambda + 2 + 3\lambda) = 7 - 5\lambda \geq 0, \\ \Delta_{24} = 9 - \lambda - (-4 + 2\lambda + 8) = 5 - 3\lambda \geq 0, \\ \Delta_{32} = 5 - (0 + 7 - 2\lambda) = -2 + 2\lambda \geq 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} \lambda \leq \dfrac{9}{2}, \\ \lambda \geq -5, \\ \lambda \leq 2, \\ \lambda \leq \dfrac{7}{5}, \leftarrow \\ \lambda \leq \dfrac{5}{3}, \\ \lambda \geq 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow \lambda \in \left[1, \frac{7}{5}\right].$$

Тобто розв’язок $X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 90 & 30 & 0 \\ 60 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$ буде залишатися оптимальним при $\lambda \in \left[1, \frac{7}{5}\right]$, вартість перевезень на цьому етапі складає $f_2 = 730 + 290\lambda$ грош. од.

Крок 3. $\frac{7}{5} \le \lambda \le 3$.

Побудуємо цикл для клітинки (2,1), яка відповідає $\lambda \le \frac{7}{5}$ (табл. 3.65), тоді отримаємо табл. 3.66.

Таблиця 3.66

Крок 3

	v_1=2+3λ	v_2=3λ	v_3=6	v_4=8	Запаси a_i
u_1=-5+λ	6+2λ	7	5-λ	3+λ **50**	50
u_2=3-3λ	5 + **30**	3 – **90**	2+2λ	9-λ	120
u_3=0	2+3λ – **30**	5 ⊕	6 **45**	8 **5**	80
Потреби b_j	60	90	45	55	250

Застосовуючи критерій оптимальності, маємо

$$\begin{cases} \Delta_{11} = 6 + 2\lambda - (-5 + \lambda + 2 + 3\lambda) = 9 - 2\lambda \ge 0, \\ \Delta_{12} = 7 - (-5 + \lambda + 3\lambda) = 12 - 4\lambda \ge 0, \\ \Delta_{13} = 5 - \lambda - (-5 + \lambda + 6) = 4 - 2\lambda \ge 0, \\ \Delta_{23} = 2 + 2\lambda - (3 - 3\lambda + 6) = -7 + 5\lambda \ge 0, \\ \Delta_{24} = 9 - \lambda - (3 - 3\lambda + 8) = -2 + 2\lambda \ge 0, \\ \Delta_{32} = 5 - (0 + 3\lambda) = 5 - 3\lambda \ge 0. \end{cases}$$

Таким чином,

$$
\begin{cases}
\lambda \le \dfrac{9}{2}, \\
\lambda \le 3, \\
\lambda \le 2, \\
\lambda \ge \dfrac{7}{5}, \leftarrow \\
\lambda \ge 1, \\
\lambda \le \dfrac{5}{3}, \leftarrow
\end{cases}
\quad \Rightarrow \lambda \in \left[\frac{7}{5}, \frac{5}{3}\right].
$$

Отже, при $\lambda \in \left[\frac{7}{5}, \frac{5}{3}\right]$ маємо оптимальний план перевезень $X_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 30 & 90 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 45 & 5 \end{pmatrix}$, вартість якого дорівнює $f_3 = 940 + 140\lambda$ грош. од.

Крок 4. $\frac{5}{3} \le \lambda \le 3$.

Після перерозподілу вантажу (табл. 3.66) маємо табл. 3.67.

Таблиця 3.67

Крок 4

	v_1=7	v_2=5	v_3=6	v_4=8	Запаси a_i
u_1=-5+λ	6+2λ	7	5-λ ⊕	3+λ — **50**	50
u_2=-2	5 **60**	3 **60**	2+2λ	9-λ	120
u_3=0	2+3λ	5 **30**	6 — **45**	8 + **5**	80
Потреби b_j	60	90	45	55	250

Отриманий план $X_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 60 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 45 & 5 \end{pmatrix}$ буде оптимальним лише тоді, коли

$$\begin{cases} \Delta_{11} = 6 + 2\lambda - (7 - 5 + \lambda) = 4 + \lambda \ge 0, \\ \Delta_{12} = 7 - (5 - 5 + \lambda) = 7 - \lambda \ge 0, \\ \Delta_{13} = 5 - \lambda - (-5 + \lambda + 6) = 4 - 2\lambda \ge 0, \\ \Delta_{23} = 2 + 2\lambda - (-2 + 6) = -2 + 2\lambda \ge 0, \\ \Delta_{24} = 9 - \lambda - (-2 + 8) = 3 - \lambda \ge 0, \\ \Delta_{31} = 2 + 3\lambda - (0 + 7) = -5 + 3\lambda \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \ge -4, \\ \lambda \le 7, \\ \lambda \le 2, \leftarrow \\ \lambda \ge 1, \\ \lambda \le 3, \\ \lambda \ge \dfrac{5}{3}, \leftarrow \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \left[\frac{5}{3}, 2\right].$$

Вартість перевезень $f_4 = 1090 + 50\lambda$ грош. од.

Крок 5. $2 \le \lambda \le 3$.

Будуємо цикл для клітинки (1,3) (табл. 3.67), для якої $\lambda \le 2$. Отримуємо табл. 3.68.

Таблиця 3.68

Крок 5

	v_1=7	v_2=5	v_3=10-2λ	v_4=8	Запаси a_i
u_1=-5+λ	6+2λ	7	5-λ **45**	3+λ **5**	50
u_2=-2	5 **60**	3 **60**	2+2λ	9-λ	120
u_3=0	2+3λ	5 **30**	6	8 **50**	80
Потреби b_j	60	90	45	55	250

Вартість перевезень отриманого плану $X_5^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 45 & 5 \\ 60 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 50 \end{pmatrix}$ складає $f_5 = 127 - 40\lambda$ грош. од.

Неважко впевнитися, що цей план буде оптимальним при $\lambda \in [2,3]$.

Відповідь:

1. $\lambda \in [0,1]$: $X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 75 & 45 & 0 \\ 60 & 15 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $f_1 = 700 + 320\lambda$ грош. од.

2. $\lambda \in \left[1, \dfrac{7}{5}\right]$: $X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 90 & 30 & 0 \\ 60 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$, $f_2 = 730 + 290\lambda$ грош. од.

3. $\lambda \in \left[\frac{7}{5}, \frac{5}{3}\right]$: $X_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 30 & 90 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 45 & 5 \end{pmatrix}$, $f_3 = 940 + 140\lambda$ грош. од.

4. $\lambda \in \left[\frac{5}{3}, 2\right]$: $X_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 60 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 45 & 5 \end{pmatrix}$, $f_4 = 1090 + 50\lambda$ грош. од.

5. $\lambda \in [2,3]$: $X_5^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 45 & 5 \\ 60 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 50 \end{pmatrix}$, $f_5 = 127 - 40\lambda$ грош. од.

Питання до розділу

1. Загальна постановка транспортної задачі.
2. Відкрита і закрита транспортна задача.
3. Умова розв’язності транспортної задачі.
4. Які специфічні властивості дозволяють виділити транспортні задачі в окремий клас задач лінійного програмування?
5. Що називається планом перевезень?
6. Визначення допустимого і опорного плану транспортної задачі.
7. Методи побудови початкового плану.
8. Випадок виродженого початкового плану.
9. Що називається циклом перерозподілу вантажу?
10. Критерій оптимальності транспортної задачі.
11. Основні етапи методу потенціалів.
12. Ознака альтернативного оптимуму в транспортній задачі.
13. Задача з обмеженнями на пропускну спроможність. Алгоритм її розв’язання.
14. Задача з обмеженнями на пропускну спроможність. Алгоритм її розв’язання.
15. Задача з фіксованими обсягами перевезень. Алгоритм її розв’язання.
16. Транспортна задача за критерієм часу. Алгоритм її розв’язання.
17. Транспортна параметрична задача. Алгоритм її розв’язання.

Завдання

1. Розв'язати закриту транспортну задачу, вихідні дані якої наведені в табл. 3.69, 3.70, побудувавши опорний план за методом північно-західного кута:

Таблиця 3.69

Завдання 1.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	2	2	5	4	85
A_2	3	1	4	2	125
A_3	2	8	4	7	150
Потреби b_j	60	95	70	135	

Таблиця 3.70

Завдання 1.2

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	3	5	7	110
A_2	4	6	2	85
A_3	3	1	4	145
A_4	5	6	2	70
Потреби b_j	175	95	140	

Відповідь:

1.1. $f = 950$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 85 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 115 \\ 60 & 0 & 70 & 20 \end{pmatrix}$.

1.2. $f = 915$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 70 \\ 50 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати закриту транспортну задачу, вихідні дані якої наведені в табл. 3.71 – 3.73, побудувавши опорний план за методом мінімальної вартості.

Таблиця 3.71

Завдання 2.1

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	2	4	3	110
A_2	5	1	4	155
A_3	3	6	5	125
A_4	5	2	4	90
Потреби b_j	100	235	145	

Таблиця 3.72

Завдання 2.2

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	3	8	10	4	60
A_2	7	2	3	9	25
A_3	4	3	6	2	35
Потреби b_j	45	40	20	15	

Таблиця 3.73

Завдання 2.3

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	6	2	4	5	145
A_2	4	3	1	2	120
A_3	3	6	2	5	135
Потреби b_j	90	55	105	150	

Відповідь:

2.1. $f = 1110$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 110 \\ 0 & 155 & 0 \\ 100 & 0 & 25 \\ 0 & 80 & 10 \end{pmatrix}$.

2.2. $f = 370$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 5 & 20 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3. $f = 1100$ грош. од., $X^* = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 55 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \\ 90 & 0 & 45 & 0 \end{pmatrix} +$

$$+ (1-\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 55 & 60 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 120 \\ 90 & 0 & 45 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 55 & 60(1-\alpha) & 30+60\alpha \\ 0 & 0 & 60\alpha & 120-60\alpha \\ 90 & 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,1].$$

3. Відкрита транспортна задача.

На трьох станціях A_1, A_2, A_3 зосереджено a_1, a_2, a_3 тонн вантажу відповідно, який потрібно перевезти в три пункти призначення B_1, B_2, B_3, причому в кожний з них потрібно завезти відповідно b_1, b_2, b_3 тон. Вартість перевезень c_{ij} однієї тонни вантажу з пункту A_i у пункт B_j задано матрицею $C = \left\| c_{ij} \right\|$, $i = 1,2,3; j = 1,2,3.$ Скласти план перевезень, що має найменшу вартість.

1. $a_1 = 120; a_2 = 55; a_3 = 115;\ b_1 = 105; b_2 = 55; b_3 = 90;\ C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

2. $a_1 = 90; a_2 = 85; a_3 = 105;\ b_1 = 105; b_2 = 35; b_3 = 75;\ C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Відповідь:

3.1. $f = 955$ грош. од., $X^* = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 0 & 55 & 0 \\ 105 & 0 & 10 \end{pmatrix} +$

$$+ (1-\alpha)\begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 \\ 25 & 0 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80(1-\alpha) & 0 & 80\alpha \\ 0 & 55 & 0 \\ 25+80\alpha & 0 & 90-80\alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,1].$$

У першому пункті залишиться 40 тон вантажу.

3.2. $f = 430$ грош. од., $X^* = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 \\ 0 & 35 & 0 \\ 105 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$$+ (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 \\ 35 & 0 & 0 \\ 70 & 35 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 \\ 35(1-\alpha) & 35\alpha & 0 \\ 70+35\alpha & 35(1-\alpha) & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,1].$$

У першому пункті залишилося 15 тон вантажу, в другому – 50 тон.

4. Залізниця набирає штат співробітників і має 4 групи різних посад по 5, 6, 4, 3 вакантних одиниці в кожній групі відповідно. Кандидати проходять тестування, за результатами яких їх розподіляють на три групи відповідно по 7, 6 і 5 осіб у кожній. Для кожного кандидата з i-ї групи потрібні певні витрати c_{ij} грн. на навчання для займання j-ї посади. Потрібно розподілити кандидатів на посади таким чином, щоб сумарні витрати на їх навчання були мінімальними. Затрати на навчання наведені в табл. 3.74.

Таблиця 3.74

Затрати на навчання

Група кандидатів	Посади			
	1	2	3	4
1	25	40	60	20
2	35	29	55	40
3	32	33	48	30

Відповідь: $f = 558$ грн, $X^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Вантаж, який зберігається на трьох складах A_1, A_2, A_3 необхідно перевезти до чотирьох споживачів B_1, B_2, B_3, B_4. Запаси a_1, a_2, a_3 кожного складу, потреби споживачів b_1, b_2, b_3, b_4 і вартість перевезень однієї тонни вантажу наведені в табл. 3.75. Скласти план перевезень, що має найменшу вартість.

Таблиця 3.75

Дані завдання 5

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	n+2	12	n+8	12-n	100
A_2	n+4	6	15-n	21-2n	3n+50
A_3	20-n	n+10	14	15	4n+70
Потреби b_j	100	5n+20	n+40	n+60	

У таблиці n залежно від варіанту може змінюватись у межах $n=\overline{1,10}$.

Відповідь:

5.1. $n=1$: $f=1855$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 72 & 0 & 28 & 0 \\ 28 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 61 \end{pmatrix}$.

5.2. $n=2$: $f=2020$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 74 & 0 & 0 & 26 \\ 26 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 36 \end{pmatrix}$.

5.3. $n=3$: $f=2161$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 76 & 0 & 0 & 24 \\ 24 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 39 \end{pmatrix}$.

5.4. $n=4$: $f=2306$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 78 & 0 & 0 & 22 \\ 22 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 44 & 42 \end{pmatrix}$.

5.5. $n=5$: $f=2455$ грош. од., $X^*=\alpha\begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 & 20 \\ 20 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}+$

$$+(1-\alpha)\begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 45 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35+45\alpha & 0 & 0 & 60-40\alpha \\ 20 & 45 & 0 & 0 \\ 45-45\alpha & 0 & 45 & 45\alpha \end{pmatrix},\ \alpha\in[0,1].$$

5.6. $n=6$: $f=2446$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 34 & 0 & 0 & 66 \\ 0 & 50 & 18 & 0 \\ 66 & 0 & 28 & 0 \end{pmatrix}$.

5.7. $n=7$: $f=2395$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 33 & 0 & 0 & 67 \\ 0 & 55 & 16 & 0 \\ 67 & 0 & 31 & 0 \end{pmatrix}$.

5.8. $n=8$: $f=2342$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 68 \\ 0 & 60 & 14 & 0 \\ 68 & 0 & 34 & 0 \end{pmatrix}$.

5.9. $n=9$: $f=2225$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 31 & 0 & 69 \\ 0 & 34 & 43 & 0 \\ 100 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

5.10. $n=10$: $f=2080$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 70 \\ 0 & 40 & 40 & 0 \\ 100 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Розв’язати транспортну задачу враховуючи, що за маршрутом (1,3) потрібно перевезти не більше 50 од. вантажу, за маршрутом (3,1) - не менше 60 од., а перевезення за маршрутом (2,3) взагалі заборонені. Вихідні дані наведені в табл. 3.76.

Таблиця 3.76

Дані завдання 6

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	6	2	4	5	140
A_2	4	3	1	2	155
A_3	3	6	2	5	135
Потреби b_j	100	90	105	150	

Відповідь: $f=1050$ грош. од., $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 90 & 50 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 150 \\ 80 & 0 & 55 & 0 \end{pmatrix}$. Споживач B_1 не отримав 15 од. вантажу.

7. Скласти оптимальний план перевезень, враховуючи, що за маршрутами (2,1) і (4,3) перевезення заборонені, за маршрутом (3,2) необхідно перевезти не більше 30 од. вантажу, а за маршрутами (1,1) і (4,1) - не менш ніж 100 од. Вихідні дані наведені в табл. 3.77.

Таблиця 3.77

Дані завдання 7

	B_1	B_2	B_3	Запаси a_i
A_1	5	6	9	250
A_2	3	1	4	150
A_3	8	3	2	190
A_4	4	6	3	180
Потреби b_j	290	320	160	

Відповідь: $f = 2670$ грош. од., $X^* = \begin{pmatrix} 110 & 140 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 30 & 160 \\ 180 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Скласти план перевезень, при якому час доставки всіх вантажів буде найменшим, побудувавши початковий план:

а) методом північно-західного кута;

б) методом подвійної переваги.

Інтервали часу, год, необхідного для доставки за всіма маршрутами, а також запаси вантажу і потреба в ньому наведені в табл. 3.78.

Таблиця 3.78

Дані завдання 8

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси a_i
A_1	5	8	11-n	10+n	200-12n
A_2	12-n	6+n	4+n	6	100+8n
A_3	8+n	10	3+n	9+2n	50+4n
Потреби b_j	150-3n	20+15n	100-5n	80-7n	

У таблиці n залежно від варіанта може змінюватись у межах $n = \overline{1,10}$.

Відповідь:

8.1. $n=1$: $T=10$ год, $X^*=\begin{pmatrix}147 & 35 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 35 & 73\\ 0 & 0 & 54 & 0\end{pmatrix}$.

8.2. $n=2$: $T=8$ год, $X^*=\begin{pmatrix}144 & 32 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 32 & 66\\ 0 & 0 & 58 & 0\end{pmatrix}$.

8.3. $n=3$: $T=9$ год, $X^*=\alpha\begin{pmatrix}141 & 23 & 0 & 0\\ 0 & 42 & 23 & 59\\ 0 & 0 & 62 & 0\end{pmatrix}+$

$$+(1-\alpha)\begin{pmatrix}99 & 65 & 0 & 0\\ 42 & 0 & 23 & 59\\ 0 & 0 & 62 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}99+42\alpha & 65-42\alpha & 0 & 0\\ 42-42\alpha & 42\alpha & 23 & 59\\ 0 & 0 & 62 & 0\end{pmatrix}, \alpha\in[0,1].$$

8.4. $n=4$: $T=8$ год, $X^*=\begin{pmatrix}58 & 80 & 14 & 0\\ 80 & 0 & 0 & 52\\ 0 & 0 & 66 & 0\end{pmatrix}$.

8.5. $n=5$: $T=8$ год, $X^*=\begin{pmatrix}40 & 95 & 5 & 0\\ 95 & 0 & 0 & 45\\ 0 & 0 & 70 & 0\end{pmatrix}$.

8.6. $n=6$: $T=10$ год, $X^*=\begin{pmatrix}22 & 106 & 0 & 0\\ 110 & 0 & 0 & 38\\ 0 & 4 & 70 & 0\end{pmatrix}$.

8.7. $n=7$: $T=10$ год, $X^*=\alpha\begin{pmatrix}4 & 51 & 61 & 0\\ 125 & 0 & 0 & 31\\ 0 & 74 & 4 & 0\end{pmatrix}+$

$$+(1-\alpha)\begin{pmatrix}4 & 47 & 65 & 0\\ 125 & 0 & 0 & 31\\ 0 & 78 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 47+4\alpha & 65-4\alpha & 0\\ 125 & 0 & 0 & 31\\ 0 & 78-4\alpha & 4\alpha & 4\end{pmatrix}, \alpha\in[0,1].$$

8.8. $n=8$: $T=12$ год, $X^*=\begin{pmatrix}0 & 58 & 46 & 0\\ 126 & 0 & 14 & 24\\ 0 & 82 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

8.9. $n=9$: $T=13$ год, $X^*=\begin{pmatrix}0 & 69 & 23 & 0\\ 123 & 0 & 32 & 17\\ 0 & 86 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

8.10. $n=10$: $T=14$ год, $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 50 & 10 \\ 0 & 90 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. На трьох складах зосереджено 100, 160 і 110 тонн однорідного вантажу, який потрібно перевезти трьом споживачам у кількості 150, 140, 80 тонн відповідно. Вартість перевезень змінюється залежн від завантаження залізниці і задана матрицею:

9.1. $C=\begin{pmatrix} 3 & \textit{від } 2 \textit{ до } 1 & \textit{від } 5 \textit{ до } 7 \\ 4 & 5 & \textit{від } 6 \textit{ до } 3 \\ 2 & \textit{від } 6 \textit{ до } 7 & 9 \end{pmatrix}$.

9.2. $C=\begin{pmatrix} \textit{від } 5 \textit{ до } 2 & \textit{від } 2 \textit{ до } 6 & 7 \\ \textit{від } 8 \textit{ до } 7 & 9 & 8 \\ 10 & \textit{від } 6 \textit{ до } 5 & \textit{від } 7 \textit{ до } 10 \end{pmatrix}$.

Відповідь:

9.1. $\lambda \in [0,1]$, $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 40 & 40 & 80 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = 1260 - 340\lambda$ грош. од.

9.2. 1) $\lambda \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$, $X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 150 & 0 & 10 \\ 0 & 40 & 70 \end{pmatrix}$, $f_1 = 2210 + 420\lambda$ грош. од.

2) $\lambda \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right]$, $X_2^* = \begin{pmatrix} 70 & 30 & 0 \\ 80 & 0 & 80 \\ 0 & 110 & 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = 2350 - 280\lambda$ грош. од.

3) $\lambda \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $X_3^* = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 50 & 30 & 80 \\ 0 & 110 & 0 \end{pmatrix}$, $f_3 = 2470 - 460\lambda$ грош. од.

Розділ 4
НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Постановка задачі нелінійного програмування

Загальна задача нелінійного програмування (ЗНП) визначається як задача знаходження мінімуму або максимуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множині $G, G \subset R^n$, яка визначається системою обмежень

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, i = \overline{1,k}, \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, i = \overline{k+1,m}, \end{cases}$$
$$x_j \in R, j = \overline{1,n},$$

де хоча б одна з функцій $f, g_i, i = \overline{1,m}$ є нелінійною.

Таким чином, загальна постановка ЗНП має вигляд

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min), \tag{4.1}$$
$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, i = \overline{1,k}, \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, i = \overline{k+1,m}, \end{cases} \tag{4.2}$$
$$x_j \in R, j = \overline{1,n}. \tag{4.3}$$

Умови (4.3) можуть бути замінені умовами невід’ємності, цілочисловості деяких змінних залежно від потреб практичних задач.

Якщо умови (4.2), (4.3) відсутні, то така задача називається *задачею безумовної оптимізації*.

Аналогічно до ЗЛП (задачі лінійного програмування) область G, яка визначається системою обмежень (4.2), вираз (4.3) називається *областю допустимих розв’язків* (ОДР), сукупність значень змінних $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, які задовольняють систему обмежень (4.2), (4.3) - *допустимим планом ЗНП*, а функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - *цільовою функцією*.

О*птимальним планом* $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ *або точкою глобального максимуму (мінімуму)* називають допустимий план, на якому досягається максимум або мінімум функції f.

Отримане значення $f\left(X^*\right)$ називають *глобальним максимумом (мінімумом)*.

Зауважимо, що в теорії нелінійного програмування існує також поняття локального максимуму (мінімуму).

Точка $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ називається точкою *локального максимуму (мінімуму)*, якщо існує такий проколотий окіл точки X^0, який належить ОДР і для будь-якої точки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цього околу виконується нерівність $f(X) < f\left(X^0\right)$ ($f(X) > f\left(X^0\right)$), при цьому число $f\left(X^0\right)$ називається *локальним максимумом (мінімумом)* функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

У ЗНП цільова функція може досягати свого екстремального (максимального або мінімального) значення як на границі ОДР, так і всередині неї, на відміну від задач лінійного програмування. Сама ж ОДР може бути неопуклою або, у разі опуклості, мати нескінчену кількість кутових точок (рис. 4.1).

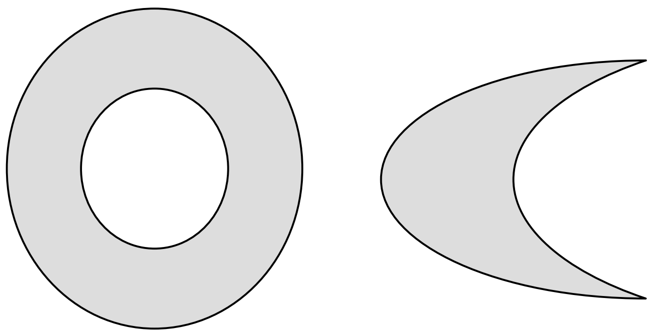


Рис. 4.1. Приклади неопуклих областей

Ряд практичних задач пов'язано зі знаходженням оптимального розв'язку за наявності деякої кількості обмежень на змінні, що суттєво ускладнює процедуру пошуку оптимуму. При цьому може порушуватися навіть основна умова, відповідно до якої екстремум повинен досягатися в критичних точках, тобто точках, у яких частинні похідні першого порядку або дорівнюють нулю, або не існують.

Наприклад, безумовний мінімум функції однієї змінної $y = (x+3)^2$ досягається в стаціонарній точці $x = -3$ (точку, в якій похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарною*). Але, якщо потрібно знайти мінімум цієї функції з урахуванням додаткового обмеження $x \geq 0$, то буде знайдений умовний мінімум, якому відповідає точка $x = 0$, яка не є стаціонарною, оскільки $y'(0) = 2(x+3)\big|_{x=0} = 6$.

Для ЗНП не існує універсального методу розв'язання. У зв'язку з цим при розв'язанні таких задач застосовують спеціальні методи, які залежать від виду цільової функції (4.1) і системи обмежень (4.2). До таких методів належать графічний метод і метод множників Лагранжа, градієнтні методи, опукле та квадратичне програмування. ЗНП, на змінні яких не накладено додаткових умов (4.2), тобто задачі пошуку безумовного екстремуму функції, розв'язують методами класичного математичного аналізу.

Нелінійне програмування поділяють на два основних типи задач:

- задачі опуклого програмування;
- задачі неопуклого програмування.

Опукле програмування характеризується тим, що цільова функція є опуклою для задачі пошуку мінімуму (увігнутою при пошуку максимуму), а обмеження задають опуклу ОДР. Всі інші типи задач належать до задач неопуклого програмування.

У свою чергу, в опуклому програмуванні виділяють окремий клас задач – задачі квадратичного програмування, цільова функція яких є поліномом другого порядку, а ОДР задається системою лінійних обмежень.

4.2. Графічний метод розв'язання ЗНП

Графічний метод розв'язання ЗНП можна застосовувати у випадку, коли функції $f, g_i, i = \overline{1,m}$ залежать від двох змінних:

$$f(x_1, x_2) \to \max(\min), \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2) \le b_i, i = \overline{1,k}; \\ g_i(x_1, x_2) = b_i, i = \overline{k+1,m}; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$x_1, x_2 \in R. \tag{4.6}$$

Алгоритм графічного розв'язання ЗНП:

1. Будують ОДР, яка визначається умовами (4.5)-(4.6). Якщо ця область порожня, то задача розв'язків не має.

2. Будують лінії рівня $f(x_1, x_2) = C$ при різних значеннях параметра C.

3. Визначають напрям зростання для задачі максимізації (або спадання для задачі мінімізації) ліній рівня цільової функції.

4. Визначають точку X^* з ОДР, через яку проходить лінія рівня з найбільшим значенням параметра C для задачі пошуку максимуму функції (4.4) (або з найменшим значенням параметра C у разі пошуку мінімуму). Якщо цільова функція необмежена зверху (для задачі максимізації) або знизу (для задачі мінімізації) на ОДР, то задача розв'язків немає.

5. Визначають координати знайденої точки $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ і обчислюють значення цільової функції $f^* = f(X^*)$.

Приклад 1. За допомогою графічного методу знайти екстремальні значення функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. ***Знаходження мінімуму функції.***

1. Будуємо ОДР (рис. 4.2).

2. Лінії рівня $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = C$ - це сім'я концентричних кіл з центром у початку координат і радіусом $R = \sqrt{C}$.

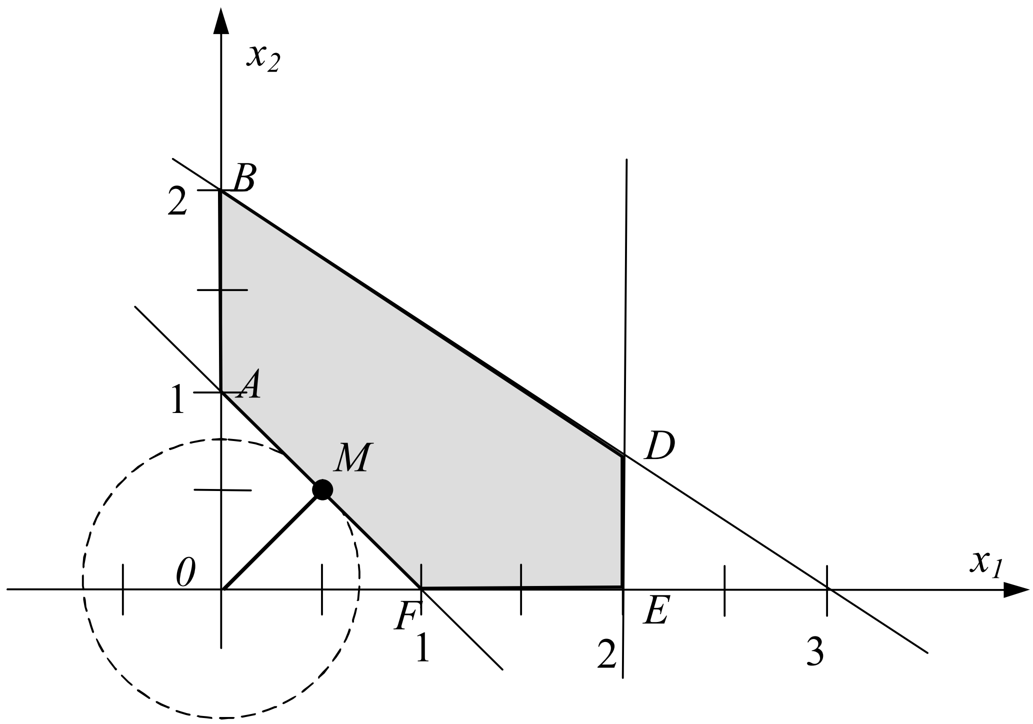


Рис. 4.2. Знаходження мінімуму функції прикладу 1

3. Визначаємо точку, яка може бути мінімумом. Для цього будуємо кола різних радіусів з центром у початку координат і відмічаємо точку, що належить ОДР і відповідає колу з найменшим радіусом. Очевидно, що це точка *M*.

4. Вектор-градієнт функції $grad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_1, 2x_2)$ в точці (x_1, x_2) перпендикулярний до лінії рівня $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = C$, що проходить через цю точку. Пряма $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1$, яка є дотичною до кола $x_1^2 + x_2^2 = C$, має нормальний вектор $\vec{N} = (1{,}1)$. Оскільки вектори $grad\, f = (2x_1, 2x_2)$ і $\vec{N} = (1{,}1)$ колінеарні, то

$$\frac{2x_1}{1} = \frac{2x_2}{1} .$$

Звідси маємо рівняння прямої *OM*: $x_1 = x_2$. Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо координати точки *M*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_2 = \frac{1}{2},$$

тобто $X^*\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5. Знайдемо мінімальне значення цільової функції:

$$\min f\left(x_1, x_2\right) = f^* = f\left(x_1^*, x_2^*\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $f^* = \min f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Знаходження максимуму функції.

За рис. 4.3 коло найбільшого радіусу перетинає область допустимих розв'язків у точці D, яка є точкою перетину прямих:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ x_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3},$$

тобто $X^*\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(2, \frac{2}{3}\right)$.

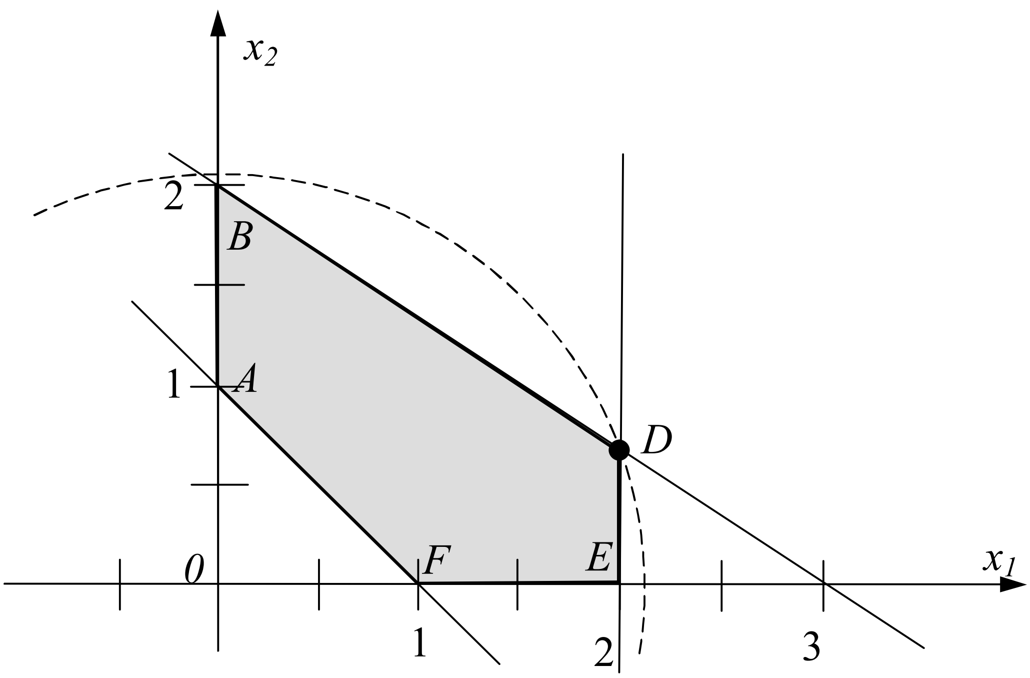


Рис. 4.3. Знаходження максимуму функції прикладу 1

Відповідь: $\max f = f^* = f\left(2, \frac{2}{3}\right) = 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}$.

Приклад 2. За допомогою графічного методу знайти екстремальні значення функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 8x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 x_2 \ge 7, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Лініями рівня для функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 8x_2$ є сім'я кіл $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = C$ з центром у точці $O'(3,4)$. З рис. 4.4 видно, що свого мінімуму цільова функція досягає в точці $O'(3,4)$, $\min f = f(3,4) = 3^2 - 18 + 4^2 - 32 = -25$.

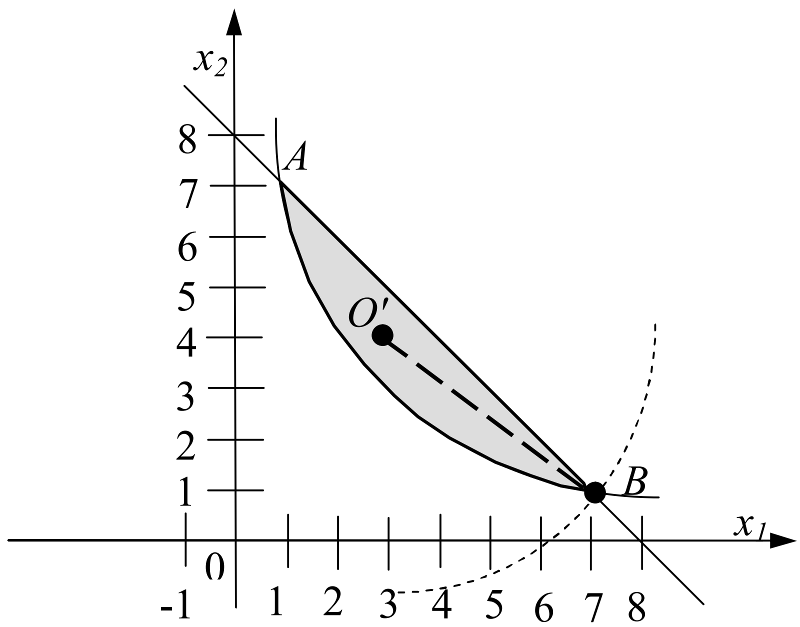


Рис. 4.4. Графічне розв'язання прикладу 2

Як бачимо, точка, у якій досягається мінімальне значення цільової функції знаходиться всередині ОДР.

Максимальне значення досягається в точці B, координати якої знаходяться як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 7,\ x_2 = 1.$$

Відповідь: $\max f = f(7,1) = 7^2 - 42 + 1^2 - 8 = 0$, $\min f = f(3,4) = -25$.

4.3. Задачі нелінійного програмування без обмежень

Розглянемо задачу знаходження екстремуму функції багатьох змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Необхідні умови екстремуму функції.

Якщо функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в точці $X^\circ = \left(x_1^\circ, x_2^\circ, ..., x_n^\circ\right)$ екстремум, то частинні похідні першого порядку по змінних $x_i, i = \overline{1,n}$ дорівнюють нулю або не існують.

Точка $X^\circ = \left(x_1^\circ, x_2^\circ, ..., x_n^\circ\right)$, у якій частинні похідні

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_2} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

дорівнюють нулю, називається *стаціонарною точкою функції* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Стаціонарні точки і точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками функції* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для перевірки характеру отриманих точок необхідно використовувати достатні умови.

Нехай $X^\circ = \left(x_1^\circ, x_2^\circ, ..., x_n^\circ\right)$ – стаціонарна точка функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, причому ця функція двічі диференційована в деякому околі точки X° і всі її частинні похідні другого порядку неперервні в цій точці.

Введемо квадратну матрицю розмірністю $n \times n$, елементами якої є частинні похідні другого порядку $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \, \partial x_j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, тобто

$$H_f(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Матриця (4.8) називається *матрицею Гессе функції* f, а її визначник – *гессіаном функції* f.

Кутовими мінорами M_i, $i = \overline{1,n}$ квадратної матриці називаються мінори

$$M_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \; M_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$M_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}, \tag{4.9}$$

тобто мінори порядку $\overline{1,n}$ матриці (4.8), розташовані в лівому верхньому куті.

Достатні умови екстремуму функції.

Якщо всі кутові мінори M_i , $i=\overline{1,n}$ (4.9) матриці (4.8) додатні в точці X°, то в цій точці функція $f(x_1,x_2,...,x_n)$ має *мінімум*.

Якщо ж всі головні мінори гессіана функції f парного порядку додатні, а непарного порядку – від'ємні в точці X°, тобто $M_1<0, M_2>0, M_3<0,...,$ то в цій точці функція має *максимум*.

У випадку функції двох змінних $f(x_1,x_2)$ достатні умови екстремуму можна сформулювати так:

1) якщо $M_2>0$ в точці X°, то функція $f(x_1,x_2)$ має в цій точці екстремум, причому при $M_1>0$ – мінімум, а при $M_1<0$ – максимум;

2) якщо $M_2<0$ в точці X°, то в цій точці функція немає екстремуму;

3) якщо $M_2=0$, то потрібно додаткове дослідження.

Приклад 3. Знайти екстремум функції $f=x_1^3+x_2^3-9x_1x_2+6$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему (4.7):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=3x_1^2-9x_2=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=3x_2^2-9x_1\ =0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1^2-9x_2=0, \\ 3x_2^2-9x_1\ =0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо дві стаціонарні точки $X_1^\circ=(0,0)$ і $X_2^\circ=(3,3)$. Оскільки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=6x_1,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=6x_2,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}=-9,$$

то матриця Гессе має вигляд

$$H_f(X)=\begin{pmatrix} 6x_1 & -9 \\ -9 & 6x_2 \end{pmatrix}.$$

У точці $X_1^\circ=(0,0)$: $H_f\left(X_1^\circ\right)=\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $M_2=\begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}=-81$, отже в точці $X_1^\circ=(0,0)$ функція не має екстремуму.

У точці $X_1^\circ=(3,3)$: $H_f\left(X_1^\circ\right)=\begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$, тобто $M_2=\begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix}=$ $=324-81=263>0$, отже в точці $X_1^\circ=(3,3)$ функція має мінімум, оскільки $M_1=18>0$.

Відповідь: $\min f=f(3,3)=3^3+3^3-9\cdot 3\cdot 3+6=-21$.

Приклад 4. Знайти екстремум функції

$$f=-x_1^2-x_2^2-3x_3^2+x_1x_3+2x_1+5x_2+10x_3.$$

Розв’язання. Використовуючи необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=-2x_1+x_3+2=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-2x_2+5=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}=-6x_3+x_1+10=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+x_3+2=0, \\ -2x_2+5=0, \\ -6x_3+x_2+10=0, \end{cases}$$

маємо одну стаціонарну точку $X^\circ=\left(2,\dfrac{5}{2},2\right)$. Гессіан для функції f:

$$H_f(X)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кутові мінори:

$$M_1=-2<0, M_2=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=4>0,\ M_3=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -6\end{vmatrix}=-22<0.$$

Оскільки знаки мінорів чергуються, причому $M_1<0$, то точка $X^\circ=\left(2,\frac{5}{2},2\right)$ – точка максимуму функції.

Відповідь: $\max f=f\left(2,\frac{5}{2},2\right)=-4-\frac{25}{4}-12+4+4+\frac{25}{2}+20=\frac{73}{4}$.

4.4. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями. Метод множників Лагранжа

Розглянемо задачу такого виду:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)\to\max(\min), \tag{4.10}$$

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i, i=\overline{1,m}; \tag{4.11}$$

$$x_j\in R, j=\overline{1,n}, \tag{4.12}$$

де функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$, $g_i(x_1,x_2,...,x_n)$, $i=\overline{1,m}$ неперервні разом зі своїми частинними похідними по $x_j, j=\overline{1,n}$.

Задача (4.10)-(4.12) є задачею знаходження умовного екстремуму.

Ця задача в багатьох випадках може бути розв'язана як задача безумовної оптимізації, що була отримана шляхом виключення з цільової функції m незалежних змінних за допомогою рівностей (4.11). Наявність обмежень-рівностей фактично дозволяє зменшити розмірність початкової задачі з n до $n-m$. Для ілюстрації розглянемо приклад.

Приклад 5. Знайти екстремум функції $f=x_1x_2^2x_3^3$, якщо $x_1+3x_2-4x_3=12$.

Розв'язання. Виключивши змінну x_1 з обмеження, отримаємо задачу знаходження безумовного екстремуму функції двох змінних:

$$f = (12 - 3x_2 + 4x_3)x_2^2\, x_3^3 \to extr\,.$$

Метод виключення змінних може бути застосований лише у випадках, коли рівняння-обмеження можна розв'язати відносно деякого конкретного набору незалежних змінних або коли ця процедура нескладна.

У загальному випадку при розв'язанні ЗНП доцільно використовувати *метод множників Лагранжа*, який зводить задачу умовного екстремуму (4.10)-(4.12) до задачі безумовного екстремуму для функції

$$\begin{aligned} &L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = \\ &= f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right), \end{aligned} \tag{4.13}$$

де $\lambda_i, i = \overline{1,m}$ – невідомі параметри, які називаються *множниками Лагранжа*, а сама функція виду (4.13) називається *функцією Лагранжа*.

Необхідну умову екстремуму для функції Лагранжа (4.13) записують у вигляді системи рівнянь, складених з частинних похідних функції Лагранжа (4.13) по змінним $x_j, \lambda_i,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i\, \partial g_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Достатні умови існування умовного екстремуму в точці $\left(X^\circ, \Lambda^\circ\right)$, яка є розв'язком системи (4.14), визначають за знаком другого диференціала $d^2 L(X, \Lambda)$:

$$d^2L(X,\Lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, dx_j .$$

Функція (4.10) У стаціонарній точці $\left(X^\circ, \Lambda^\circ\right)$ має умовний максимум, якщо в ній $d^2L(X,\Lambda) < 0$, і умовний мінімум, якщо $d^2L(X,\Lambda) > 0$.

Можна дослідити і іншим шляхом, розглянувши таку матрицю Гессе для функції Лагранжа (4.13):

$$H_L = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\textit{m…стовпців}} \qquad \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\textit{n стовпців}} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \, \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \, \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (4.15)$$

тоді:

1) точка $\left(X^\circ, \Lambda^\circ\right)$ є точкою *умовного мінімуму*, якщо знаки кутових мінорів $M_{m+1}, M_{m+2}, \ldots, M_{m+1}, M_{m+n}$ матриці H_L співпадають зі знаком $(-1)^m$;

2) точка $\left(X^\circ, \Lambda^\circ\right)$ є точкою *умовного максимуму*, якщо знаки кутових мінорів $M_{m+1}, M_{m+2}, \ldots, M_{m+1}, M_{m+n}$ матриці H_L чергуються, причому знак мінора M_{m+1} співпадає зі знаком $(-1)^{m+1}$.

У випадку, коли задача має лише одне обмеження, це правило спрощується: якщо визначник $\det H_L$ матриці (4.15) в точці $\left(X^{\circ}, \Lambda^{\circ}\right)$ від'ємний, то функція має в цій точці *умовний мінімум*, якщо додатний – *умовний максимум*.

Алгоритм методу множників Лагранжа для ЗНП:

1. Скласти функцію Лагранжа (4.13) для задачі (4.10)-(4.12).
2. Скласти систему (4.14).
3. Розв'язати систему (4.14) і визначити точки $\left(X^{\circ}, \Lambda^{\circ}\right) = \left(x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, ..., x_n^{\circ}, \lambda_1^{\circ}, ..., \lambda_m^{\circ}\right)$, у яких функція Лагранжа може мати екстремум.
4. Перевірити кожну отриману точку $\left(X^{\circ}, \Lambda^{\circ}\right)$ на оптимальність.

Іноді перевірку оптимальності отриманої точки $\left(X^{\circ}, \Lambda^{\circ}\right)$ можна здійснити за допомогою гессіана, складеного для функції f, бо $b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = \overline{1, m}$.

У загальному випадку розв'язання системи (4.13) є досить складним через її нелінійність.

Приклад 6. Знайти екстремум функції $f = x_1^2 + (x_2 + 2)^2$, якщо $3x_1 + 2x_2 = 6$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа, враховуючи, що $g(x) = 6 - 3x_1 - 2x_2$:

$$L = x_1^2 + (x_2 + 2)^2 + \lambda(6 - 3x_1 - 2x_2).$$

Використовуючи систему рівнянь (4.14)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 + 2) - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 - 3x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

знаходимо стаціонарну точку функції Лагранжа: $x_1 = \frac{30}{13}, x_2 = -\frac{6}{13}, \lambda = \frac{20}{13}$. Характер оптимальності отриманої точки визначимо за допомогою матриці Гессе для функції f. Маємо

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_2 + 2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,$$

тобто $H_f(X, \Lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Оскільки $M_1 = 2 > 0, \ M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, то в точці $X^* = \left(\frac{30}{13}, -\frac{6}{13}\right)$ функція $f = x_1^2 + (x_2 + 2)^2$ має мінімум, який дорівнює $\min f = \left(\frac{30}{13}\right)^2 + \left(-\frac{6}{13} + 2\right)^2 = \frac{1300}{169}$.

Відповідь: $\min f = f\left(\frac{30}{13}, -\frac{6}{13}\right) = \frac{1300}{169}$.

Приклад 7. Знайти екстремум функції $f = 2x_1 + 4x_2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Розв'язання. Функція Лагранжа має вигляд

$$L = 2x_1 + 4x_2 + \lambda\left(20 - x_1^2 - x_2^2\right).$$

Для знаходження стаціонарних точок запишемо систему (4.14):

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2\lambda x_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 2\lambda x_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Система має два розв’язки

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4, \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -4, \\ \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

З’ясуємо характер екстремуму в кожній з точок $\left(X^1, \Lambda^1\right) = \left(2, 4, \frac{1}{2}\right)$ та $\left(X^2, \Lambda^2\right) = \left(-2, -4, -\frac{1}{2}\right)$. Побудуємо матрицю (4.15), враховуючи, що $g(x_1, x_2) = \left(20 - x_1^2 - x_2^2\right)$:

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & g'_{x_1} & g'_{x_2} \\ g'_{x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \, \partial x_2} \\ g'_{x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2\lambda & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

і знайдемо її визначник

$$\det H_L = \begin{vmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2\lambda & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & \lambda & 0 \\ x_2 & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

У точці $\left(X^1, \Lambda^1\right) = \left(2, 4, \frac{1}{2}\right)$ отримаємо

$$\det H_L\left(X^1, \Lambda^1\right) = -8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = 80 > 0,$$

тому функція $f = 2x_1 + 4x_2$ має в цій точці умовний максимум, $\max f = f(2{,}4) = 20$.

Аналогічно для точки $\left(X^2, \Lambda^2\right) = \left(-2,-4,-\frac{1}{2}\right)$ маємо

$$\det H_L\left(X^2, \Lambda^2\right) = -8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -80 < 0,$$

тобто точка $(-2,-4)$ є умовним мінімумом функції, $\min f = f(-2,-4) = -20$.

Оптимальність у стаціонарних точках можна також визначити за допомогою знака другого диференціала функції Лагранжа:

$$d^2 L = -2\lambda dx_1^2 + 2 \cdot 0 dx_1 dx_2 - 2\lambda dx_2^2 = -2\lambda\left(dx_1^2 + dx_2^2\right).$$

Оскільки $dx_1^2 + dx_2^2 > 0$, то знак другого диференціала залежить від знака λ. Таким чином, при $\lambda = \frac{1}{2}$ отримаємо $d^2 L = -\left(dx_1^2 + dx_2^2\right) < 0$, тобто в точці $(2{,}4)$ функція має максимум. Аналогічно, при $\lambda = -\frac{1}{2}$, $d^2 L = dx_1^2 + dx_2^2 > 0$ і в точці $(-2,-4)$ отримаємо умовний мінімум функції $f = 2x_1 + 4x_2$.

Відповідь: $\max f = f(2{,}4) = 20$, $\min f = f(-2,-4) = -20$.

Приклад 8. Знайти екстремум функції $f = 5x_1^2 + x_2^3 - 2x_1 x_2$, якщо $2x_1 + x_2 = 0$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа:

$$L = 5x_1^2 + x_2^3 - 2x_1 x_2 + \lambda\left(-2x_1 - x_2\right).$$

З необхідних умов екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 10x_1 - 2x_2 - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

знайдемо дві стаціонарні точки $\left(X^1, \Lambda^1\right) = (0{,}0{,}0)$ і $\left(X^2, \Lambda^2\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$. Для з'ясування характеру оптимальності отриманих точок обчислимо другий диференціал функції Лагранжа. Оскільки $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 10$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 6x_2$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = -2$, то

$$d^2 L = 10dx_1^2 + 2 \cdot (-2)dx_1 dx_2 + 6x_2 dx_2^2 = 10dx_1^2 - 4dx_1 dx_2 + 6x_2 dx_2^2.$$

З обмеження $2x_1 + x_2 = 0$ маємо $x_2 = -2x_1$, $dx_2 = -2dx_1$, тоді

$$d^2 L = 10dx_1^2 - 4dx_1\left(-2dx_1\right) + 6x_2\left(-2dx_1\right)^2 = 10dx_1^2 + 8dx_1^2 + 24x_2 dx_1^2 =$$
$$= \left(18 + 24x_2\right)dx_1^2.$$

Оскільки $d^2 L\Big|_{(0,0,0)} = 18dx_1^2 > 0$, то $X^1(0{,}0)$ є точкою умовного мінімуму функції $f = 5x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$, $\min f = f(0{,}0) = 0$.

Аналогічно, $d^2 L\Big|_{\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)} = -18dx_1^2 < 0$, то $X^1\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ - точка умовного максимуму, $\max f = f\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16}$.

Відповідь: $\min f = f(0{,}0) = 0$, $\max f = f\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16}$.

Можна дослідити оптимальність кожної з отриманих точок, використовуючи матрицю (4.15), визначник якої дорівнює

$$\det H_L = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -2 \\ -1 & -2 & 6x_2 \end{vmatrix} = -24x_2 - 18.$$

Також можна було звести задачу знаходження умовного екстремуму функції двох змінних до знаходження екстремуму функції однієї змінної, дослідження якої відомо з курсу диференціального числення функції однієї змінної. Для цього потрібно було виразити одну зі змінних, наприклад x_2, з обмеження $2x_1 + x_2 = 0$ і підставити отриманий вираз у функцію $f = 5x_1^2 + x_2^3 - 2x_1x_2$.

4.5. Задачі опуклого та квадратичного програмування

4.5.1. Опуклі функції

Функція $f(X) = f(x_1, \dots x_n)$ називається *опуклою* на деякій опуклій множині *G*, якщо для будь-яких точок $X_1 \in G$ та $X_2 \in G$, $G \subset R^n$ виконується нерівність

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2) \tag{4.16}$$

для довільного $\lambda \in [0,1]$.

Графічний приклад опуклої функції на площині зображений на рис. 4.5.

Функція $f(X)$ називається *увігнутою* на деякій опуклій множині *G*, якщо для будь-яких точок $X_1 \in G$ та $X_2 \in G$, $G \subset R^n$ виконується нерівність

$$f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \ge \lambda f(X_1) + (1-\lambda)f(X_2) \tag{4.17}$$

для довільного $\lambda \in [0,1]$.

Якщо в співвідношеннях (4.16), (4.17) для $\lambda \in (0,1)$ мають місце строгі нерівності, тоді функція називається *строго опуклою* (*строго увігнутою*).

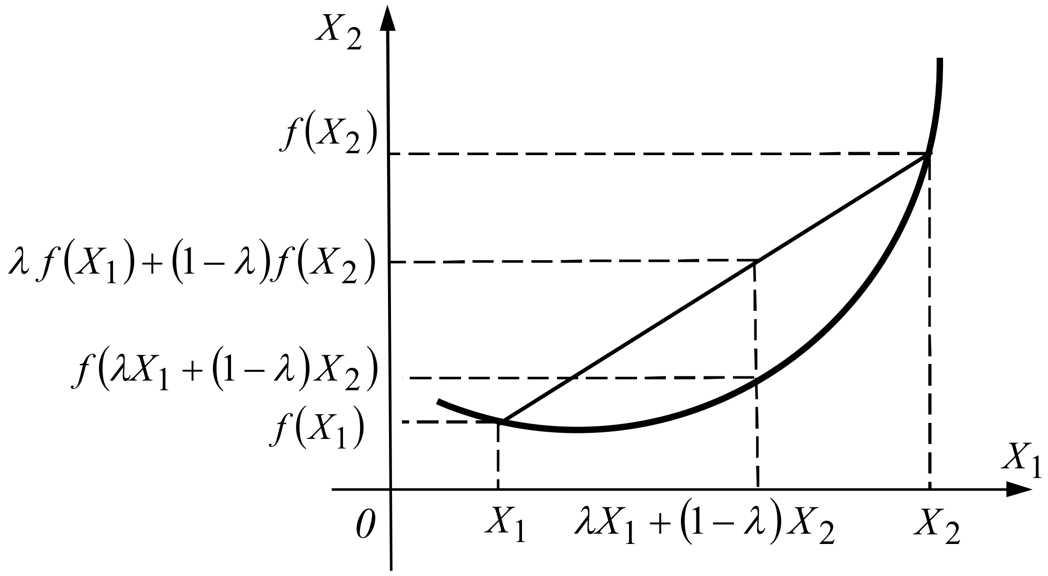


Рис. 4.5. Опукла функція

На рис. 4.6 наведений графічний приклад увігнутої функції однієї змінної.

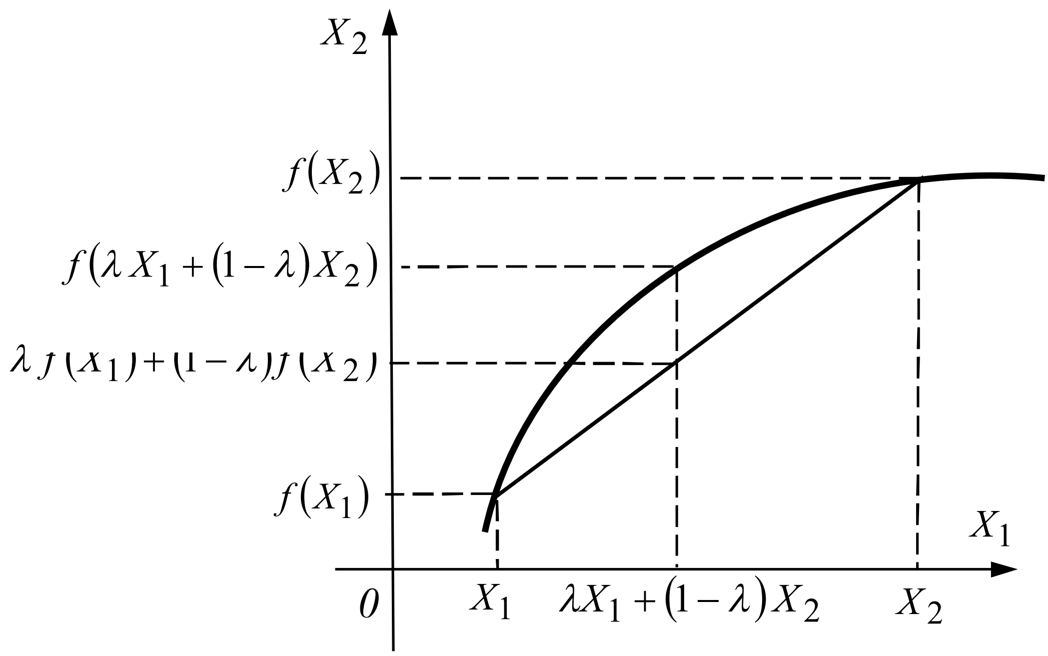


Рис. 4.6. Увігнута функція

Отже, опуклість (увігнутість) функції означає, що графік цієї функції лежить нижче (вище) від січної, яка з'єднує будь-які дві її точки.

Лінійна комбінація $f(X)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(X),\ i=\overline{1,n}$ опуклих (увігнутих) на деякій опуклій множині G функцій $f_i(X)$ також опукла (увігнута) на цій множині, якщо $\lambda_i \ge 0,\ i=\overline{1,n}$.

Очевидно, що якщо функція $f(X)$ – опукла, то функція «- $f(X)$» - увігнута, і навпаки.

Лінійна функція $f=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ є одночасно й опуклою й увігнутою функцією в просторі R^n, оскільки для будь-яких точок $X_1 \in R^n$ та $X_2 \in R^n$ і $\lambda \in [0,1]$ виконується рівність

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)=\lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2).$$

Дослідити функцію на опуклість або увігнутість можна за допомогою наведених визначень (4.16) і (4.17), але на практиці це, зазвичай, складно. Розглянемо критерії опуклості функції.

Теорема 1. Нехай функція $f(X)$ визначена на опуклій множині *G*, $G \subset R^n$ і має на цій множині неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді $f(X)$ – строго опукла функція тоді і тільки тоді, коли всі кутові мінори M_i, $i=\overline{1,n}$ гессіана функції f – невід'ємні в усіх точках *G*.

Теорема 2. Нехай функція $f(X)$ визначена на опуклій множині *G*, $G \subset R^n$ і має на цій множині неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді $f(X)$ – строго увігнута функція тоді і тільки тоді, коли всі кутові мінори гессіана функції f парного порядку додатні, а непарного порядку – від'ємні в усіх точках *G*, тобто $M_1<0, M_2>0, M_3<0,...$.

Приклад 9. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-6x_2x_3$$

є опуклою на всій області визначення.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 4x_1 - 4x_2; \qquad \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 6x_2 - 4x_1 - 6x_3; \qquad \frac{\partial f(X)}{\partial x_3} = 10x_3 - 6x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^2} = 4; \qquad \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^2} = 6; \qquad \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_3^2} = 10;$$

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_1} = -4;$$

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_3 \partial x_2} = -6; \qquad \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

і складемо матрицю Гессе:

$$H_f(X) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кутові мінори:

$$M_1 = 4 > 0, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 256 > 0.$$

Відповідь: Оскільки всі головні мінори гессіана додатні, то функція $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ є опуклою на всій області визначення.

Зауваження. Для функції однієї змінної теореми 1, 2 набувають такого вигляду.

Теорема 3. Нехай функція двічі диференційована на (a,b), тоді:

а) якщо $f''(x) \geq 0, x \in (a,b)$, то $f(x)$ - є опуклою на (a,b);

б) якщо $f''(x) \leq 0, x \in (a,b)$, то $f(x)$ - є увігнутою на (a,b).

Для опуклих (увігнутих) функцій справедливі такі теореми. Саме ці твердження гарантують успіх при розв’язанні задач нелінійного програмування.

Теорема 4. Нехай $f(X)$ – опукла функція, яка визначена на опуклій множині *G,* $G \subset R^n$. Тоді будь-який її локальний мінімум (максимум) збігається з глобальним мінімумом (максимумом).

Наслідки:

1. Якщо глобальний екстремум досягається у двох різних точках, то він досягається в будь-якій точці відрізка, який з'єднує ці точки.
2. Якщо $f(X)$ – строго опукла (увігнута) на множині *G,* то її глобальний мінімум (максимум) – єдиний.

4.5.2. Опукле програмування

Розглянемо задачу нелінійного програмування

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max, \tag{4.18}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{4.19}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.20}$$

де цільова функція (4.18) увігнута, а функції $g_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ i = \overline{1,m}$ є опуклими.

Для задачі мінімізації цільова функція повинна бути опуклою.

Як відомо, якщо ОДР визначається опуклими функціями, то вона теж є опуклою.

У разі, коли система обмежень задачі містить рівності, то кожну рівність необхідно представити у вигляді двох нерівностей, а обмеження вигляду "≥", потрібно помножити на "-1", щоб звести задачу до потрібного вигляду (4.18) - (4.20) (п. 2.1.1).

Якщо на деяку змінну $x_j,\ j = \overline{1,n}$ не накладено умову невід-ємності, то потрібно представити її у вигляді $x_j = x'_j - x''_j,\ x'_j, x''_j \ge 0$.

Особливість опуклого програмування полягає в тому, що локальний і глобальний екстремуми тут обов'язково збігаються (теорема 4), що гарантує знаходження оптимального розв'язку задачі.

Кажуть, що множина допустимих розв'язків задовольняє *умові регулярності Слейтера (умова Слейтера)*, якщо існує, принаймні, одна точка X°, яка належить ОДР, така, що $g_i\left(X^{\circ}\right) < b_i, i = \overline{1,m}$.

Функцією Лагранжа задачі опуклого програмування (4.18) - (4.20) називається функція

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)),$$

де $\Lambda = \left(\lambda_1, ..., \lambda_m\right)$ – *вектор множників Лагранжа*.

Точка $\left(X^*, \Lambda^*\right) = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*\right)$ називається *сідловою точкою функції Лагранжа*, якщо

$$L\left(X, \Lambda^*\right) \le L\left(X^*, \Lambda^*\right) \le L\left(X^*, \Lambda\right) \qquad (4.21)$$

для довільних $x_j \ge 0, j = \overline{1,n}, \lambda_i \ge 0, i = \overline{1,m}$.

Вираз (4.21) можна переписати у вигляді

$$\max_{x_j \ge 0} L\left(X, \Lambda^*\right) = L\left(X^*, \Lambda^*\right) = \min_{\lambda_i \ge 0} L\left(X^*, \Lambda\right), \; j = \overline{1,n}, \; i = \overline{1,m}.$$

Важливе місце в теорії опуклого програмування займають умови Куна-Таккера, які названі на честь Гарольда Куна і Альберта Таккера. Вони узагальнили метод множників Лагранжа, який використовується лише для знаходження оптимуму задач з обмеженнями-рівностями, на випадок, коли серед обмежень можуть бути як рівності, так і нерівності.

Умови Куна-Таккера визначають необхідну умову оптимальності, але при деяких додаткових умовах відносно цільової функції вони є і достатніми умовами оптимальності.

Теорема 5 (теорема Куна-Таккера). Для задачі опуклого програмування (4.18)-(4.20), множина допустимих розв'язків якої задовольняє умову регулярності, $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ є оптимальним планом тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор $\Lambda^* = \left(\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*\right)$, що $\left(X^*, \Lambda^*\right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа.

Цю теорему ще називають *теоремою про сідлову точку*, оскільки вона встановлює зв'язок між оптимальним планом і сідловою точкою функції Лагранжа.

Якщо функції $f(X)$ і $g_i(X)$, $i = \overline{1,m}$ неперервно диференційовані, то умова (4.21) еквівалентна таким *локальним умовам Куна-Таккера*:

$$\frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial x_j} \le 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.22}$$

$$x_j^* \frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial x_j} = 0,\ x_j^* \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial \lambda_i} \ge 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{4.24}$$

$$\lambda_i^* \frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial \lambda_i} = 0,\ \lambda_i^* \ge 0, i = \overline{1,m}. \tag{4.25}$$

4.5.3. Квадратичне програмування

Нижче буде розглянуто задачу квадратичного програмування, що задовольняє всі сформульовані в п. 4.5.2 вимоги, які дозволяють записати необхідні та достатні умови для сідлової точки функції Лагранжа у вигляді (4.22)-(4.25).

Функція $F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$ називається *квадратичною формою* відносно змінних $x_1, ..., x_n$.

Квадратична форма F називається *додатно визначеною (від'ємно визначеною)*, якщо $F(X) > 0$ ($F(X) < 0$) для всіх значень $X = (x_1, ..., x_n)$, крім $X = 0$.

Якщо для довільних $X = (x_1, ..., x_n)$ $F(X) \ge 0$ ($F(X) \le 0$) і, крім того, існує такий набір змінних $X' = (x_1', ..., x_n')$, де не всі x_j', $j = \overline{1,n}$ одночасно дорівнюють нулю, виконується рівність $F(X') = 0$, то така квадратична форма називається додатно напіввизначеною (від'ємно напіввизначеною).

Квадратична форма є опуклою функцією, якщо вона додатно напіввизначена, і увігнутою функцією, якщо вона від'ємно напіввизначена.

Тип квадратичної форми можна встановити, якщо її можна подати в канонічній формі

$$F = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x'_j \tag{4.26}$$

за допомогою лінійних перетворень.

Очевидно, що

1) якщо $\lambda_j > 0, j = \overline{1,n}$, то квадратична форма F є додатно визначеною;

2) якщо $\lambda_j < 0, j = \overline{1,n}$, то F – від'ємно визначена;

3) якщо серед $\lambda_j, j = \overline{1,n}$ є як додатні, так і від'ємні числа, то квадратична форма F є невизначеною.

Простіше визначити вид квадратичної форми за допомогою кутових мінорів $M_i, i = \overline{1,n}$ (п. 4.3) матриці, що складена з коефіцієнтів квадратичної форми

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

При цьому вважається, що матриця С – симетрична, тобто $c_{ij} = c_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$.

Теорема 6. Якщо для квадратичної форми $F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$ всі кутові мінори $M_i, i = \overline{1,n}$ відмінні від нуля, то її можна звести до вигляду виразу (4.26), де

$$\lambda_i = \frac{M_i}{M_{i-1}}, M_0 = 1, i = \overline{1,n}.$$

Таким чином, знаки коефіцієнтів $\lambda_i, i=\overline{1,n}$ визначаються знаками визначників $M_i, i=\overline{1,n}$.

Наслідки:

1. Якщо всі кутові мінори $M_i, i=\overline{1,n}$ додатні, то квадратична форма додатно визначена.

2. Якщо знаки кутових мінорів $M_i, i=\overline{1,n}$ чергуються, причому $M_1<0$, то квадратична форма від'ємно визначена.

3. Якщо ранг r матриці C менший за n і якщо її перші r визначників додатні, а решта дорівнює нулю, то квадратична форма додатно напіввизначена.

4. Якщо ранг r матриці C менший за n і знаки її перших r визначників чергуються, причому $M_1<0$, а решта дорівнює нулю, то квадратична форма від'ємно напіввизначена.

5. Квадратична форма є невизначеною, якщо кутові мінори мають як додатні, так від'ємні значення, причому знаки кутових мінорів не чергуються.

Задача нелінійного програмування

$$f=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_k x_j+\sum_{j=1}^{n}d_j x_j \to \max(\min), \tag{4.28}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{4.29}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{4.30}$$

де $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_k x_j$ додатно напіввизначена (від'ємно напіввизначена) квадратична форма, називається *задачею квадратичного програмування*.

Функція Лагранжа для задачі квадратичного програмування (4.28)-(4.30) має вигляд

$$L=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_k x_j+\sum_{j=1}^{n}d_j x_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right). \tag{4.31}$$

Якщо функція L має сідлову точку $\left(X^*, \Lambda^*\right)$, то в цій точці виконуються локальні умови Куна-Таккера (4.22)-(4.25).

Після введення балансуючих змінних $v_j, w_i,\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}$ отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial x_j} + v_j = 0, \qquad (4.32)$$

$$\frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \qquad (4.33)$$

$$x_j^* v_j = 0, \qquad (4.34)$$

$$\lambda_i^* w_i = 0, \qquad (4.35)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, w_i \geq 0, x_j^* \geq 0, v_j \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (4.36)$$

Таким чином, для знаходження розв'язку задачі квадратичного програмування (4.28)-(4.30) необхідно знати невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (4.32)-(4.33), який задовольняє умови (4.34)-(4.36).

Це можна зробити, наприклад, за допомогою методу штучного базису (п. 2.6), застосованого для знаходження максимального значення функції $F = -\sum_{k=1}^{n} My_k$ при умовах (4.32), (4.33), (4.36) з урахуванням (4.34)-(4.35), де $y_k, k=\overline{1,n}$ – штучні змінні, які введено в рівняння (4.32), тобто необхідно знайти розв'язок задачі лінійного програмування

$$F = -\sum_{k=1}^{n} My_k \to \max, \qquad (4.37)$$

$$\frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial x_j} + v_j + y_j = 0, \qquad (4.38)$$

$$\frac{\partial L\left(X^*, \Lambda^*\right)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \qquad (4.39)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, w_i \geq 0, i = \overline{1,m},$$
$$x_j^* \geq 0, v_j \geq 0 \;\; j = \overline{1,n},$$

який задовольняє умови

$$x_j^* v_j = 0, \quad \lambda_i^* w_i = 0. \tag{4.40}$$

Зауваження. Якщо ОДР задана лише лінійними нерівностями, то теорема Куна-Таккера буде вірною і без умови регулярності.

Алгоритм розв'язання задачі квадратичного програмування

1. Скласти функцію Лагранжа.
2. Записати необхідні та достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа у вигляді виразів (4.22)-(4.25).
3. Розв'язати методом штучного базису ЗЛП (4.37)-(4.39).
4. Для знайденого розв'язку перевірити умови (4.40).
5. У разі їх виконання записати оптимальний розв'язок початкової задачі і знайти значення цільової функції. Якщо умови не виконані, то знайти інший розв'язок задачі (4.37)-(4.39) і повернутися до кроку 4.

Використовуючи метод штучного базису з урахуванням умов (4.40), після скінченної кількості кроків або отримують оптимальний розв'язок, або доводять, що його не існує.

Приклад 10. Дана задача квадратичного програмування:

1) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 + 1)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

2) $g(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 + 1)^2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

3) $z(x_1, x_2) = 2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Потрібно записати функцію Лагранжа даної задачі і знайти її сідлову точку, використовуючи розв'язок задачі, отриманий графічно.

Розв'язання. 1) Сім'єю ліній рівня функції $f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 + 1)^2$ буде сім'я концентричних кіл $(x_1 - 10)^2 + (x_2 + 1)^2 = C$ з центром в точці $0_1(10, -1)$. Застосування графічного методу розв'язання ЗНП (див п. 4.2) дозволяє знайти точку $E(4,3)$, яка є підозрілою на екстремум (рис. 4.7).

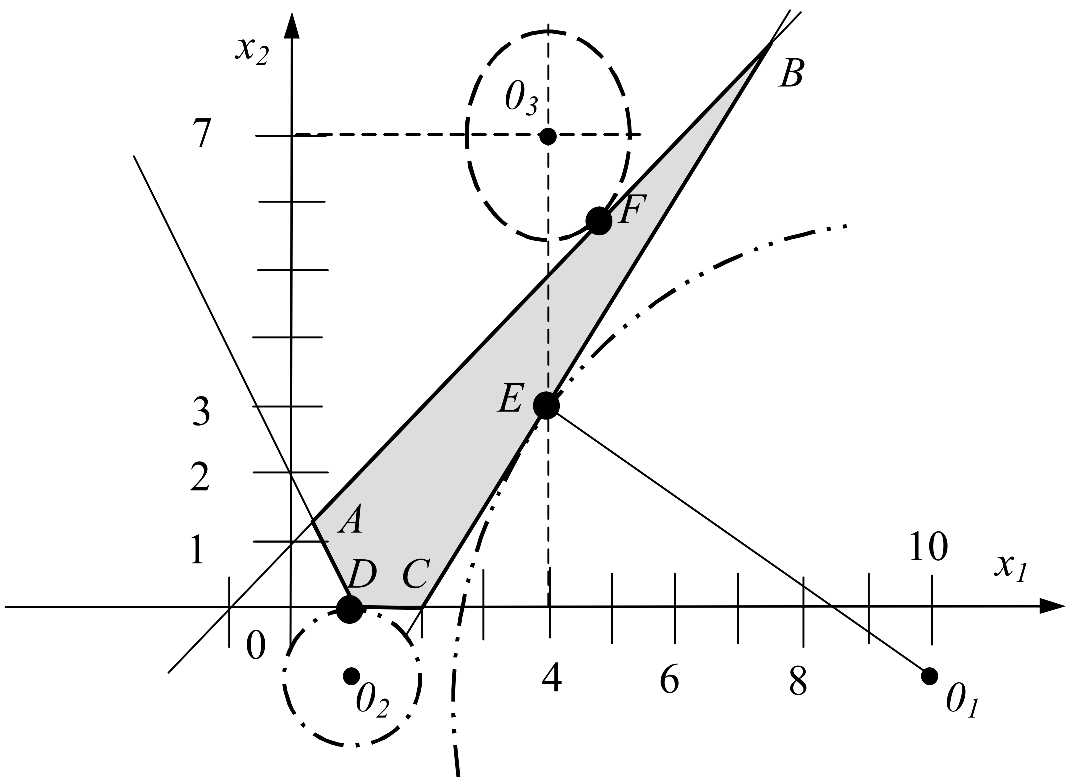


Рис. 4.7. Графічне розв'язання прикладу 10

Необхідно перевірити виконання умов Куна-Таккера для того, щоб довести, що в цій точці дійсно досягається мінімум функції. Зведемо поставлену задачу до вигляду (4.18)-(4.20):

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = -(x_1 - 10)^2 - (x_2 + 1)^2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 + 1 \ge 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

і складемо функцію Лагранжа:

$$L(X, \Lambda) = -(x_1 - 10)^2 - (x_2 + 1)^2 + \lambda_1 (2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2 (x_1 - x_2 + 1) +$$
$$+ \lambda_3 (-3x_1 + 2x_2 + 6).$$

Частинні похідні цієї функції

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2(x_1 - 10) + 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2(x_2 + 1) + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_2 + 1, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -3x_1 + 2x_2 + 6.$$

Використовуючи умови (4.23) і (4.25) та отриману графічним методом точку $E(4{,}3)$, запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_1} = 4\left(-2(4 - 10) + 2\lambda_1^* + \lambda_2^* - 3\lambda_3^*\right) = 4\left(12 + 2\lambda_1^* + \lambda_2^* - 3\lambda_3^*\right) = 0, \\ x_2^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_2} = 3\left(-2(3 + 1) + \lambda_1^* - \lambda_2^* + 2\lambda_3^*\right) = 3\left(-8 + \lambda_1^* - \lambda_2^* + 2\lambda_3^*\right) = 0, \\ \lambda_1^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_1} = \lambda_1^* (2 \cdot 4 + 3 - 2) = 9\lambda_1^* = 0, \\ \lambda_2^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_2} = \lambda_2^* (4 - 3 + 1) = 2\lambda_2^* = 0, \\ \lambda_3^* \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_3} = \lambda_3^* (-3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6) = 0 \cdot \lambda_3^* = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 12 + 2\lambda_1^* + \lambda_2^* - 3\lambda_3^* = 0, \\ -8 + \lambda_1^* - \lambda_2^* + 2\lambda_3^* = 0, \\ 9\lambda_1^* = 0, \\ 2\lambda_2^* = 0. \end{cases}$$

Отже, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = 4$. Таким чином, сідлова точка функції Лагранжа $\left(X^*, \Lambda^*\right) = (4,3,0,0,4)$. Перевіримо умови сідлової точки (4.21).

$$\begin{aligned} L\left(\tilde{O}, \Lambda^*\right) &= -(x_1 - 10)^2 - (x_2 + 1)^2 + 0 \cdot (2x_1 + x_2 - 2) + 0 \cdot (x_1 - x_2 + 1) + \\ &+ 4(-3x_1 + 2\tilde{o}_2 + 6) = -x_1^2 + 20\tilde{o}_1 - 100 - \tilde{o}_2^2 - 2\tilde{o}_2 - 1 - 12x_1 + 8\tilde{o}_2 + 24 = \\ &= -x_1^2 + 8\tilde{o}_1 - \tilde{o}_2^2 + 6\tilde{o}_2 - 77 = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 3)^2 - 52 = \\ &= -52 - \left[(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2\right] \le -52, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\left(X^*, \Lambda^*\right) &= -(4 - 10)^2 - (3 + 1)^2 + 0 \cdot (2 \cdot 4 + 3 - 2) + 0 \cdot (4 - 3 + 1) + \\ &+ 4(-3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6) = -52, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(X^*, \Lambda) &= -(4 - 10)^2 - (3 + 1)^2 + \lambda_1^* \cdot (2 \cdot 4 + 3 - 2) + \lambda_2^* \cdot (4 - 3 + 1) + \\ &+ \lambda_3^*(-3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6) = -52 + \left[9\lambda_1^* + 8\lambda_2^*\right] \ge -52, \end{aligned}$$

тобто $L\left(X, \Lambda^*\right) \le L\left(X^*, \Lambda^*\right) \le L\left(X^*, \Lambda\right)$. Умова сідлової точки виконана, що вказує на те, що точка (4,3) є точкою, у якій функція $\tilde{f}(x_1, x_2) = -(x_1 - 10)^2 - (x_2 + 1)^2$ досягає максимального значення, а відповідно функція $f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 + 1)^2$ свого мінімального значення.

2) Згідно з рис. 4.7 функції $g(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 + 1)^2$ досягає свого максимального значення в точці $D(1,0)$. Функція Лагранжа

$$L(X,\Lambda) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 + 1)^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_1 - x_2 + 1) +$$
$$+ \lambda_3(-3x_1 + 2x_2 + 6)$$

має сідлову точку $\left(X^*, \Lambda^*\right) = (1,0,0,0,0)$, для якої виконуються умови (4.21). Дійсно

$$L\left(\tilde{O}, \Lambda^*\right) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 + 1)^2 + 0 \cdot (2x_1 + x_2 - 2) + 0 \cdot (x_1 - x_2 + 1) +$$
$$+ 0 \cdot (-3x_1 + 2\tilde{o}_2 + 6) = -(x_1 - 1)^2 - \tilde{o}_2^2 - 2\tilde{o}_2 - 1 = -1 - \left[(x_1 - 1)^2 + \tilde{o}_2^2 + 2\tilde{o}_2\right] \le -1,$$
($\tilde{o}_2 \ge 0 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + \tilde{o}_2^2 + 2\tilde{o}_2 \ge 0$),

$$L\left(X^*, \Lambda^*\right) = -(1 - 1)^2 - (0 + 1)^2 + 0 \cdot (2 \cdot 1 + 0 - 2) + 0 \cdot (1 - 1 + 1) +$$
$$+ 0 \cdot (-3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6) = -1,$$

$$L(X^*, \Lambda) = -(1 - 1)^2 - (0 + 1)^2 + \lambda_1^* \cdot (2 \cdot 1 + 0 - 2) + \lambda_2^* \cdot (1 - 1 + 1) +$$
$$+ \lambda_3^*(-3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6) = -1 + \left[\lambda_2^* + 3\lambda_3^*\right] \ge -1.$$

3) Оскільки $N(-1,1)$ – нормальний вектор прямої $-x_1 + x_2 = 1$, а $grad\, z = (4(x_1 - 4), 2(x_2 - 7))$ – вектор-градієнт цільової функції $z(x_1, x_2) = 2(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 7)^2$, то координати точки F знаходимо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{4(x_1 - 4)}{-1} = \dfrac{2(x_2 - 7)}{1}, \\ -x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \quad x_1^* = \frac{14}{3}, \ x_2^* = \frac{17}{3}.$$

Точка $\left(X^*, \Lambda^*\right) = \left(\frac{14}{3}, \frac{17}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0\right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа

$$L(X,\Lambda) = -2(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 7)^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_1 - x_2 + 1) +$$
$$+ \lambda_3(-3x_1 + 2x_2 + 6),$$

оскільки

$$L\left(\tilde{O},\Lambda^*\right)=-2(x_1-4)^2-(x_2-7)^2+0\cdot(2x_1+x_2-2)+\frac{8}{3}\cdot(x_1-x_2+1)+$$

$$+0\cdot(-3x_1+2\tilde{o}_2+6)=-2x_1^2+16\tilde{o}_1-32-\tilde{o}_2^2+14\tilde{o}_2-49+\frac{8}{3}x_1-\frac{8}{3}\tilde{o}_2+\frac{8}{3}=$$

$$=-\frac{8}{3}-2\left(x_1-\frac{14}{3}\right)^2-\left(x_2-\frac{17}{3}\right)^2-\frac{8}{3}-\left[2\left(x_1-\frac{14}{3}\right)^2+\left(x_2-\frac{17}{3}\right)^2\right]\le-\frac{8}{3},$$

$$L\left(X^*,\Lambda^*\right)=-\frac{8}{3},$$

$$L(\tilde{O}^*,\Lambda)=-2\left(\frac{14}{3}-4\right)^2-\left(\frac{17}{3}-7\right)^2+\lambda_1^*\cdot\left(2\cdot\frac{14}{3}+\frac{17}{3}-2\right)+\lambda_2^*\cdot\left(\frac{14}{3}-\frac{17}{3}+1\right)+$$

$$+\lambda_3^*\cdot\left(-3\cdot\frac{14}{3}+2\cdot\frac{17}{3}+6\right)=-\frac{8}{3}+\left[13\lambda_1^*+\frac{10}{3}\lambda_3^*\right]\ge-\frac{8}{3}.$$

Відповідь: 1) $\min f=-\tilde{f}(4,3)=f(4,3)=52$;

2) $\max g=g(1,0)=-1$;

3) $\min z=z\left(\frac{14}{3},\frac{17}{3}\right)=-\frac{8}{3}$;

Приклад 11. Знайти максимальне значення функції $f=-x_1^2+6x_1-x_2^2+8x_2$ при додаткових обмеженнях

$$\begin{cases}4x_1+5x_2\le 20,\\ -2x_1+3x_2\le 1,\\ x_1,x_2\ge 0.\end{cases}$$

Розв'язання. Це задача квадратичного програмування. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(X,\Lambda)=-x_1^2+6x_1-x_2^2+8x_2+\lambda_1(20-4x_1-5x_2)+\lambda_2(1+2x_1-3x_2)$$

і запишемо для неї умови Куна-Таккера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 6 - 4\lambda_1 + 2\lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 8 - 5\lambda_1 - 3\lambda_2 \le 0, \end{cases} \tag{4.41}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 20 - 4x_1 - 5x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 + 2x_1 - 3x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{4.42}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1\left(-2x_1 + 6 - 4\lambda_1 + 2\lambda_2\right) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2\left(-2x_2 + 8 - 5\lambda_1 - 3\lambda_2\right) = 0, \end{cases} \tag{4.43}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1\left(20 - 4x_1 - 5x_2\right) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2\left(1 + 2x_1 - 3x_2\right) = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Перепишемо систему нерівностей (4.41)-(4.42) у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 \ge 6, \\ 2x_2 + 5\lambda_1 + 3\lambda_2 \ge 8, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 1. \end{cases} \tag{4.45}$$

Після введення додаткових невід'ємних змінних v_1, v_2, w_1, w_2 отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - v_1 = 6, \\ 2x_2 + 5\lambda_1 + 3\lambda_2 - v_2 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + w_1 = 20, \\ -2x_1 + 3x_2 + w_2 = 1. \end{cases} \tag{4.46}$$

Тоді система нерівностей (4.43)-(4.44) набуде вигляду

$$\begin{cases} x_1 v_1 = 0, \\ x_2 v_2 = 0, \\ \lambda_1 w_1 = 0, \\ \lambda_2 w_2 = 0. \end{cases} \tag{4.47}$$

Для знаходження розв'язку використаємо метод штучного базису (п. 2.6). У перше і друге рівняння системи (4.46), які відповідають обмеженням задачі, введемо штучні змінні y_1, y_2 і розглянемо задачу лінійного програмування

$$F = -My_1 - My_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - v_1 + y_1 = 6, \\ 2x_2 + 5\lambda_1 + 3\lambda_2 - v_2 + y_2 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + w_1 = 20, \\ -2x_1 + 3x_2 + w_2 = 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2, w_1, w_2, y_1, y_2 \geq 0 .$$

Розв'язання проведемо за допомогою симплексних таблиць (табл. 4.1-4.3).

Таблиця 4.1

Початкова таблиця

Приклад 11		Вільна змінна						Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$-v_1$	$-v_2$	*1*
Базисна змінна	y_1	2	0	4	-2	-1	0	6
	y_2	0	2	5	3	0	-1	8
	w_1	4	5	0	0	0	0	20
	w_2	-2	3	0	0	0	0	1
М-рядок		-2	-2	-9	-1	1	1	-14

Таблиця 4.2

Ітерація 1

Після обміну $\lambda_1 \leftrightarrow y_1$		Вільна змінна						Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	$-\lambda_2$	$-v_1$	$-v_2$	1
Базисна змінна	λ_1	1/2	0	1/4	-1/2	-1/4	0	3/2
	y_2	-5/2	2	-5/4	11/2	5/4	-1	1/2
	w_1	4	5	0	0	0	0	20
	w_2	-2	3	0	0	0	0	1
М-рядок		5/2	-2	9/4	-11/2	-5/4	1	-1/2

Таблиця 4.3

Ітерація 2

Після обміну $\lambda_2 \leftrightarrow y_2$		Вільна змінна						Вільний член
		$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-v_1$	$-v_2$	1
Базисна змінна	λ_1	3/11	2/11	3/22	1/11	-3/22	-1/11	17/11
	λ_2	-5/11	4/11	-5/22	2/11	5/22	-2/11	1/11
	w_1	4	5	0	0	0	0	20
	w_2	-2	3	0	0	0	0	1
М-рядок		0	0	1	1	0	0	0

Отже, отримали оптимальний план $x_1^* = x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = \frac{17}{11}, \lambda_2^* = \frac{1}{11}$, $v_1 = v_2 = 0$, $w_1 = 20, w_2 = 1$. Перевіримо виконання умов (4.47):

$$\begin{cases} x_1^* v_1 = 0, \\ x_2^* v_2 = 0, \\ \lambda_1 w_1 = \frac{17}{11} \cdot 20 \neq 0, \\ \lambda_2 w_2 = \frac{1}{11} \cdot 1 \neq 0. \end{cases}$$

Умови (4.47) не виконуються, тому знайдемо інший розв’язок задачі, для чого оберемо в якості провідного будь-який стовпець з нульовою оцінкою в М-рядку, наприклад той, який відповідає вільній змінній x_1 (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

Ітерація 3

Після обміну $x_1 \leftrightarrow w_1$		Вільна змінна						Вільний член
		$-w_1$	$-x_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-v_1$	$-v_2$	1
Базисна змінна	λ_1	-3/44	-7/44	3/22	1/11	-3/22	-1/11	2/11
	λ_2	5/44	41/44	-5/22	2/11	5/22	-2/11	26/11
	x_1	1/4	5/4	0	0	0	0	5
	w_2	-1/2	11/2	0	0	0	0	11
М-рядок		0	0	1	1	0	0	0

Отриманий план $x_1^* = 5, x_2^* = 0$, $\lambda_1^* = \dfrac{2}{11}, \lambda_2^* = \dfrac{26}{11}$, $v_1 = v_2 = 0$, $w_1 = 0, w_2 = 11$ знов не задовольняє умови (4.47), бо $\lambda_2 w_2 = \dfrac{26}{11} \cdot 11 \neq 0$.

Продовжуючи обчислення, приходимо до табл. 4.5.

Таблиця 4.5

Ітерація 4

Після обміну $x_2 \leftrightarrow w_2$		Вільна змінна						Вільний член
		$-w_1$	$-w_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-v_1$	$-v_2$	1
Базисна змінна	λ_1							1/2
	λ_2							1/2
	x_1							5/2
	x_2							2
М-рядок		0	0	1	1	0	0	0

Отримали розв'язок $x_1^* = 2{,}5$, $x_2^* = 2$, $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \dfrac{1}{2}$, $v_1 = v_2 = 0$, $w_1 = w_2 = 0$. Легко перевірити, що цей розв'язок задовольняє умови (4.47). Звідси випливає, що точка $\left(X^*, \Lambda^*\right)=\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа.

Відповідь: $\max f = f\left(\frac{5}{2}, 2\right) = -\frac{25}{4} + 6 \cdot \frac{5}{2} - 4 + 16 = \frac{83}{4}$.

Приклад 12. Знайти максимальне значення функції $f = -2x_1^2 + 12x_1 - x_2^2 + 6x_2$ при додаткових обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{4.48}$$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(X, \Lambda) = -2x_1^2 + 12x_1 - x_2^2 + 6x_2 + \lambda_1(12 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2(x_1 - x_2 - 1).$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -4x_1 + 12 - 2\lambda_1 + \lambda_2, \; \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 6 - 3\lambda_1 - \lambda_2,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - 2x_1 - 3x_2, \; \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_2 - 1,$$

і виписуємо систему рівнянь (4.23)-(4.25):

$$\begin{cases} x_1(-4x_1 + 12 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ x_2(-2x_2 + 6 - 3\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1(12 - 2x_1 - 3x_2) = 0, \\ \lambda_2(x_1 - x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

При розв'язанні цієї системи потрібно розглянути можливі випадки значень невідомих:

1) $x_1 > 0, x_2 > 0$;
2) $x_1 > 0, x_2 = 0$;

3) $x_1 = 0, x_2 > 0$;

4) $x_1 = 0, x_2 = 0$.

1. У випадку, коли $x_1 > 0, x_2 > 0$, умови Куна-Таккера набувають вигляду

$$\begin{cases} -4x_1 + 12 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -2x_2 + 6 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(12 - 2x_1 - 3x_2) = 0, \\ \lambda_2(x_1 - x_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Звідси отримаємо такі розв'язки:

а) $x_1 = 3, x_2 = 3, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

б) $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{7}{3}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{4}{3}$;

в) $x_1 = \frac{30}{11}, x_2 = \frac{24}{11}, \lambda_1 = \frac{6}{11}, \lambda_2 = 0$;

г) $x_1 = 3, x_2 = 2, \lambda_1 = \frac{2}{5}, \lambda_2 = \frac{4}{5}$.

Необхідно перевірити, що знайдені точки належать ОДР.

Перші три розв'язки (3,3), $\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$ і $\left(\frac{30}{11}, \frac{24}{11}\right)$ не задовольняють обмеження задачі (4.48). Отже, маємо лише одну точку $(X, \Lambda) = \left(3, 2, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $f(3,2) = 26$.

2. Якщо $x_1 > 0, x_2 = 0$, то за виразами (4.23) і (4.25) необхідно знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} -4x_1 + 12 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(12 - 2x_1) = 0, \\ \lambda_2(x_1 - 1) = 0, \end{cases}$$

який задовольняє нерівність $6 - 3\lambda_1 - \lambda_2 \le 0$. Серед отриманих розв'язків системи $(3,0,0,0)$, $(6,0,-6,0)$ і $(1,0,0,-8)$ тільки перший задовольняє цю нерівність і обмеженням (4.48). Таким чином, маємо ще одну точку $(X,\Lambda)=(3,0,0,0)$, $f(3,0)=18$.

3. Випадки, коли $x_1=0, x_2>0$ і $x_1=0, x_2=0$, можна взагалі не розглядати, бо вони суперечать другому обмеженню в умові задачі ($x_1-x_2\geq 1$).

Порівнюючи отримані значення функції, бачимо, що свого найбільшого значення вона досягає в точці X=(3,2).

Перевіримо виконання умов сідлової точки для $(X,\Lambda)=\left(3,2,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$:

$$L\left(X,\Lambda^*\right)=-2x_1^2+12x_1-x_2^2+6x_2+\frac{2}{5}(12-2x_1-3x_2)+\frac{4}{5}(x_1-x_2-1)=$$
$$=26-2(x_1+3)^2-(x_2-2)^2=26-\left[2(x_1+3)^2+(x_2-2)^2\right]\leq 26,$$
$$L\left(X^*,\Lambda^*\right)=-2\cdot 9+12\cdot 3-4+12+\frac{2}{5}\cdot(12-6-6)+\frac{4}{5}\cdot(3-2-1)=26,$$
$$L\left(X^*,\Lambda\right)=26+0\cdot\lambda_1^*+0\cdot\lambda_2^*=26.$$

Як бачимо, умова (4.21) виконана.

Відповідь: $\max f=f(3,2)=26$.

Приклад 13. Для виробництва двох видів продукції А і В підприємство закуповує сировину в кількості 18 од. за ціною 180 грош. од. З одиниці сировини можна виготовити одиницю продукції А, затративши на переробку 4 грош. од., або одиницю продукції В, затративши 10 грош. од. Дохід від реалізації а одиниць продукції першого типу складає $a(30-a)$ грош. од., другого типу $a(60-2a)$ грош. од. Визначити стратегію підприємства, яка дозволить максимізувати прибуток.

Розв'язання. Введемо наступні позначення:

x_1 - кількість одиниць продукції А;

x_2 - кількість одиниць продукції В.

Дохід від реалізації виготовленої продукції складає $x_1(30-x_1)+x_2(60-2x_2)$ грош. од. Затрати на виробництво: $4x_1+10x_2+\frac{180}{18}(x_1+x_2)=14x_1+20x_2$. Таким чином, прибуток підприємства дорівнює

$$x_1(30-x_1)+x_2(60-2x_2)-14x_1-20x_2=-x_1^2+16x_1-2x_2^2+40x_2.$$

Отже, математична модель задачі має вигляд

$$f=-x_1^2+16x_1-2x_2^2+40x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1+x_2 \le 18, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи задачу, наприклад графічним методом, отримуємо розв'язок $\max f = f(8{,}10)=264$.

Відповідь: Максимальний прибуток у розмірі 264 грош. од. буде отриманий, якщо буде виготовлено 8 од. продукції першого типу і 10 од. продукції другого типу.

4.6. Дробово-лінійне програмування

Задачею дробово-лінійного програмування (ЗДЛП) називається задача

$$f=\frac{c_1x_1+\ldots+c_nx_n+c_0}{d_1x_1+\ldots+d_nx_n+d_0} \to \max(\min), \tag{4.49}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{4.50}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{4.51}$$

де $d_1x_1+\ldots+d_nx_n+d_0 \ne 0$ на ОДР.

4.6.1. Графічний метод розв'язання задачі дробово-лінійного програмування

Якщо ЗДЛП містить дві змінні, її можна розв'язати *графічним методом.*

Розглянемо таку задачу

$$f = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \to \max(\min), \tag{4.52}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{4.53}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4.54}$$

Розглянемо випадок, коли $c_0 = d_0 = 0$, тобто

$$f = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2}. \tag{4.55}$$

ОДР задачі (4.52)-(4.54) є опуклим багатокутником, розташованим у першій координатній чверті.

З геометричної точки зору лінії рівня $\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = C$ цільової функції (4.55) визначають пучок прямих $x_2 = \frac{c_1 - C\,d_1}{C\,d_2 - c_2}x_1$ з центром у початку координат і кутовим коефіцієнтом

$$k = \frac{c_1 - C\,d_1}{C\,d_2 - c_2}. \tag{4.56}$$

З виразу (4.56) маємо

$$k_C' = \left(\frac{c_1 - C\,d_1}{C\,d_2 - c_2}\right)_c^{/} = \frac{c_2\,d_1 - c_1\,d_2}{(C\,d_2 - c_2)^2}.$$

Отже, знак похідної k_C' визначається знаком величини

$$c_2\,d_1 - c_1\,d_2 = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, якщо:

1) $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} > 0$, то $k'_C < 0$ і пряма з кутовим коефіцієнтом (4.56) обертається навколо початку координат за годинниковою стрілкою;

2) $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} < 0$, то $k'_C > 0$ і пряма з кутовим коефіцієнтом (4.56) обертається навколо початку координат проти годинникової стрілки.

Напрям обертання прямої дозволяє встановити точки ОДР, у яких досягається екстремальне значення, зокрема *при обертанні прямої навколо початку координат перша спільна точка прямої і ОДР є точкою, у якій цільова функція досягає мінімуму, а остання – максимуму.*

При цьому можливі такі випадки:

1. Максимум і мінімум досягаються в кутових точках ОДР (рис. 4.8,а,б).
2. Цільова функція досягає свого мінімуму (максимуму) в одній з кутових точок ОДР і має асимптотичний максимум (мінімум) (рис. 4.8,в).
3. Цільова функція має асимптотичні максимум і мінімум (рис. 4.8,г).

Якщо $c_0 \neq 0, d_0 \neq 0$, то рівняння ліній рівня має вигляд

$$x_2 - x_2^0 = k\left(x_1 - x_1^0\right). \tag{4.57}$$

Це пучок прямих з центром у точці $O_1(x_1^0, x_2^0)$, координати якого знаходяться при розв’язанні системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0 = 0, \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0 = 0. \end{cases} \tag{4.58}$$

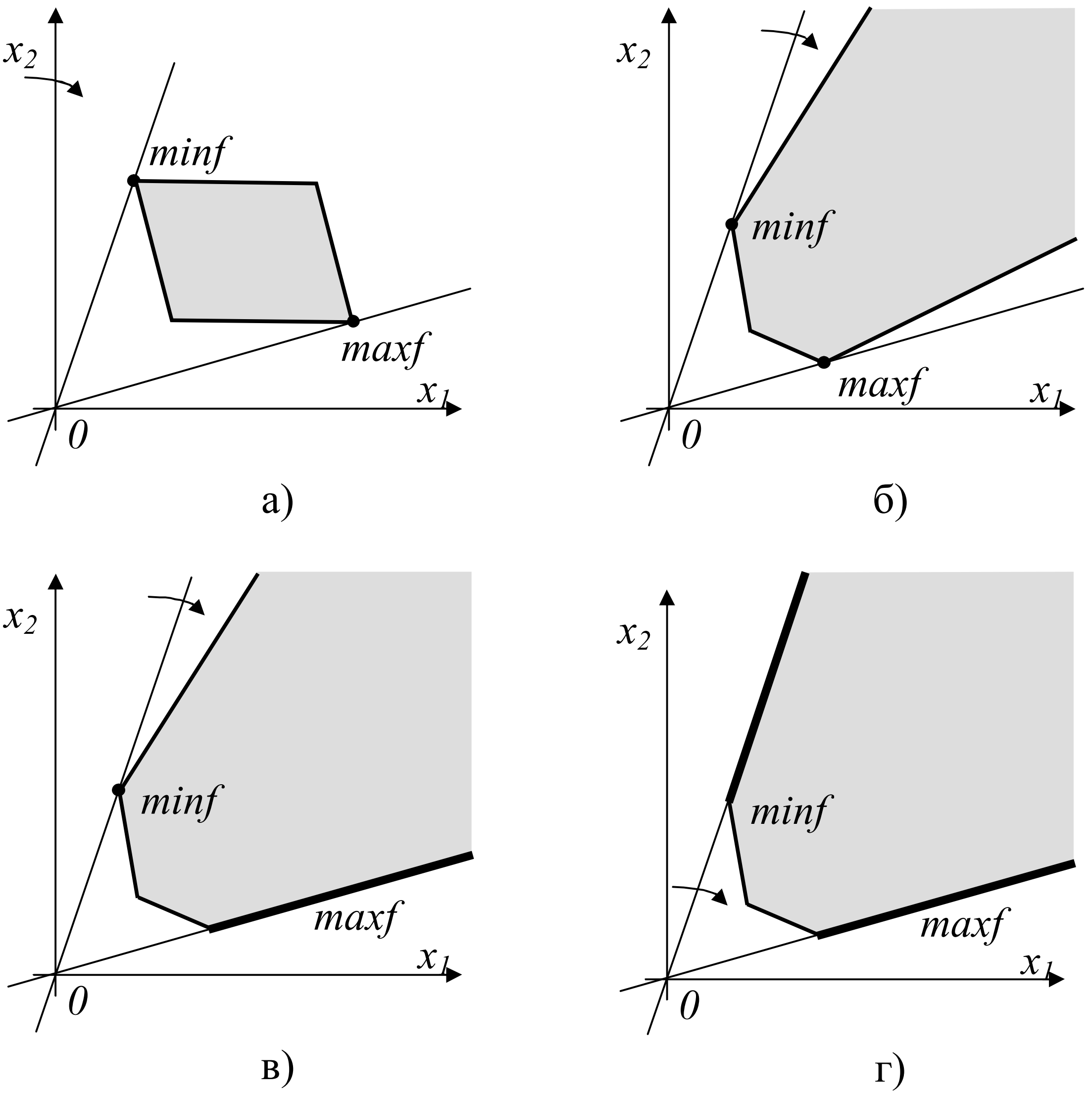


Рис. 4.8. Графічне розв’язання ЗДЛП

Алгоритм графічного методу розв’язання ЗДЛП:

1. Побудувати ОДР, яка визначається обмеженнями (4.53), (4.54).
2. Побудувати пряму (4.57).
3. Визначити напрям обертання прямої, обчисливши визначник $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1$.
4. Встановити точки, у яких цільова функція досягає свого максимуму (мінімуму).

5. Знайти координати цих точок, розв'язавши відповідну систему рівнянь.

6. Записати відповідь, обчисливши значення цільової функції в знайдених точках.

Приклад 14. Розв'язати графічним методом:

$$f = \frac{2x_1 + x_2 - 2}{3x_1 + 5x_2 - 3} \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 28, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДР зображено на рис. 4.9. Центр пучка ліній рівня (зображені пунктирними лініями) знайдемо, розв'язавши систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0.$$

Отже, це точка $O_1(1,0)$. Оскільки

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 > 0,$$

то цільова функція зростає при обертанні ліній рівня за ходом годинникової стрілки. З рис. 4.9 видно, що функція набуває мінімального значення в точці A, координати якої знайдемо як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6, \\ -x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{9}{5},$$

тоді $f\left(\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right)=\dfrac{2\cdot\frac{4}{5}+\frac{9}{5}-2}{3\cdot\frac{4}{5}+5\cdot\frac{9}{5}-3}=\frac{7}{42}$.

Свого максимального значення цільова функція набуває на відрізку DC, де $D(2,0)$, $D(7,0)$. Тому $X^*=\lambda(2,0)+(1-\lambda)(7,0)=(7-5\lambda,0), \lambda\in[0,1]$, а $f(X^*)=\frac{2}{3}$.

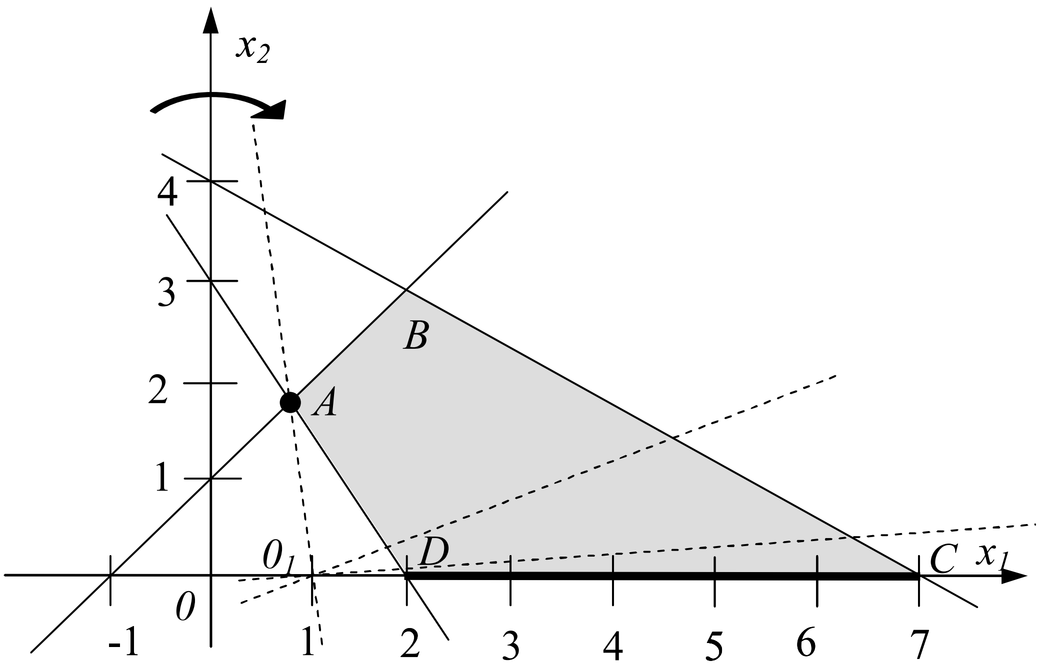


Рис. 4.9. Графічне розв’язання прикладу 14

Відповідь: $\min f=f\left(\frac{4}{5},\frac{9}{5}\right)=\frac{7}{42}$, $\max f=f(7-5\lambda,0)=\frac{2}{3}$, $\lambda\in[0,1]$.

Приклад 15. Адміністрація виробничої фірми бажає скласти щотижневу програму випуску своїх виробів А і В, яка дає максимум чистого доходу на 1 грош. од. всіх зроблених витрат. Виріб А гарантовано реалізується за ціною 60 грош. од., а виріб В – за ціною 50 грош. од. Витрата сировини на виріб А складає 3 кг, а на виріб В – 2 кг. Завантаження устаткування для виготовлення виробу А складає 2 верстат-год., на виріб В – 5 верстат-год. Мінімальні об'єми сировини і верстатного парку, при яких не відбудеться зупинки виробництва, складають відповідно:

500 кг і 400 верстат-год. в тиждень. Фірма має 1600 кг сировини, 700 верстат-год. Повна собівартість виробів А і В складає відповідно 50 і 40 грош. од. Скласти математичну модель розрахунку оптимальної програми випуску виробів А і В за критерієм максимальної середньої рентабельності за тиждень.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2 - відповідна кількість виробів А і В, які потрібно виготувати підприємству. Рентабельність – це відношення прибутку до собівартості, тому цільова функція має вигляд

$$f = \frac{(60-50)x_1 + (50-40)x_2}{50x_1 + 40x_2} \to \max.$$

Отже, математична модель задачі така:

$$f = \frac{x_1 + x_2}{5x_1 + 4x_2} \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 1600, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 500, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 700, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 400, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Лінії рівня проходять через початок координат і зростають при обертанні проти годинникової стрілки, оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 < 0.$$

З рис. 4.10 випливає, що свого максимального значення цільова функція набуває в точці *B* перетину прямих

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 500, \\ 2x_1 + 5x_2 = 700, \end{cases}$$

тобто, $x_1 = x_2 = 100$.

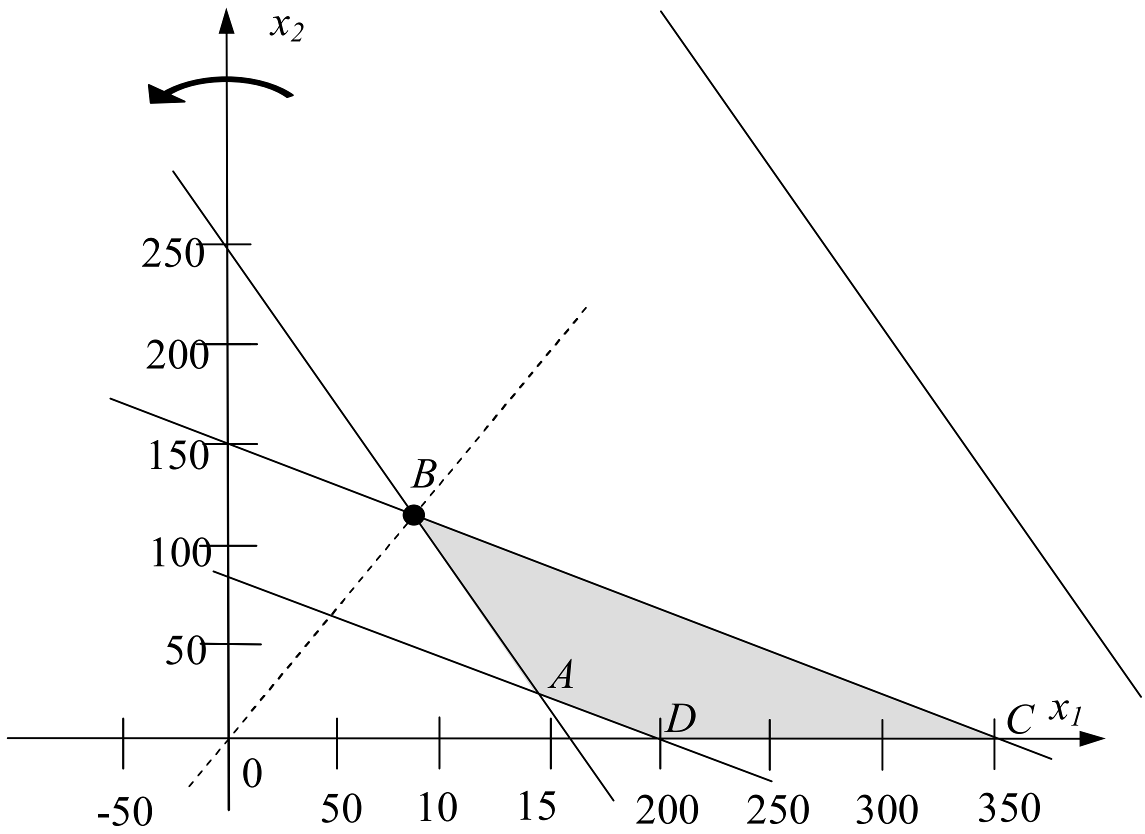


Рис. 4.10. Графічне розв'язання прикладу 15

Відповідь: для максимальної середньої рентабельності $f = \frac{100+100}{4 \cdot 100 + 5 \cdot 100} = \frac{2}{9}$ підприємство повинно щотижня виготовляти по 100 од. виробів кожного виду.

4.6.2. Симплексний метод розв'язання ЗДЛП

Розглянемо ЗДЛП у канонічному вигляді (всі обмеження задачі подані у вигляді рівнянь):

$$f = \frac{c_1 x_1 + ... + c_n x_n + c_0}{d_1 x_1 + ... + d_n x_n + d_0} \to \max(\min), \tag{4.59}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{4.60}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n}. \tag{4.61}$$

ЗДЛП можна звести до задачі лінійного програмування за допомогою таких перетворень:

$$y_0 = \frac{1}{d_1 x_1 + \ldots + d_n x_n + d_0}, \tag{4.62}$$

$$y_j = y_0\, x_j, j = \overline{1, n}. \tag{4.63}$$

Для зручності будемо вважати, що знаменник $y_0 = d_1 x_1 + \ldots + d_n x_n + d_0 > 0$ на ОДР, оскільки у випадку від'ємності знаменника можна віднести мінус у чисельник. У разі, якщо на ОДР знаменник довільного знаку, то ОДР необхідно розбити на дві частини, одна з яких відповідає додатним значенням знаменника, а інша – від'ємним, і на кожній частині окремо розв'язати поставлену задачу.

Тоді з урахуванням виразів (4.62), (4.63) задача (4.59)-(4.61) набуде вигляду

$$f = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + c_0 y_0 \to \max(\min), \tag{4.64}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0,\ i = \overline{1, m}, \\ d_1 y_1 + \ldots + d_n y_n + d_0 y_0 = 1, \end{cases} \tag{4.65}$$

$$y_j \ge 0,\ y_0 > 0, j = \overline{1, n}. \tag{4.66}$$

Задача (4.64)-(4.66) є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом.

Зауваження:

1. Якщо $y_0^* = 0$, то ЗДЛП (4.59)-(4.61) не має розв'язку, оскільки цільова функція необмежена на множині планів.
2. Якщо задача (4.64)-(4.66) має безліч оптимальних планів, то для знаходження оптимального розв'язку задачі (4.59)-(4.61) необхідно розглядати ті, які задовольняють умову $y_0^* > 0$.

Алгоритм розв'язання ЗДЛП симплекс-методом:

1. Подати початкову задачу в канонічній формі.

2. Звести задачу (4.59)-(4.61) до ЗЛП (4.64)-(4.66) за допомогою перетворення (4.62).

3. Знайти оптимальний розв'язок $Y^* = \left(y_0^*, y_1^*, ..., y_n^*\right)$ задачі (4.64)-(4.66).

4. Компоненти оптимального плану початкової задачі визначаємо за формулами

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}, j = \overline{1,n}. \qquad (4.67)$$

Приклад 16. Розв'язати задачу:

$$f = \frac{x_1 + 4x_2 + 2}{2x_1 + 5x_2} \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 25, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перейдемо до канонічної форми:

$$f = \frac{x_1 + 4x_2 + 2}{2x_1 + 5x_2} \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 25, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Введемо позначення

$$y_0 = \frac{1}{2x_1 + 5x_2}, y_0 > 0, \text{ тоді } y_j = y_0\, x_j, j = \overline{1,4}$$

і запишемо отриману задачу лінійного програмування:

$$f = y_1 + 4y_2 + 2y_0 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + y_3 - 25y_0 = 0, \\ 3y_1 + y_2 + y_4 - 6y_0 = 0, \\ 2y_1 + 5y_2 = 1, \\ y_j \ge 0, j = \overline{1,4}, \\ y_0 > 0. \end{cases}$$

Оскільки немає одиничного базису, то застосуємо метод штучного базису, ввівши в останнє рівняння штучну змінну $s \ge 0$:

$$f_1 = -y_1 - 4y_2 - 2y_0 - M\,s \to \max,$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + y_3 - 25y_0 = 0, \\ 3y_1 + y_2 + y_4 - 6y_0 = 0, \\ 2y_1 + 5y_2 + s = 1, \\ y_j \ge 0, j = \overline{1,5}, \\ y_0 > 0. \end{cases}$$

Складемо початкову таблицю (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Початкова таблиця

Приклад 16		Вільна змінна			Вільний член
		$-y_1$	$-y_2$	$-y_0$	*1*
Базисна змінна	y_3	4	7	-25	0
	y_4	3	1	-6	0
	s	2	5	0	1
Цільова функція	f_1	1	4	2	0
М-рядок		-2	-5	0	-1

і розв’яжемо задачу симплекс-методом (табл. 4.7-4.8).

Таблиця 4.7

Ітерація 1

Після обміну $y_2 \leftrightarrow y_3$		Вільна змінна			Вільний член
		$-y_1$	$-y_3$	$-y_0$	1
Базисна змінна	y_2	4/7	1/7	-25/7	0
	y_4	17/7	-1/7	-17/7	0
	s	-6/7	-5/7	125/7	1
Цільова функція	f_1	-9/7	-4/7	114/7	0
М-рядок		6/7	5/7	-125/7	-1

Таблиця 4.8

Ітерація 2

Після обміну $y_0 \leftrightarrow s$		Вільна змінна			Вільний член
		$-y_1$	$-y_3$	$-s$	1
Базисна змінна	y_2	50/125	0	25/125	25/125
	y_4	289/125	-30/125	17/125	17/125
	y_0	-6/125	-5/125	7/125	7/125
Цільова функція	f_1	-63/125	10/125	-114/125	-114/125
М-рядок		0	0	1	0

Штучна змінна s виведена з базису, тому з подальших розрахунків останній рядок і стовпець, який відповідає штучній змінній, можна виключити (табл. 4.9).

Таблиця 4.9

Ітерація 3

Після обміну $y_1 \leftrightarrow y_4$		Вільна змінна		Вільний член
		$-y_4$	$-y_3$	1
Базисна змінна	y_2			3/17
	y_1			1/17
	y_0			1/17
Цільова функція	f_1	63/289	8/289	-15/17

Критерій оптимальності виконаний, отже

$$Y^* = \left(y_0^*, y_1^*, y_2^*\right) = \left(\frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right), \; f_1^* = \max f_1 = f_1\left(\frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right) = -\frac{15}{17}.$$

Відповідно $f^* = \min f = f\left(\frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{3}{17}\right) = \frac{15}{17}$. Скориставшись виразами (4.64), отримаємо

$$x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = \frac{1/17}{1/17} = 1, \qquad x_2^* = \frac{y_2^*}{y_0^*} = \frac{3/17}{1/17} = 3.$$

Відповідь: $\min f = f(1,3) = \frac{15}{17}$.

Приклад 17. Знайти мінімум функції $f = \frac{3x_1 + 4x_2 + 3x_3}{2x_1 - x_2 + 2x_3}$ при додаткових обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_j \ge 0, \; j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаменник $2x_1 - x_2 + 2x_3$ цільової функції f може набувати як додатних, так і від'ємних значень. Позначимо

$$y_0 = \frac{1}{|2x_1 - x_2 + 2x_3|} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x_1 - x_2 + 2x_3}, & \text{якщо } 2x_1 - x_2 + 2x_3 > 0, \\ \dfrac{1}{-2x_1 + x_2 - 2x_3}, & \text{якщо } 2x_1 - x_2 + 2x_3 < 0, \end{cases}$$

$y_j = y_0 x_j, \; j = \overline{1,3}$.

Тому початкова задача розбивається на дві підзадачі:

1) $f = 3y_1 + 4y_2 + 3y_3 \to \min$, (4.68)

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 - 12y_0 \geq 0, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 - 4y_0 \leq 0, \\ y_1 - y_2 + y_3 + 2y_0 \geq 0, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 = 1, \\ y_0 > 0, y_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \end{cases} \tag{4.69}$$

2) $f = \dfrac{-(3x_1 + 4x_2 + 3x_3)}{-(2x_1 - x_2 + 2x_3)} = -3y_1 - 4y_2 - 3y_3 \to \min$, (4.70)

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 - 12y_0 \geq 0, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 - 4y_0 \leq 0, \\ y_1 - y_2 + y_3 + 2y_0 \geq 0, \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 = 1, \\ y_0 > 0, y_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{4.71}$$

Задача (4.68)-(4.69) відповідає умові $2x_1 - x_2 + 2x_3 > 0$, а (4.70)-(4.71) – умові: $-(2x_1 - x_2 + 2x_3) > 0$.

Опускаючи подробиці розв'язання обох задач за допомогою симплекс-методу, наведемо лише відповіді:

1) задача (4.68)-(4.69) має оптимальний план $Y^* = \left(\overset{*}{y}_0, \overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2, \overset{*}{y}_3\right) = \left(\dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$, $\min f = \dfrac{17}{4}$. Скориставшись формулами (4.67), одержимо

$$\overset{*}{x}_1 = \frac{\overset{*}{y}_1}{\overset{*}{y}_0} = \frac{0}{1/4} = 0,\ \overset{*}{x}_2 = \frac{\overset{*}{y}_2}{\overset{*}{y}_0} = \frac{1/2}{1/4} = 2,\ \overset{*}{x}_3 = \frac{\overset{*}{y}_3}{\overset{*}{y}_0} = \frac{3/4}{1/4} = 3;$$

2) задача (4.70)-(4.71) не має розв'язку.

Відповідь: $\min f = f(X^*) = f(0,2,3) = \dfrac{17}{4}$.

Питання до розділу

1. Постановка задачі нелінійного програмування (ЗНП).
2. Назвіть відмінність між задачами лінійного та нелінійного програмування.
3. Типи задач нелінійного програмування. Чим вони характеризуються?
4. Постановка задачі дробово-лінійного програмування (ЗДЛП).
5. Як встановити напрям обертання прямої при розв’язанні ЗДЛП.
6. Алгоритм графічного методу розв’язання ЗНП.
7. Який тип задач розв’язується методом множників Лагранжа?
8. Матриця Гессе та її застосування.
9. Алгоритм графічного методу розв’язання ЗДЛП?
10. Симплексний метод розв’язання ЗДЛП.
11. Суть методу множників Лагранжа.
12. Визначення опуклих і увігнутих функцій.
13. Постановка задачі опуклого програмування.
14. Умова регулярності Слейтера.
15. Теорема Куна-Таккера.
16. Локальні умови Куна-Таккера.
17. Постановка задачі квадратичного програмування.
18. Визначення квадратичної форми.
19. Види квадратичних форм.
20. Алгоритм розв’язання задачі квадратичного програмування симплекс-методом.

Завдання

1. Розв’язати графічним методом задачу нелінійного програмування:

1) $f = (x_1 - 5)^2 + x_2^2 \to \max\ (\min),$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0; \end{cases}$$

2) $f=-x_1^2+12x_1-x_2^2\to\max(\min)$,

$$\begin{cases}x_1+x_2\le 4,\\ x_1+3x_2\le 6,\\ x_1,x_2\ge 0;\end{cases}$$

3) $f=(x_1-2)^2+(x_2+1)^2\to\max\ (\min)$,

$$\begin{cases}3x_1+2x_2\ge 6,\\ 4x_1+7x_2\le 28,\\ -x_1+x_2\le 1,\\ x_1\ge 0;\end{cases}$$

4) $f=-(x_1-5)^2-(x_2-1)^2\to\max\ (\min)$,

$$\begin{cases}x_1+x_2\ge 2,\\ x_2\le 4,\\ 2x_1-x_2\le 4;\end{cases}$$

5) $f=\dfrac{2x_1+5x_2}{x_1+4x_2}\to\max\ (\min)$,

$$\begin{cases}5x_1+6x_2\le 30,\\ 2x_1+x_2\ge 4,\\ 6x_2\ge 5,\\ x_1\ge 0;\end{cases}$$

6) $f=\dfrac{3x_1-5x_2}{5x_1+6x_2}\to\max\ (\min)$,

$$\begin{cases}2x_1-x_2\le 2,\\ 2x_1+x_2\ge 2,\\ x_2\le 2,\\ x_1\ge 0;\end{cases}$$

7) $f=\dfrac{x_1+2x_2-17}{-x_1-x_2+12}\to\max\ (\min)$,

$$\begin{cases}x_1-4x_2\le 4,\\ x_1+x_2\le 6,\\ x_1\ge 1,\\ x_2\ge 0;\end{cases}$$

8) $f = \dfrac{x_1 + 4x_2 - 3}{5x_1 + 4x_2 - 1} \to \max(\min),$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 1; \end{cases}$$

9) $f = -3x_1 - 3x_2 \to \max(\min),$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 1 \leq 0; \end{cases}$$

10) $f = 3x_1 + x_2 \to \max(\min),$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 40, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

11) $f = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \max(\min),$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $\max f = f(0,3) = 34$, $\min f = f(2,1) = 10$;

2) $\max f = f(4,0) = 32$, $\min f = f(0,2) = -4$;

3) $\max f = f(7,0) = 26$, $\min f = f(2,0) = 1$;

4) $\max f = f(3,2) = -5$, $\min f = f(-2,4) = -58$;

5) $\max f = f\left(5, \dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{17}{10}$, $\min f = f(0{,}5 - \alpha) = \dfrac{5}{4}$, $\alpha \in [0,1]$;

6) $\max f = f(1,0) = \dfrac{3}{5}$, $\min f = f(0{,}1 - \alpha) = -\dfrac{5}{6}$, $\alpha \in [0,1]$;

7) $\max f = f(1,5) = -1$, $\min f = f\left(\dfrac{28}{5}, \dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{53}{30}$;

8) $\max f = f(2,3) = \dfrac{11}{21}$, $\min f = f(2,0) = -\dfrac{1}{9}$;

9) $\max f = f(x_1, 2 - x_1) = -6$, $x_1 \in \left[1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

$\min f = f\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -6 - 3\sqrt{2}$;

10) $\max f = f(6,2) = 20$, $\min f = f(0,0) = 0$;

11) $\max f = f(1,8) = 130$, $\min f = f(8,1) = 4$.

2. Розв'язати симплексним методом задачу дробово-лінійного програмування:

1) $f = \dfrac{5x_1 + x_2}{4x_1 + x_2} \to \max(\min)$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \ge 1; \end{cases}$$

2) $f = \dfrac{2x_1 + 3x_2 + 5}{x_1 + x_2 + 3} \to \max(\min)$,

$$\begin{cases} x_1 \ge 3, \\ x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \ge 1; \end{cases}$$

3) $f = \dfrac{2x_1 + x_2 + 3x_3}{3x_1 + x_2 + 4x_3} \to \max(\min)$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 \ge 6, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0; \end{cases}$$

4) $f = \dfrac{x_1 + 2x_2 + x_3 - 17}{-x_1 - x_2 - x_3 + 12} \to \max(\min)$,

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + x_3 \ge 1. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $\max f = f(5,6) = \dfrac{31}{26}$, $\min f = f(1,6) = 1{,}1$;

2) $\max f = f(3,6) = \dfrac{29}{12}$, $\min f = f(3,4) = 2{,}3$;

3) $\max f = f(0,1,0) = 1$, $\min f = f(6,0,0) = \dfrac{2}{3}$;

4) $\max f = f(0,5,1) = -1$, $\min f = f\left(0, \dfrac{2}{5}, \dfrac{28}{5}\right) = -\dfrac{53}{30}$.

3. Знайти умовні екстремуми, якщо виконуються відповідні умови:

1) $f = 2x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2 + 23$, $x_1 - 14x_2 + 11 = 0$;

2) $f = -3x_1x_2 + 2x_2^2 - 25$, $5x_1 + 4x_2 = 44$;

3) $f = 2x_1 + x_2 + 10$, $x_1^2 + 3x_2^2 = 39$;

4) $f = 3x_1 + 4x_2 + 1$, $x_1^2 - 2x_1x_2 + 10 = 0$.

Відповідь: 1) $\min f = f(3,1) = 20$;

2) $\min f = f\left(\dfrac{32}{5}, 3\right) = 64{,}6$;

3) $\max f = f(6,1) = 23$, $\min f = f(-6,-1) = 11$;

4) $\max f = f\left(2, \dfrac{7}{2}\right) = 21$, $\min f = f\left(-2, -\dfrac{7}{2}\right) = -19$.

4. Розв’язати задачу нелінійного програмування графічним методом. Перевірити знайдену точку на оптимальність за допомогою локальних умов Куна-Таккера.

1) $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

2) $f = -x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

3) $f = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 10x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

4) $f = -(x_1 - 9)^2 - (x_2 - 8)^2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: 1) $\min f = f(1,4) = 8$;

2) $\max f = f(1,1) = 0$;

3) $\min f = f(2,2) = -32$;

4) $\max f = f(3,2) = -72$.

5. Перевірити опуклість (увігнутість) функцій:

1) $f = x_1^2 + 4x_2^2 - 7x_1x_2 + 8x_1 - 10$;

2) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3$;

3) $f = -5(x_1 - 2)^2 - 3x_2^2$;

4) $f = -2x_1^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2x_3 + 7x_1 - 15x_3$.

6. Встановити тип квадратичної форми:

1) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2$;

2) $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$;

3) $F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 12x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

4) $F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 12x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$;

5) $F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 16x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$;

6) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 7x_1x_2$;

7) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2x_3$.

Відповідь: 1) додатно визначена;
2) додатно визначена;
3) від'ємно визначена;
4) невизначена;
5) від'ємно напіввизначена;
6) невизначена;
7) додатно напіввизначена.

7. Розв'язати задачу опуклого програмування:

1) $f = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

2) $f = 4(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min$,

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

3) $f = -4(x_1 - 1)^2 - 9(x_2 - 1)^2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

4) $f = -9(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 3)^2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

5) $f = 4(x_1 - 6)^2 + (5x_2 - 6)^2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ -x_1 + 3\tilde{o}_2 \le 6, \\ x_1, \tilde{o}_2 \ge 0; \end{cases}$$

6) $f = 9x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge -3, \\ 10x_1 + 7x_2 \le 70, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

7) $f = -10x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 + \dfrac{45}{8} \to \max,$

$$\begin{cases} x_2 \le 6, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 56, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Відповідь: 1) $(X^*, \Lambda^*) = (4,2,6,8)$, $\min f = f(4,2) = 10$;

2) $(X^*, \Lambda^*) = (0,5,0,0)$, $\min f = f(0,5) = 16$;

3) $(X^*, \Lambda^*) = (1,1,0,0)$, $\max f = f(1,1) = 0$;

4) $(X^*, \Lambda^*) = \left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{18}{5}, 0\right)$, $\max f = f\left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{6}{5}\right) = -\dfrac{18}{5}$;

5) $(X^*, \Lambda^*) = \left(4, \dfrac{4}{5}, 0, 4, 0\right)$, $\min f = f\left(4, \dfrac{4}{5}\right) = 20$;

6) $(X^*, \Lambda^*) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}, 7, 0, 0\right)$, $\min f = f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{27}{2}$;

7) $(X^*, \Lambda^*) = \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{13}{4}, 0, 0, 13\right)$, $\max f = f\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{13}{4}\right) = -83$.

8. Для виробництва двох видів виробів *A* і *B* підприємство використовує три типи технологічного устаткування. Кожний виріб проходить обробку на кожному з типів устаткування. Відомо, що устаткування I і II типів підприємство може використовувати не більше 32 і 49 год відповідно, а устаткування III типу – не менше 13 год. Визначити план випуску продукції, який мінімізує середню собівартість одного виробу. Необхідні дані, пов'язані з виробництвом, наведені в табл. 4.10.

Таблиця 4.10

Дані завдання 8

Тип устаткування	Затрати часу на обробку одного виробу. год	
	A	*B*
I	8	4
II	4	7
III	3	2
Норми витрат на виробництво одного виробу грош. од.	4	5

Вказівка: за цільову функцію собівартості приймаємо $f(x_1,x_2)=\dfrac{4x_1+5x_2}{x_1+x_2}$, де x_1,x_2 – обсяги виробів *A* і *B* відповідно.

Відповідь: для забезпечення мінімальної середньої собівартості одного виробу, яка дорівнює 4,4 грош. од., підприємство повинно виготовляти 3 вироби першого виду і 2 вироби другого виду.

9. Фірма виготовляє продукцію двох видів А і В, кожна з яких обробляється на верстатах. Час, необхідний для обробки однієї одиниці виробу, наведений у табл. 4.11.

Таблиця 4.11

Дані завдання 9

Верстат	Час обробки, хв	
	А	В
I	24	42
II	12	30

Максимальний час роботи верстатів I і II складає відповідно 48 і 36 год в тиждень. Вивчення ринку збуту показало, що попит протягом тижня на вироби А не перевищує 85 од., а також що попит на вироби В не перевищує попит на вироби А більше, ніж на 25 од. Ціни p_1,p_2 на вироби кожного типу залежать від обсягів виробництва x_1,x_2 і дорівнюють а) $p_1 = 140 - x_1$, $p_2 = 150 - x_2$;

б) $p_1 = 200 - x_1$, $p_2 = 60 - x_2$.

Визначити обсяги виробництва виробів кожного типу, що дозволяють максимально збільшити дохід підприємства.

Відповідь: а) $\max f = f(50,40) = 8900$;

б) $\max f = f(85,20) = 10575$.

10. Для виготовлення двох видів продукції використовуються два види сировини. Витрати сировини для виготовлення кожного виду продукції, її добовий запас і ціна від реалізації одиниці продукції кожного виду наведені в табл. 4.12. Витрати c_1, c_2, грош. од, на виробництво x_1, x_2, од, продукції A і B відповідно дорівнюють

а) $c_1 = x_1^2 + 20x_1$, $c_2 = x_2^2 + 40x_2$;

б) $c_1 = x_1^2 + 170x_1$, $c_2 = x_2^2 + 60x_2 + 50$;

в) $c_1 = x_1^2$, $c_2 = x_2^2 + 80x_1$.

Скласти оптимальний план виробництва, який максимізує прибуток, враховуючи, що виробництво продукції A повинно складати не менше 40% загального обсягу виробництва.

Таблиця 4.12

Дані завдання 10

Сировина	Витрати сировини на 1 од. продукції ,умов. од.		Добовий запас сировини, од
	A	*B*	
I	2	3	180
II	3	2	240
Ціна, грош. од.	180	140	

Відповідь: а) $\max f = f(60,20) = 7600$ грош. од.;

б) $\max f = f(20,30) = 1250$ грош. од.;

в) $\max f = f(72,12) = 8352$ грош. од..

11. Для виготовлення деталей використовується токарне і фрезерне устаткування. Обробка кожної деталі проводиться двома різними технологічними способами. Всі необхідні дані надано в табл. 4.13.

Таблиця 4.13

Дані завдання 11

Устаткування	Час обробки 1 деталі, год		Корисний фонд часу за зміну, верстат-год
	I технологічний спосіб	II технологічний спосіб	
Токарне	1,5	1	120
Фрезерне	1	2	96
Витрати на виготовлення однієї деталі, грош. од.	4	3	

Скласти план завантаження устаткування за одну зміну, який мінімізує собівартість кожної деталі, якщо необхідно виготовити:

а) не менше, ніж 50 деталей;

б) рівно 80 деталей.

Відповідь: а) $\min f = f(4{,}46) = 3{,}08$ грош. од.;

б) $\min f = f(64{,}16) = 3{,}8$ грош. од.

Бібліографічний список

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] / И.Л. Акулич. – М.: Лань, 2011. – 352 с.
2. Барвінський, А.Ф. Математичне програмування [Текст]: навч. посібник / А.Ф. Барвінський, І.Я. Олексів, З.І. Крупка [та ін.]. – Львів: Національний університет «Львівська політехніка» (Інформаційно-видавничий центр «ІНТЕЛЕКТ+» Інституту післядипломної освіти); «Інтелект-Захід», 2004. – 448 с.
3. Вагнер, З.Г. Основы исследования операций [Текст] / З.Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 336 с.
4. Вагнер, З.Г. Основы исследования операций [Текст]. – М.: Мир, 1972. – Т.2. – 488 с.
5. Вагнер, З.Г. Основы исследования операций [Текст]. – М.: Мир, 1973. – Т.3. – 503 с.
6. Васильев, Ф.П. Линейное программирование [Текст] / Ф.П. Васильев, А.Ю. Иваницкий. – М.: Изд-во «Факториал», 1998. – 176 с.
7. Вентцель, Е.С. Исследование операций [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
8. Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
9. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
10. Вітлінський, В.В. Математичне програмування [Текст] / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
11. Глушик М.М., Математичне програмування [Текст]: навч. посібник / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак, В.М. Сороківський. – Львів: Вид-во ЛКА, 2004. – 240 с.
12. Ермольев, Ю.М. Методы стохастического программирования [Текст] / Ю.М. Ермольев. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976.
13. Зуховицкий, С.И. Линейное и выпуклое программирование [Текст] / С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

14. Калихман, И.Л. Динамическое программирование в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. – М.: Высш. школа, 1979. – 125 с.

15. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике [Текст] / П.В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.

16. Косоруков, О.А. Исследование операций [Текст]: учебник / О.А. Косоруков, А.В. Мищенко; под общ. ред. д.э.н., проф. Н.П. Тихомирова. – М: Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с.

17. Костевич, Л.С. Математическое программирование: информационные технологии оптимальных решений [Текст]: учеб. пособие / Л.С. Костевич. – Мн.: Новое знание, 2003. – 424 с.

18. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике [Текст]: учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 407 с.

19. Кузнецов, Ю.Н. Математическое программирование [Текст] / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М.: Высшая школа, 1980. – 300 с.

20. Кузнецов, Ю.Н. Руководство к решению задач по математическому программированию [Текст] / Ю.Н. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. – Мн.: Вышэйшая школа, 1978. – 256 с.

21. Кутковецький, В.Я. Дослідження операцій [Текст]: підручник / В.Я. Кутковецький. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2007. – Т.2. – 272 с.

22. Лавренчук, В.П. Моделі та методи дослідження операцій [Текст]: навч. посібник / В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, Г.С. Пасічник, М.І. Букатар. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – 412 с.

23. Ляшенко, И.Н. Линейное и нелинейное программирование [Текст] / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н З. Шор. – М.: Высшая школа, 1975. – 372 с.

24. Маркова, Н.А. Математическое программирование [Текст]: учебно-метод. пособие / Н.А. Маркова, А.Ю. Чириков. – Донецк: «Юго-Восток, Лтд», 2006. – 268 с.

25. Палий, И.А. Линейное программирование [Текст]: учеб. пособие / И.А. Палий. – М.: Эксмо, 2008. – 256 с.

26. Роман, Л.Л. Дослідження операцій [Текст]: курс лекцій / Л.Л. Роман. – Львів: Видавництво Тараса Сороки, 2008. – 272 с.

27. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций [Текст]: пер. с англ.; 7-е изд. / Хемди А. Таха. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.

Предметний покажчик

Підручник

Панченко Наталія Георгіївна,
Резуненко Марина Євгенівна

ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В УПРАВЛІННІ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Частина I

Відповідальний за випуск Панченко Н.Г.

Редактор Ібрагімова Н.В.

Підписано до друку 11.11.14 р.

Формат паперу 60x84 1/16. Папір писальний.

Умовн.-друк.арк. 6,5. Тираж 300. Замовлення №

Видавець та виготовлювач Українська державна академія залізничного транспорту,
61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха, 7.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 2874 від 12.06.2007 р