

**УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ**

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСАМИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Кафедра вищої математики та фізики

ОСНОВИ ФІЗИКИ

Конспект лекцій

Частина 1

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Харків – 2024

Гресь В. Ю., Котвицька К. А. Основи фізики. Ч. 1. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка: Конспект лекцій. – Харків: УкрДУЗТ, 2024. – 132 с.

Конспект лекцій з дисципліни «Фізика» призначено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня навчання механіко-енергетичного факультету освітніх програм «Локомотиви та локомотивне господарство», «Вагони та транспортна інженерія», «Високошвидкісний рухомий склад», «Електричний транспорт», «Електропостачання та ресурсозберігаючі технології», «Енергетичний менеджмент», «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» і будівельного факультету освітніх програм «Управління колійним комплексом залізниць», «Міський та промисловий транспорт», «Залізничні споруди та колійне господарство», «Промислове і цивільне будівництво», «Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні, колійні машини та обладнання».

Іл. 67, табл. 4, бібліогр. 13 назв.

Конспект лекцій розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри вищої математики та фізики 12 лютого 2024 р, протокол № 5.

Рецензент

проф. Дмитро Чібісов (ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

ЗМІСТ

Тематичний план навчальної дисципліни.....	4
Вступ.....	6
Лекція 1. Предмет фізики. Міжнародна система одиниць.....	7
Лекція 2. Кінематика поступального руху.....	12
Лекція 3. Кінематика обертального руху.....	32
Лекція 4. Динаміка поступального руху.....	38
Лекція 5. Робота, потужність, енергія.....	48
Лекція 6. Закон збереження імпульсу. Використання законів збереження імпульсу та енергії для аналізу зіткнень тіл.....	58
Лекція 7. Динаміка обертального руху.....	68
Лекція 8. Елементи гідро- та аеро-механіки. Механічні властивості речовин і газів.....	79
Лекція 9. Молекулярно-кінетична теорія. Рівняння стану ідеального газу. Ізопроцеси.....	86
Лекція 10. Внутрішня енергія та робота. Фазові перетворення речовини.....	96
Лекція 11. Перший закон термодинаміки. Застосування першого закону термодинаміки до аналізу ізопроцесів в ідеальному газі.....	106
Лекція 12. Другий закон термодинаміки. Теплові двигуни. Коефіцієнт корисної дії (ККД).....	116
Список літератури.....	126
Додатки.....	128

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

МОДУЛЬ 1

Змістовий модуль 1. Фізичні основи класичної механіки.

Тема 1. Предмет фізики. Кінематика поступального руху.

Тема 2. Динаміка матеріальної точки.

Тема 3. Закони збереження в механіці.

Тема 4. Динаміка обертального руху твердого тіла.

Змістовий модуль 2. Молекулярна фізика.

Тема 5. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів.

Тема 6. Закони ідеального газу.

МОДУЛЬ 2

Змістовий модуль 3. Термодинаміка.

Тема 7. Основи термодинаміки.

Тема 8. Другий закон термодинаміки.

Змістовий модуль 4. Електростатика і постійний струм.

Тема 9. Електричний заряд. Електростатичне поле.

Тема 10. Електричне поле в речовині.

Тема 11. Постійний електричний струм.

МОДУЛЬ 3

Змістовий модуль 5. Електромагнетизм.

Тема 12. Магнітне поле та його характеристики. Магнітні властивості речовини.

Тема 13. Електромагнітна індукція.

Змістовий модуль 6. Механічні та електромагнітні коливання.

Тема 14. Гармонічні механічні коливання.

Тема 15. Згасаючі та вимушені механічні коливання.

Тема 16. Коливальний контур. Електромагнітні коливання.

МОДУЛЬ 4

Змістовий модуль 7. Пружні та електромагнітні хвилі. Хвильова оптика.

Тема 17. Пружні хвилі.

Тема 18. Електромагнітні хвилі. Елементи хвильової оптики.

Змістовий модуль 8. Квантова оптика.

Тема 19. Квантова природа випромінювання. Фотоефект. Тиск світла. Ефект Комптона.

Змістовий модуль 9. Елементи фізики атомного ядра.

Тема 20. Будова та властивості атомного ядра.

Тема 21. Радіоактивність. Ядерні реакції.

ВСТУП

Сучасні вимоги до рівня кваліфікації спеціалістів у різних галузях науки та технологій передбачають наявність у молодих спеціалістів чітко сформованої сучасної фізичної картини світу, здатність до наукового мислення, що ґрунтується на твердій основі знань про фундаментальні фізичні поняття та закони, уявлень про перебіг фізичних явищ та процесів. Отже, курс фізики, що пропонується здобувачам перших курсів, є основою для формування фахових компетенцій, які передбачені відповідною освітньою програмою, та слугує підґрунтям для успішного й ефективного вивчення спеціальних дисциплін.

Цей конспект лекцій є стислим викладанням лекційного матеріалу, що пропонується здобувачам будівельного, механіко-енергетичного факультетів при вивченні курсу фізики. Курс лекцій «Основи фізики» поділений на декілька частин. У першій частині розглядаються розділи «Механіка» та «Молекулярна фізика та термодинаміка». У лекціях з механіки описуються закономірності кінематики та динаміки, розглядаються різновиди механічних явищ і процесів. Наводяться приклади фізичних моделей, таких як «матеріальна точка», «абсолютно тверде тіло», «ідеальний газ». У лекціях розділу «Молекулярна фізика та термодинаміка» розглядаються найбільш загальні закономірності будови тіл і речовин, надаються закони термодинаміки та приклади їхнього виконання у неживій і живій природі.

Цей конспект може бути корисним під час підготовки здобувачів до лабораторних та практичних занять, виконання домашніх завдань і самостійного вивчення матеріалу.

Лекція 1

ПРЕДМЕТ ФІЗИКИ. МІЖНАРОДНА СИСТЕМА ОДИНИЦЬ

План лекції

- 1.1 Фізика. Основні розділи.
- 1.2 Міжнародна система одиниць (SI).
- 1.3 Множники та приставки для позначення десяткових кратних і допоміжних одиниць SI.

1.1 Фізика. Основні розділи

Фізика – це наука про найбільш загальні закони та явища природи, яка вивчає механічні, теплові, електромагнітні, світлові явища та явища мікросвіту (рисунок 1.1).

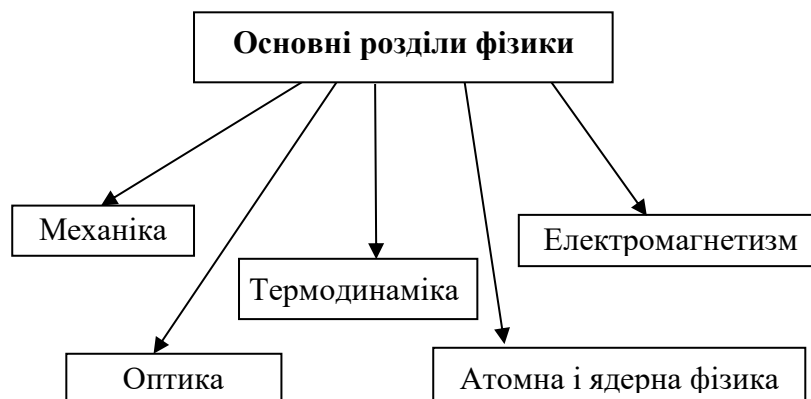


Рисунок 1.1 – Основні розділи фізики

Фізика вивчає властивості фізичних тіл і фізичні явища.

Фізичне тіло – це будь-який об'єкт (предмет) у природі. Приклад (автобус, будинок, Сонце, стіл тощо).

Речовина – це те, з чого складається фізичне тіло (вода, повітря, метал, пластмаса). Будь-яка зміна у природі – це явище природи чи фізичне явище (автобус їде, Земля рухається, стіл стоїть). Фізичні властивості тіл і фізичні явища характеризуються за допомогою фізичних величин.

Фізична величина – це характеристика фізичного тіла чи явища, яку можна виміряти чи обчислити. Кожну фізичну величину позначають буквою латинського чи грецького алфавіту (таблиця 1.1). Ці літери називають символами фізичних величин.

Таблиця 1.1

Фізична величина			Одиниці вимірювання		
Найменування	Розмірність	Позначення	Найменування	Позначення	
				укр.	міжн.
Основні величини					
1 Довжина	L	<i>l</i>	метр	м	m
2 Маса	M	<i>m</i>	кілограм	кг	kg
3 Час	T	<i>t</i>	секунда	с	s
4 Сила електричного струму	I	<i>I</i>	ампер	A	A
5 Термодинамічна температура	θ	<i>T</i>	кельвін	K	K
6 Кількість речовини	N	<i>n</i>	моль	моль	Mol
7 Сила світла	J	<i>I_v</i>	кандела	Кд	Kd
Додаткові величини					
8 Плоский кут			радіан	рад	rad
9 Тілесний кут			стерадіан	ср	sr

1.2 Міжнародна система одиниць (SI)

Міжнародна система одиниць (SI) містить сім основних одиниць для вимірювання основних величин (маса, час, довжина, сила світла, кількість речовини, сила електричного струму, термодинамічна температура) та дві додаткові (плоский кут і тілесний кут).

Довжина — це відстань від точки до точки вздовж деякої лінії, вимір кривої. Для відрізка прямої довжина — відстань між його кінцями, для ламаної — сума довжин її ланок, для інших кривих — верхня границя довжини ламаної лінії, вписаної в цю криву. Одиницею вимірювання довжини в системі SI є метр [1].

Маса — це основна фізична величина, яка вважається однією з фундаментальних характеристик матерії, що визначає її інерційні, енергетичні та гравітаційні властивості від макроскопічних об'єктів до атомів і елементарних частинок. Одиницею вимірювання маси в системі SI є кілограм [1].

Час — одне з основних понять фізики та філософії, одна з координат простору-часу, вздовж якої протягнуті світові лінії фізичних (матеріальних) тіл. Одиницею вимірювання часу в системі SI є секунда [1].

Сила електричного струму (сила струму) — це кількісна характеристика електричного струму в провіднику, скалярна величина $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, яка відповідає кількості заряду (Δq), що проходить крізь переріз провідника за час Δt , розділеному на цей проміжок часу. За одиницю сили струму беруть таку силу струму, за якої відрізки паралельних провідників довжиною 1 м, що розташовані на відстані 1 м один від одного, взаємодіють із силою $2 \cdot 10^{-7}$ Н [1].

Термодинамічна температура (абсолютна температура) є єдиною функцією стану термодинамічної системи, що характеризує напрям самовільного теплообміну між тілами (системами). В Міжнародній системі

одиниць (SI) одиниця вимірювання термодинамічної температури належить до семи основних одиниць і виражається у кельвінах. До одиниць SI, які мають спеціальну назву, належить градус Цельсія для вимірювання температури за шкалою Цельсія.

Сила світла — відношення світлового потоку, до тілесного кута, в межах якого проходить цей потік. Одиницею вимірювання в системі SI є кандела [1].

Кількість речовини — фізична величина, що характеризує кількість специфічних однотипних структурних одиниць-елементів (частинок), з яких складається речовина. Одиницею вимірювання в системі SI є моль [1].

Одиниці виміру багатьох фізичних величин можна отримати за допомогою формул через основні одиниці, наприклад:

- швидкість $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{t}$, м/с;

- прискорення $\vec{a} = \frac{\vec{v}}{t}$, м/с²;

- сила $\vec{F} = m\vec{a}$, Н;

- імпульс $\vec{p} = m\vec{v}$, кг·м/с.

1.3 Множники та приставки для позначення десяткових кратних і допоміжних одиниць SI

Для формування кратних і дольних одиниць, що відрізняються від базових одиниць системи SI у певне ціле число разів, використовуються спеціальні приставки. Їх приєднують до назви базової одиниці. Позасистемні величини пов'язані з основними величинами SI за допомогою відповідних множників. Наприклад: 1 МПа = 10⁶ Па, 1 мкм = 10⁻⁶ м, тощо. Відповідну інформацію можна знайти у додатку Б.

Питання до лекції

- 1 Що вивчає фізика?
- 2 Назвіть основні розділи фізики.
- 3 Що називають фізичним тілом? Наведіть приклади.
- 4 Що таке явище природи, фізичне явище? Наведіть приклади фізичних явищ.
- 5 Що називають фізичною величиною? Наведіть приклади фізичних величин.
- 6 Що називають системою фізичних величин?
- 7 Скільки основних фізичних величин у SI? Назвіть їх.
- 8 Скільки додаткових фізичних величин у SI? Назвіть їх.
- 9 Виразіть в основних одиницях SI: 2 години 34 хвилини 11 секунд, 3 км 34 м.
- 10 Переведіть за допомогою коефіцієнтів одиниці SI: 4 ГПа, 0,2 кОм, 760 мкм, 120 нФ.

Лекція 2

КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

План лекції

2.1 Основні поняття та визначення в механіці. Кінематика як підрозділ механіки.

2.2 Основна задача механіки. Система відліку.

2.3 Радіус-вектор матеріальної точки. Кінематичні рівняння руху. Траєкторія. Шлях. Переміщення.

2.4 Рівномірний прямолінійний рух. Рівняння рівномірного руху. Графічні залежності.

2.5 Нерівномірний рух. Середня швидкість. Миттєва швидкість.

2.6 Рівнозмінний рух. Прискорення. Рівняння руху. Графічні залежності.

2.7 Вільне падіння. Прискорення вільного падіння.

2.8 Рух тіла, кинутого вгору (вниз).

2.1 Основні поняття та визначення в механіці. Кінематика як підрозділ механіки

Розділ фізики, в якому вивчається механічний рух називається **механіка**. **Механічним рухом** прийнято називати процеси зміни взаємного розташування тіл у просторі і часі відносно інших тіл.

Механіка поділяється на такі розділи:

- **Класична механіка** (механіка Галілея-Ньютона) – вивчає рух макроскопічних тіл, що рухаються зі швидкостями багато меншими за швидкість світла у вакуумі ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

- **Релятивістська механіка** (спеціальна теорія відносності СТВ) – вивчає рух тіл, що рухаються зі швидкостями, близькими до швидкості світла у вакуумі.

- **Квантова механіка** (хвильова механіка) – вивчає рух мікроскопічних тіл, таких як окремі атоми і елементарні частинки.

Класична механіка складається з трьох основних підрозділів:

- **Кінематика** вивчає рух тіл в незалежності від причини, що цей рух спричиняє. Основними характеристиками кінематики є час, швидкість, прискорення, шлях, переміщення.

- **Динаміка** вивчає закони руху тіл і причини, що зумовлюють цей рух. Основні характеристики динаміки – маса, імпульс, сила, механічна робота та енергія.

- **Статика** вивчає рівновагу та поведінку нерухомих тіл під дією сил. Основні поняття, які вивчаються в статистиці, це сила, момент сили, маса, вага, рівновага.

2.2 Основна задача механіки. Система відліку

Основна задача механіки полягає у тому, щоб визначити положення тіла у просторі у будь-який момент часу. Положення тіла в просторі можна визначити тільки відносно інших тіл. Це стосується і руху тіла, тобто зміни його положення. Тіло або систему нерухомих одне відносно одного тіл називають **тілом відліку**.

Для визначення положення тіла з тілом відліку пов'язують систему координат, а оскільки рух відбувається не тільки в просторі, але й у часі, необхідний прилад для відліку часу.

Тіло відліку O , пов'язана з ним система координат та прилад для відліку часу утворюють *систему відліку* (рисунок 2.1).

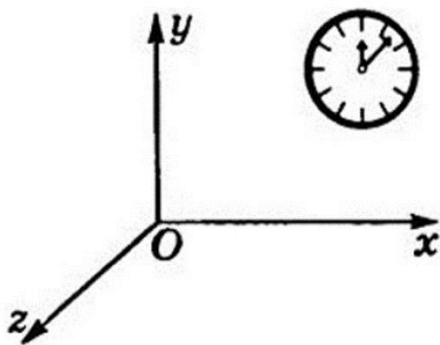


Рисунок 2.1 – Система відліку [2] точка, абсолютно тверде тіло та інші.

Обирати систему відліку можна по-різному, залежно від нашого вибору ми отримаємо різні картини руху, тобто механічний рух є відносним. Для опису руху тіла в механіці використовуються різні фізичні моделі, такі як матеріальна точка, абсолютно тверде тіло та інші.

Матеріальна точка (МТ) – тіло, розмірами якого в умовах задачі можна знехтувати. Отже, коли ми розглядаємо об'єкт як матеріальну точку, ми знехтуємо розмірами цього об'єкта порівняно з відстанями, на яких відбувається його рух.

Абсолютно твердим тілом (АТТ) називають сукупність матеріальних точок, відстані між якими при русі тіла залишаються незмінними. Реальне тіло можна вважати абсолютно твердим, якщо в умовах задачі його деформаціями можна знехтувати.

2.3 Радіус-вектор матеріальної точки. Кінематичні рівняння руху. Траєкторія. Шлях. Переміщення

Розглянемо рух матеріальної точки відносно деякої системи координат. Положення точки A задається за допомогою радіус-вектора \vec{r} (рисунок 2.2).

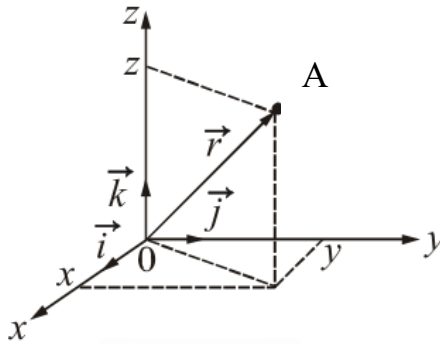


Рисунок 2.2 – Радіус-вектор [8]

Радіус-вектор (\vec{r}) – це вектор, що сполучає початок координат, точку O (або деяку фіксовану точку) з певною точкою в просторі. У тривимірному просторі радіус-вектор можна представити у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

модуль радіус-вектора дорівнює

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – одиничні безрозмірні вектори (орти) вздовж осей координат x , y , z .

У кінематиці для того, щоб повністю описати рух, необхідно записати рівняння руху точки в декартових координатах

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

або у векторному вигляді

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Розглянемо рух матеріальної точки в просторі (рисунок 2.3). Нехай у момент часу t_0 матеріальна точка знаходиться в точці A , а через проміжок часу Δt у точці B .

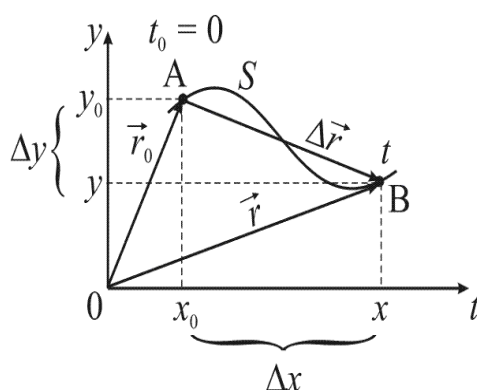


Рисунок 2.3 – Рух матеріальної точки в просторі [2]

Кінець радіус-вектора під час руху за час Δt описує лінію, яка називається *траєкторією* (дуга AB).

Відстань між точками A і B , виміряна вздовж траєкторії, називається *пройденим шляхом* S . З часом шлях може збільшуватися або залишатися незмінним.

Одиниця вимірювання шляху в SI – метр: $[S] = \text{м}$.

Вектор, що з'єднує початкове положення точки A з його кінцевим положенням B за час Δt (від t_0 до $t_1 = t_0 + \Delta t$) називається **вектором переміщення або переміщенням** ($\Delta \vec{r}$)

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0),$$

де \vec{r}_1 – кінцевий радіус-вектор точки,

\vec{r}_0 – початковий радіус-вектор точки. Одиниця вимірювання переміщення в SI – метр: $[\Delta r] = \text{м}$.

Зауважимо, що переміщення є векторною величиною. З часом модуль вектора переміщення може збільшуватися, зменшуватися, або залишатися незмінним.

2.4 Рівномірний прямолінійний рух. Рівняння рівномірного руху. Графічні залежності

Рівномірний рух – рух, під час якого матеріальна точка (тіло) за будь-які рівні проміжки часу долає однаковий шлях. Цей рух може бути як криволінійним (траєкторія руху – крива лінія) (рисунок 2.4, *а*), так і прямолінійним (траєкторія руху – пряма лінія) (рисунок 2.4, *б*).

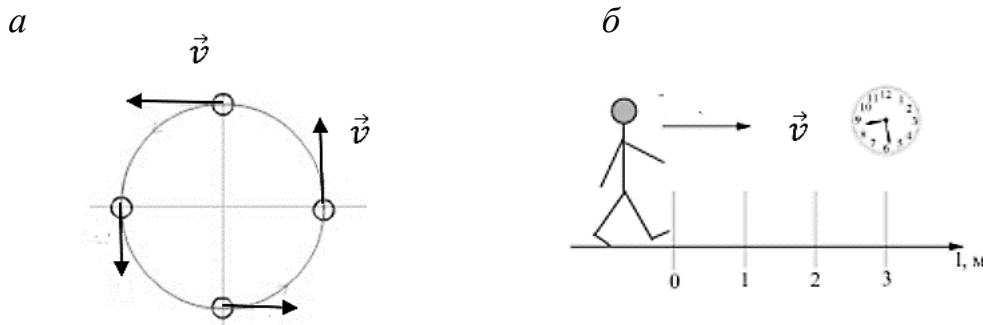


Рисунок 2.4 – Рівномірний криволінійний (*а*) і прямолінійний (*б*) рух [6]

Рівномірний прямолінійний рух – механічний рух, під час якого тіло за будь-які рівні інтервали часу здійснює однакові переміщення. Для характеристики руху тіла вводиться векторна величина – швидкість, яка визначає швидкість руху тіла.

Швидкість рівномірного прямолінійного руху тіла (\vec{v}) – векторна фізична величина, яка дорівнює відношенню переміщення $\Delta\vec{r}$ до інтервалу часу Δt , за який це переміщення відбулося

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Одиниця вимірювання швидкості в SI – метр за секунду: $[v] = \text{м/с}$.

Розглянемо найпростіший випадок руху матеріальної точки – рух по *прямій лінії*. Протягом певного інтервалу часу Δt точка переміщується вздовж прямої лінії відносно осі OX (рисунок 2.5).

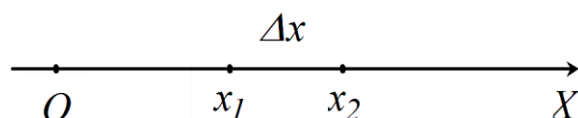


Рисунок 2.5 – Переміщення точки вздовж прямої лінії відносно осі OX

У мить часу t матеріальна точка знаходилася в точці з координатою $x_1 = x(t)$, а в мить часу $(t + \Delta t)$ – у точці з координатою $x_2 = x(t + \Delta t)$. Переміщення точки Δx за час Δt визначається за формулою

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t + \Delta t) - x(t),$$

якщо рух точки відбувається у напрямку осі OX , то переміщення буде позитивним, якщо проти напрямку осі OX – негативним.

Відношення переміщення Δx до інтервалу часу Δt , за який відбулося це переміщення, називається **середньою швидкістю переміщення** $v_{\text{ср}}$ матеріальної точки за час Δt

$$v_{\text{ср}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

якщо середня швидкість для будь-якого проміжку часу Δt однакова, то цей рух відбувається з постійною швидкістю.

Для рівномірного прямолінійного руху рівняння руху в проєкції на ось Ox має вигляд

$$x = x_0 + v_x t,$$

де x_0 – початкова координата тіла в мить часу $t = 0$, v_x – проєкція швидкості на ось Ox .

Шлях S , що пройшло тіло вздовж осі Ox

$$S = |x - x_0|, \quad \text{або} \quad S = |v_x|t = vt.$$

Під час руху з рівномірною швидкістю графік залежності швидкості від часу $v(t)$ набуває форми прямої лінії, яка паралельна осі абсцис (рисунок 2.6).

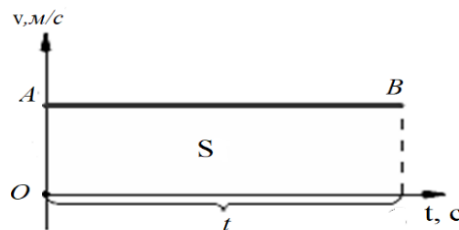
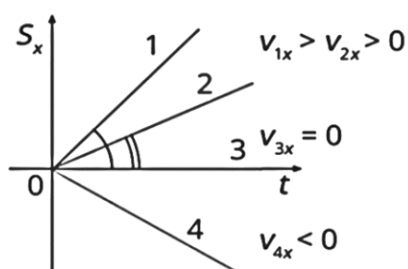


Рисунок 2.6 – Графік залежності швидкості від часу $v(t)$ при рівномірному русі [6]

Довжина шляху, пройденого тілом, визначається площею прямокутника, що розташований під цією прямою AB . У разі рівномірного руху графік залежності пройденого шляху від часу $S(t)$ визначається лінійною залежністю, що проходить через точку O (рисунок 2.7, а).

a



б

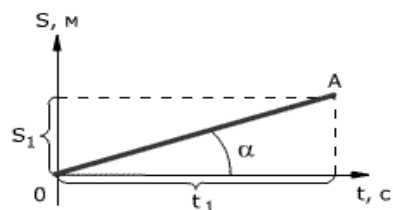


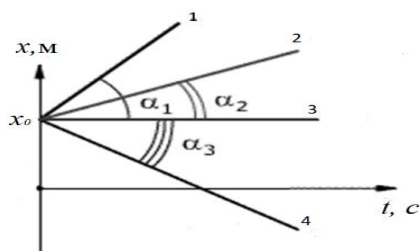
Рисунок 2.7 – Графік залежності шляху від часу $S(t)$
для рівномірного руху [6]

Кут нахилу цієї лінії, позначається α та визначає тангенс кута і має назву *кутовий коефіцієнт* (рисунок 2.7, б)

$$v = \operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{t}.$$

Графік залежності координати від часу $x(t)$ для різних випадків рівномірного прямолінійного руху матеріальної точки наведено на рисунку 2.8. Пряма 1 і 2 відповідають випадку $x_0 > 0, v_x > 0$, пряма 3 – випадку $x_0 > 0, v_x = 0$, пряма 4 – $x_0 > 0, v_x < 0$ (рисунок 2.8, а).

a



б

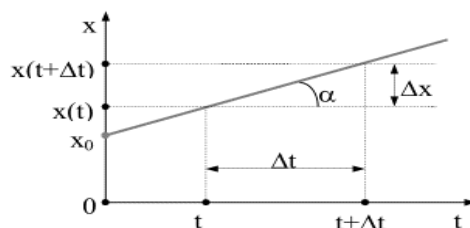


Рисунок 2.8 – Графік залежності координати від часу $x(t)$
для рівномірного прямолінійного руху [6]

Тангенс кута α (рисунок 2.8, б) в цьому випадку може бути обчислений за допомогою формули

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

З рисунка 2.8, а отримуємо, що кут нахилу α_1 більше кута нахилу α_2 , тобто за один і той же проміжок часу точка, що рухається зі швидкістю v_{x1} проходить більшу відстань ніж при русі зі швидкістю v_{x2} . У випадку руху $\alpha - \alpha_4 < 0$, тобто рух точки відбувається в зворотному напрямку осі ОХ.

2.5 Нерівномірний рух. Середня швидкість. Миттєва швидкість

Рух, при якому тіло за рівні проміжки часу здійснює різні переміщення називається **нерівномірним**, або **змінним**. При нерівномірному русі швидкість змінюється з часом, тому для характеристики руху тіла вводять поняття середньої і миттєвої швидкості.

Розглянемо рух матеріальної точки по криволінійній траєкторії AB . За час Δt матеріальна точка пройде шлях S і матиме переміщення $\overrightarrow{\Delta r}$ (рисунок 2.9).

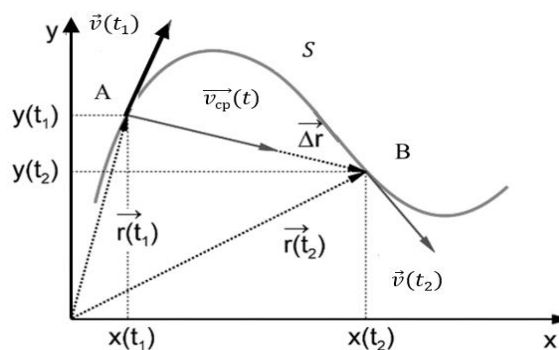


Рисунок 2.9 – Рух матеріальної точки по криволінійній траєкторії AB [2]

Нехай в момент часу t_1 положення точки описується радіус-вектором $\vec{r}(t_1)$, в момент часу t_2 радіус-вектором $\vec{r}(t_2)$. Тоді середня швидкість за проміжок часу Δt , буде дорівнювати

$$\vec{v}_{\text{cp}}(t) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

середня швидкість переміщення \vec{v}_{cp} спрямована вздовж вектора переміщення $\Delta \vec{r}$.

Середня шляхова швидкість – це скалярна величина, яка дорівнює відстані S , яку проходить тіло вздовж траєкторії за інтервал часу Δt

$$\langle v_s \rangle = \frac{S}{\Delta t},$$

середня шляхова швидкість $\langle v_s \rangle$ не має напрямку.

У деяких випадках використовують поняття миттєвої швидкості. Для визначення миттєвої швидкості матеріальної точки будемо вважати, що миттєва швидкість змінюється неперервно.

Миттєва швидкість – швидкість тіла в мить часу, що дорівнює похідній радіуса-вектора за часом

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t),$$

де $d\vec{r}$ – нескінченно мале переміщення за нескінченно малим проміжком часу dt . Вектор миттєвої швидкості \vec{v} в будь-якій точці траєкторії спрямований по дотичній до траєкторії у даній точці в бік руху тіла.

З рисунка 2.9 бачимо, що при наближенні інтервалу часу Δt до нуля, відстань ΔS все ближче підходить до модуля вектора-переміщення $|\Delta \vec{r}|$.

Отже, модулі миттєвої швидкості переміщення $|\vec{v}|$ та миттєвої швидкості руху v стають ідентичними при наближенні Δt до нуля

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S} = S'(t).$$

Шлях S , пройдений тілом протягом інтервалу часу від t_1 до t_2 , можна виразити через інтеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Вектор \vec{v} можна розкласти на три складові v_x, v_y, v_z

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

де $\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$, – проєкції вектора швидкості на відповідні осі.

Модуль миттєвої швидкості

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

2.6 Рівнозмінний рух. Прискорення. Рівняння руху. Графічні залежності

Рівнозмінний рух – це рух, при якому величина та напрям прискорення не змінюються ($\vec{a} = const$). Рівнозмінний рух може бути:

- *рівноприскореним* ($\vec{a} > 0$), під час якого швидкість руху тіла збільшується за будь-які рівні інтервали часу Δt ;

- *рівносповільненним* ($\vec{a} < 0$), при якому за однакові проміжки часу Δt швидкість зменшується на одну і ту саму величину.

Розглянемо криволінійний рух матеріальної точки на площині (рисунок 2.10). Для характеристики такого рівнозмінного руху вводять поняття середнього та миттєвого прискорення. Позначимо \vec{v}_1 швидкість в точці 1 і \vec{v}_2 швидкість у положенні 2 (рисунок 2.11). Щоб охарактеризувати зміну швидкості використовується величина прискорення

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Одиниця вимірювання прискорення в SI: $[\vec{a}] = \text{м/с}^2$.

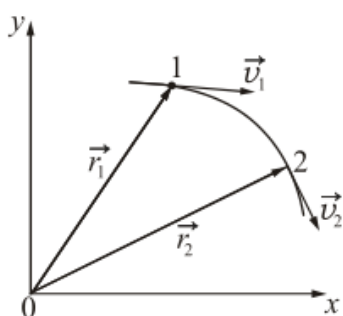


Рисунок 2.10 – Криволінійний рух матеріальної точки на площині [7]

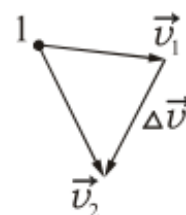


Рисунок 2.11 – Зміна швидкості [7]

Середнє прискорення – векторна величина, яка визначається відношенням зміни швидкості $\Delta \vec{v}$ до інтервалу часу Δt , за який відбулась ця зміна. Напрямок середнього прискорення співпадає за напрямком з вектором $\Delta \vec{v}$. Спрямуємо час $\Delta t \rightarrow 0$, одержимо миттєве прискорення

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t),$$

Отже, прискорення (або миттєве прискорення) є векторною величиною, яка дорівнює першій похідній швидкості $d\vec{v}$ за часом dt , або другій похідній радіуса-вектора $d\vec{r}$ за часом.

Прискорення можна виразити через його проєкції

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\text{де } \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \text{ – проєкції прискорення } \vec{a} \text{ на осі координат.}$$

Тобто компоненти прискорення дорівнюють другим похідним відповідних координат за часом.

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Знайдемо формули для швидкості $v(t)$ та для радіус-вектора $\vec{r}(t)$ в момент часу t

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt,$$

візьмемо, що в початковий момент часу t_0 швидкість буде дорівнювати \vec{v}_0 , в момент часу t отримуємо

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt.$$

Для знаходження радіус-вектора $\vec{r}(t)$ в момент часу t використаємо формулу

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt,$$

в момент часу t_0 радіус-вектор має значення \vec{r}_0 , в момент часу t отримуємо

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t)dt.$$

Наприклад, для рівноприскореного руху, за умови $t_0 = 0$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t)dt.$$

Якщо підставити $\vec{v}(t)$ в формулу для знаходження радіус-вектора, отримуємо

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t (\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t)dt.$$

Продемонструємо графіки залежності прискорення, швидкості та координати від часу під час рівнозмінного руху.

Графік залежності прискорення від часу $a(t)$ буде горизонтальною прямою (рисунок 2.12), оскільки при рівнозмінному русі прискорення залишається постійним і не змінюється з часом ($\vec{a} = const$). Пряма розташована вище від осі t , якщо рух є рівномірноприскореним ($a_x > 0$), на осі t ($a_x = 0$) – для рівномірного руху, і нижче від осі t , якщо рух є рівносповільнений ($a_x < 0$). Графік залежності швидкості від часу $v(t)$ є прямою лінією, що утворює гострий кут β з віссю t (рисунок 2.13).

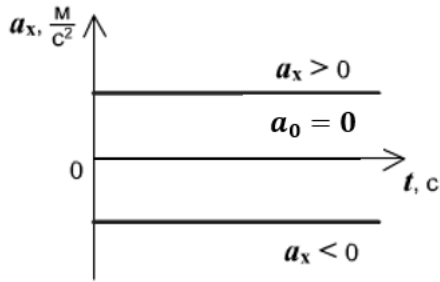


Рисунок 2.12 – Графік залежності прискорення від часу $a(t)$ при рівнозмітному русі [6]

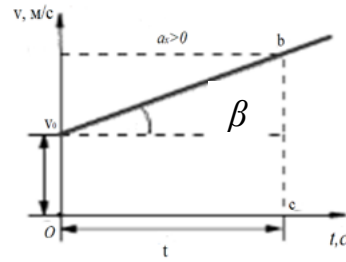


Рисунок 2.13 – Графік залежності швидкості від часу $v(t)$ при рівнозмітному русі [6]

З графіка тангенс кута β нахилу прямої до осі t

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = tg\beta.$$

Проекція швидкості v_x на вісь Ox буде мати вигляд

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t,$$

де v_{0x} – початкова швидкість тіла, тобто швидкість в момент часу $t = 0$.

Формула для обчислення пройденого шляху має вигляд

$$S = \int_0^t (v_{0x} + a_x) dt = v_{0x}t + \frac{at^2}{2}.$$

Шлях тіла при рівноприскореному русі вздовж осі Ox чисельно дорівнює площі фігури, обмеженої графіком проекції швидкості і віссю Ot (рисунок 2.13).

Графік залежності координати від часу $x(t)$ відображає квадратичну залежність із початковою координатою x_0 , що розташована на осі Ox (рисунок 2.14).

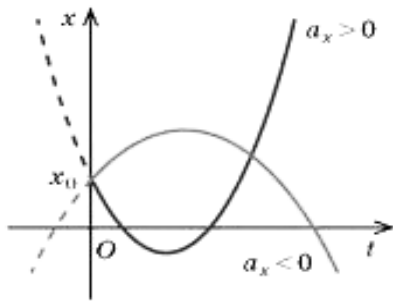


Рисунок 2.14 – Графік залежності координати від часу $x(t)$ при рівнозмінному русі [7]

Вітки параболи спрямовані вгору, якщо $a_x > 0$, і навпаки вітки параболи спрямовані донизу, якщо $a_x < 0$. Координату тіла $x(t)$ за будь-який момент часу можна визначити за формулою

$$x = x_0 \pm v_{0x} t \pm \frac{a_x t^2}{2}.$$

Одним із прикладів рівноприскореного руху є вільне падіння.

2.7 Вільне падіння. Прискорення вільного падіння

Вільне падіння – це рух тіла під дією сили тяжіння без урахування опору повітря. Всі тіла при вільному падінні рухаються з однаковим прискоренням, яке називається *прискоренням вільного падіння*. Числове значення прискорення вільного падіння було встановлене італійським вченим Г. Галілей. Він експериментально розрахував, що «якщо тіло вільно падає з невеликої (порівняно з радіусом Землі) висоти, то вектор прискорення спрямований вертикально вниз, а його модуль дорівнює $g = 9,8 \frac{m}{c^2}$ ».

Прискорення вільного падіння різниться в різних точках Землі: на полюсі воно дорівнює $9,83 \frac{m}{c^2}$, а на екваторі – $9,78 \frac{m}{c^2}$.

Вільне падіння тіла (без початкової швидкості). Розглянемо рух тіла, що вільно падає без початкової швидкості з висоти h (рисунок 2.15).

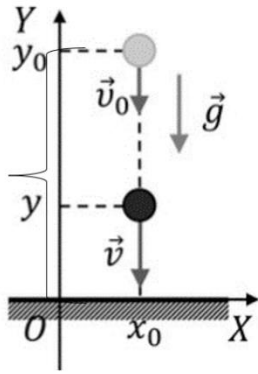


Рисунок 2.15 – Вільне падіння тіла без початкової швидкості [5]

Якщо направити вісь ОУ вертикально вгору, тоді за початкової умови

$$y_0 = h, \quad v_{0y} = 0, \quad a_y = -g,$$

рівняння руху

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}, \quad (2.7.1)$$

$$v_y(t) = v_y = -gt' \quad (2.7.2)$$

При досягненні тілом поверхні Землі координата $y = 0$, тоді з рівняння (2.7.1)

$$h = \frac{gt^2}{2},$$

звідки час польоту тіла

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

Швидкість тіла в мить падіння на Землю приймає максимальне значення. Рівняння (2.7.2) приймає вигляд

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh},$$

звідки

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

2.8 Рух тіла, кинутого вертикально вгору (вниз)

Розглянемо рух тіла, кинутого вертикально вгору (рисунок 2.16). При русі тіла вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 тіло рухатиметься деякий час рівносповільнено, а потім почне падати внаслідок дії сили тяжіння F_T .

Направимо вісь OY вертикально вгору, тоді $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$.

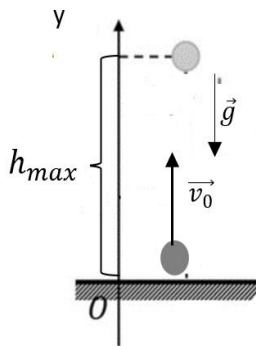


Рисунок 2.16 – Рух тіла, кинутого вертикально вгору [5]

Рівняння руху набувають вигляду

$$y(t) = h + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad (2.8.1)$$

$$v(y) = v_{0y} - gt. \quad (2.8.2)$$

Коли тіло досягне максимальної висоти h_{max} , проєкція швидкості на ось OY дорівнюватиме нулю, тоді з рівняння (2.8.2) маємо $v_{0y} = gt^*$, звідки час підйому тіла $t^* = \frac{v_{0y}}{g}$.

Підставляючи час підйому в рівняння (2.8.1) отримуємо максимальну висоту підйому тіла

$$h_{max} = y(t^*) = h + v_{0y}t^* - \frac{gt^{*2}}{2} = h + \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Якщо тіло рухається з поверхні Землі вертикально вгору з початковою швидкістю v_{0y} , то максимальна висота підйому

$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

При падінні тіла на поверхню Землі в мить часу t_2 можна знайти скільки часу тіло рухалось

$$t_2 = 2t^* = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

За відсутності опору повітря час руху до максимальної висоти h_{max} дорівнює часу руху з максимальної висоти до поверхні Землі.

Питання до лекції

- 1 Що називається механічним рухом? Наведіть приклади.
- 2 Дайте визначення матеріальної точки. Наведіть приклади.
- 3 Сформулюйте основне завдання механіки. Перелічіть фізичні величини, які потрібно знати для його вирішення.
- 4 Що таке тіло відліку? Що називається траєкторією? Які види траєкторії Вам відомі?
- 5 Що таке шлях? Запишіть формулу для знаходження шляху.
- 6 Що таке радіус-вектор? Як він спрямований?
- 7 Який рух називають рівномірним прямолінійним?
- 8 Який рух називають рівнозмінним прямолінійним? На які види поділяється рівнозмінний рух? Як змінюється швидкість при рівнозмінному русі?
- 9 Який рух називають рівноприскореним? Який рух називають рівносповільненим? Намалюйте графік залежності прискорення від часу для рівноприскореного та рівносповільненого руху.
- 10 Що називається вільним падінням? Що називається прискоренням вільного падіння?

Лекція 3

КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

План лекції

3.1 Рух матеріальної точки по колу. Тангенціальне та нормальне прискорення.

3.2 Обертальний рух та його основні характеристики.

3.3 Зв'язок між лінійними та кутовими величинами при русі матеріальної точки по колу.

3.1 Рух матеріальної точки по колу. Тангенціальне та нормальне прискорення

При криволінійному русі вектор прискорення можна розкласти на дві складові (рисунок 3.1).

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

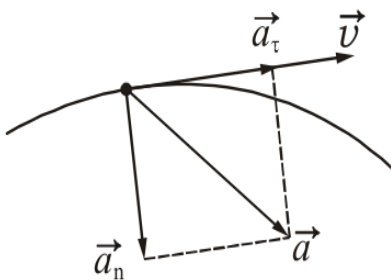


Рисунок 3.1 – Тангенціальне та нормальне прискорення [3]

де \vec{a}_n – нормальне прискорення, \vec{a}_τ – тангенціальне прискорення.

Нормальне прискорення (або доцентрове) – характеризує зміну швидкості за напрямком і спрямоване по нормалі до траєкторії

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Тангенціальне прискорення (або дотичне) – характеризує зміну швидкості за модулем і спрямоване по дотичній до траєкторії

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}.$$

Вектори нормального та тангенціального прискорення завжди перпендикулярні один одному, тоді модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}.$$

3.2 Обертальний рух та його основні характеристики

Обертальним рухом називається рух, під час якого всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній і тій же прямій. Цю пряму називають віссю обертання.

Розглянемо рух матеріальної точки відносно осі OO' (рисунок 3.2). Положення точки через проміжок часу dt задається кутом $d\varphi$. Модуль вектора кутового переміщення $d\vec{\varphi}$ дорівнює куту повороту $d\varphi$.

Напрямок вектора кутової швидкості співпадає з напрямком кутового переміщення та визначається правилом правого гвинта (рисунок 3.3). Для того щоб вказати як відбувається обертання вводиться поняття кутового переміщення.

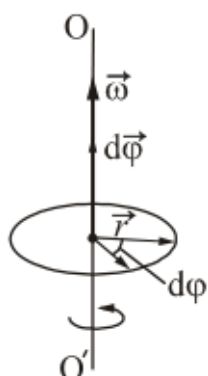


Рисунок 3.2 – Рух матеріальної точки відносно осі OO' [8]

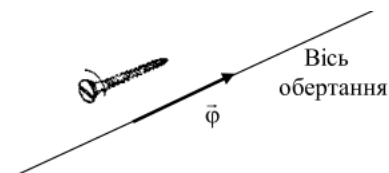


Рисунок 3.3 – Правило правого гвинта [8]

Кутове переміщення ($d\vec{\varphi}$) – це вектор, модуль якого дорівнює куту повороту, а напрямок пов'язаний з напрямком руху правилом правого гвинта.

Одиниця вимірювання кутового переміщення в SI – радіан: $[d\vec{\varphi}] = \text{рад}$.

Кутова швидкість ($\vec{\omega}$) – векторна фізична величина, що визначає швидкість обертання та обчислюється як перша похідна від кутового переміщення за часом

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Одиниця вимірювання кутової швидкості в SI: $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Для рівномірного руху формулу можна переписати у вигляді

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Частота (ν) – величина, яка дорівнює кількості обертів за одиницю часу

$$\nu = \frac{N}{t}.$$

Одиниця вимірювання частоти в SI: $[\nu] = \text{с}^{-1}$

Період (T) – час, за який відбувається один повний оберт.

$$T = \frac{t}{N},$$

Одиниця вимірювання періоду в SI – секунда: $[T] = \text{с}$.

Період та частота пов'язані співвідношенням

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Якщо точка здійснила N обертів, то кут повороту її радіуса-вектора $\varphi = 2\pi N$, а його кутова швидкість $\omega = \varphi/t = 2\pi N/t$.

Зв'язок кутової швидкості ω з частотою обертання і періодом

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Для того, щоб охарактеризувати зміну кутової швидкості з часом використовують поняття **кутового прискорення**

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2},$$

Одиниця вимірювання кутового прискорення в SI: $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Кутове прискорення також величина векторна, його напрямок збігається з напрямком кутової швидкості, якщо рух прискорений $\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$ (рисунок 3.4, *a*), та протилежний, якщо обертання сповільнене $\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$ (рисунок 3.4, *б*).

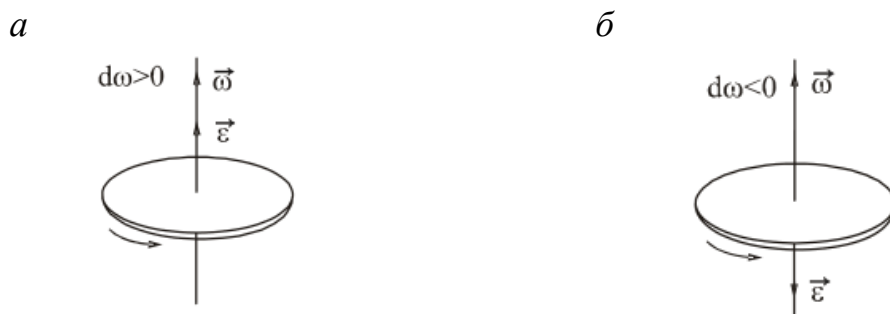


Рисунок 3.4 – Напрямок кутового прискорення за умови $\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$ (*a*),

за умови $\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$ (*б*) [3]

3.3 Зв'язок між лінійними та кутовими величинами при русі матеріальної точки по колу

Розглянемо зв'язки між основними лінійними та кутовими характеристиками матеріальної точки при її русі по колу.

1 Між модулями лінійної швидкості v точки та кутовою швидкістю ω :

$$v = \omega r.$$

2 Між модулями тангенціального прискорення a_τ та кутового прискорення ε :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon.$$

3 Між модулями нормального прискорення a_n та кутової швидкості ω :

$$a_n = \frac{v}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

4 Між повним прискоренням точки та її кутовою швидкістю та кутовим прискоренням

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

У таблиці 3.1 подані порівняльні характеристики поступального та обертального рухів та закони, що описують їх.

Таблиця 3.1

Поступальний рух	Обертальний рух
Рівномірний	
$v = const$	$\omega = const$
$s_0 = s_0 + vt, \quad a_\tau = 0$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \varepsilon = 0$
Рівнозмінний	
$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{a_\tau t^2}{2},$ $v = v_0 \pm a_\tau t$ $a_\tau = const$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varepsilon = const$
Нерівномірний	
$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Питання до лекції

- 1 Який рух називається обертальним?
- 2 Що характеризує кутова швидкість? Запишіть формулу.
- 3 Що називається періодом обертання?
- 4 Як пов'язані між собою період і частота?
- 5 Запишіть формулу зв'язку лінійної та кутової швидкості.
- 6 Що таке тангенціальне прискорення? Запишіть формулу.
- 7 Що таке нормальне прискорення? Як спрямоване нормальне прискорення?
- 8 Як пов'язані між собою модуль нормального прискорення та кутова швидкість?
- 9 Як пов'язані між собою модуль тангенціального прискорення та кутове прискорення?

Лекція 4

ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ

План лекції

- 4.1 Основні характеристики динаміки.
- 4.2 Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку.
- 4.3 Види взаємодій. Гравітаційна взаємодія.
- 4.4 Електромагнітна взаємодія.

4.1 Основні характеристики динаміки

Динаміка – розділ механіки, у якому вивчаються закони руху і причини, що викликають або змінюють цей рух.

В основі динаміки лежать три закони Ньютона, які були одержані внаслідок узагальнення великої кількості експериментальних фактів. До основних характеристик динаміки поступального руху відносяться маса m , імпульс \vec{p} і сила \vec{F} .

Маса (m) – скалярна величина, що є мірою інертних та гравітаційних властивостей тіла в поступальному русі.

Одиниця вимірювання маси в системі SI – кілограм: $[m] = \text{кг}$.

Основні властивості маси:

- 1) маса в класичній механіці не залежить від швидкості руху;
- 2) маса є «адитивною» величиною, тобто маса тіла, яка складається з кількох частин, дорівнює сумі мас усіх його частин

$$m = \sum_{i=1}^N m_i.$$

- 3) маса замкнутої системи залишається величиною сталою, тобто виконується закон збереження маси.

Імпульс тіла (\vec{p}) – векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси на вектор її швидкості

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Напрямок вектора імпульсу тіла співпадає з напрямком швидкості тіла. Одиниця вимірювання імпульсу в SI: $[p] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Сила (\vec{F}) – векторна фізична величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, унаслідок якої тіло одержує прискорення або деформується.

Одиниця вимірювання сили в SI – Ньютон: $[F] = \text{Н} \cdot \text{м}$.

Сила характеризується модулем (числовою величиною), точкою прикладання та напрямком. Пряма, вздовж якої спрямована сила, називається лінією дії сили. Результируюча сила, що діє на тіло, дорівнює векторній сумі сил, з якими кожне з оточуючих тіл діє на це тіло за відсутності дії на нього інших тіл (рисунок 4.1).

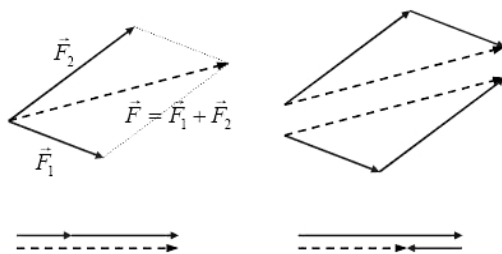


Рисунок 4.1 – Результируюча сила \vec{F} [5]

Якщо на тіло діє N сил, то їхня сумарна дія еквівалентна дії однієї рівнодіючої сили

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Для того, щоб тіло змінило свою швидкість необхідно, щоб на нього вплинули інші тіла. Унаслідок такої взаємодії тіла змінюють свою швидкість, тобто набувають прискорення. Про тіло, прискорення якого менше (тобто воно менше змінює свою швидкість), кажуть, що воно інертніше.

Інертність – це властивість тіл зберігати стан руху за відсутності на нього впливу інших тіл (чи за компенсації цих впливів).

4.2 Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку

Закони Ньютона виконуються в інерційних *системах відліку*. Система відліку, в якій будь-яка матеріальна точка зберігає стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, називається *інерціальною*. Така система відліку не має прискорення. Інерціальних систем відліку існує безліч. Їхні властивості визначає принцип відносності Галілея: *існує безліч інерціальних систем відліку, всі вони рівноправні*.

Усі закони механіки в усіх інерціальних системах відліку мають однаковий вигляд. Жодними механічними дослідженнями всередині інерціальної системи відліку не можна визначити, покоїться вона чи рухається прямолінійно та рівномірно.

Існування таких систем постулює **перший закон Ньютона**: *якщо на тіло не діють сили або сума цих сил дорівнює нулю, то тіло перебуває в стані спокою або рухається з постійною швидкістю*

$$\vec{a} = 0, \quad \vec{F}_{\text{рез}} = 0.$$

Основним законом динаміки поступального руху є другий закон Ньютона.

Другий закон Ньютона в імпульсній формі: *швидкість зміни імпульсу тіла в часі дорівнює результуючій всіх сил, що діють на тіло*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

За визначенням імпульс тіла $\vec{p} = m\vec{v}$, тоді формулу для сили можна переписати у вигляді

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

якщо $\frac{dm}{dt} \neq 0$, це рівняння буде описувати рух тіла зі змінною масою, якщо маса тіла залишається сталою ($m = \text{const}$), тобто $\frac{dm}{dt} = 0$, тоді

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

це рівняння називається *динамічним рівнянням руху* точки з постійною масою, або аналітичним записом другого закону Ньютона.

У найпростішій формі **другий закон Ньютона** прийнято формулювати так: *результуюча всіх сил, що діють на тіло, дорівнює добутку маси тіла на його прискорення.*

Якщо сила не змінюється ($\vec{F} = \text{const}$), то

$$\vec{F} dt = d\vec{p},$$

проінтегруємо це рівняння, отримуємо

$$\vec{F} \int_{t_1}^{t_2} dt = d\vec{p}$$

або

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p}.$$

Величина, що дорівнює добутку сили на час дії сили, називається *імпульсом сили* ($\vec{F} \Delta t$).

Одиниця виміру імпульсу сили в SI: $[\vec{F} \Delta t] = \text{Н} \cdot \text{с}$.

Третій закон Ньютона: *тіла діють один на одне з силами, які направлені вздовж однієї прямої, рівні за модулем та протилежні за напрямком*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Зазначимо, що ці сили діють вздовж прямої, яка проходить через центр мас тіл (рисунок 4.2).

Це означає, що при взаємодії тіл сили завжди виникають парами і є силами однієї природи. Закони Ньютона виконуються тільки в інерціальних системах відліку.

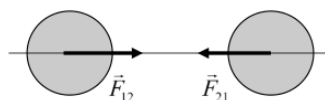


Рисунок 4.2 – Третій закон Ньютона [2]

4.3 Види взаємодій. Гравітаційна взаємодія

У класичній механіці розглядаються два види взаємодій: гравітаційна та електромагнітна, які представлені дією різних сил. У природі існують чотири типи сил. До них відносяться гравітаційні сили (сила всесвітнього тяжіння, сила тяжіння) і дві електромагнітні сили – сила пружності та сила тертя.

Сила всесвітнього тяжіння (гравітаційна сила) є проявом гравітаційної взаємодії. Закон всесвітнього тяжіння було відкрито Ньютоном у 1667 р. щодо руху Місяця навколо Землі.

Сила гравітаційної взаємодії – сила, що діє між двома матеріальними тілами та обумовлена гравітаційною взаємодією між тілами

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл;

r – відстань між матеріальними точками або тілами;

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{кг^2}$ – гравітаційна стала.

Закон всесвітнього тяжіння: дві матеріальні точки масами m_1 і m_2 притягуються одна до однієї силою, що прямо пропорційна добутку мас цих точок і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Гравітаційна сила спрямована вздовж прямої, яка проходить через центри мас двох матеріальних точок (рисунок 4.3).

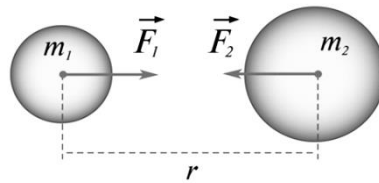


Рисунок 4.3 – Закон всесвітнього тяжіння [2]

Застосовуючи закон всесвітнього тяжіння до випадку взаємодії Землі з тілом масою m , розташованим поблизу земної поверхні на висоті h , отримаємо

$$F = G \frac{M_3 m}{(R_3 + h)^2},$$

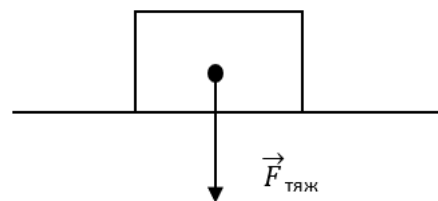
де M_3 – маса Землі, R_3 – радіус Землі.

Формулу можна переписати у випадку, якщо тіло знаходиться на поверхні Землі ($h = 0$)

$$F = G \frac{M_3 m}{R_3^2} = mg,$$

де $g = G \frac{M_3}{R_3^2}$ – прискорення вільного падіння.

Сила тяжіння – це сила, з якою тіла притягуються до Землі біля поверхні (рисунок 4.4).



$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g},$$

Рисунок 4.4 – Сила тяжіння

де $g = 9,8 \frac{m}{c^2}$ – прискорення вільного падіння.

Вектор прискорення вільного падіння \vec{g} можна вважати направленим до центру Землі.

Вагою тіла називають силу, з якою тіло діє на опору або підвіс (рисунок 4.5). Вага виникає внаслідок дії сили тяжіння, але за фізичною природою вона є силою пружності.

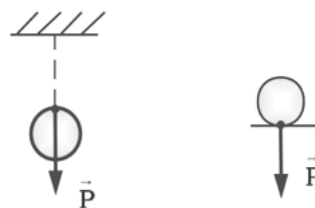


Рисунок 4.5 – Вага тіла [8]

Вагу тіла необхідно відрізнати від сили тяжіння. Ці сили відрізняються своєю природою і діями на різні тіла. Сила тяжіння діє на само тіло, а вага прикладена до опору або підвісу.

Сила реакції опори – сила, з якою опора або підвіс діють на тіло, позначається \vec{N} . Сила реакції опори та вага тіла (рисунок 4.6) за третім законом Ньютона однакові за модулем, але протилежні за напрямком

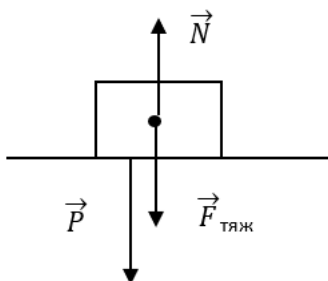


Рисунок 4.6 – Сила реакції опори та вага тіла

$$\vec{N} = -\vec{P}.$$

У випадку, зображеному на рисунку 4.6, тіло знаходиться у спокої відносно Землі, за першим законом Ньютона, рівнодійна сил, що діють на тіло, дорівнює нулю

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{тяж}} = 0,$$

тоді

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{тяж}}.$$

У випадку, коли опора рухається з прискоренням, вага тіла перестає дорівнювати силі тяжіння (рисунок 4.7). З другого закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$, отримуємо

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

Якщо $\vec{g} = \vec{a}$, то $\vec{P} = 0$, тобто настає стан невагомості.

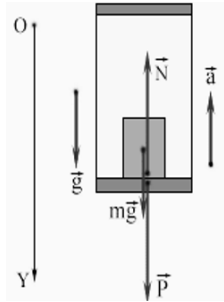


Рисунок 4.7 – Рух опори з прискоренням [4]

У стані невагомості відсутня вага тіла, тіло рухається тільки під дією сили тяжіння. Наприклад, у стані невагомості знаходиться екіпаж на борту космічного апарата; літак, що рухається балістичною траєкторією, яка в деяких випадках є параболою. Стан невагомості можна відчувати у початковий момент вільного падіння тіла в атмосфері, коли опір повітря ще невеликий.

4.4 Електромагнітна взаємодія

Під дією зовнішніх сил, прикладених до тіла, виникає деформація тіла – зміна його розмірів і форми. Якщо після припинення дії сил відновлюються початкові розміри та форма тіла, то деформація називається *пружною*.

Сила пружності – це сила, що виникає при деформації тіла, тобто при зміні його форми або об'єму, обумовленій дією зовнішніх сил.

Виникнення сил пружності можна пояснити на прикладі деформації пружини (рисунок 4.8).

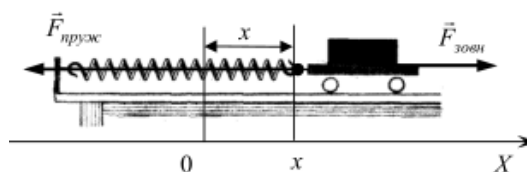


Рисунок 4.8 – Сила пружності [5]

При дії зовнішньої сили $F_{\text{зовн}}$ пружина починає видовжуватися на x . Це видовження пружини викликає появу пружних сил всередині неї.

Пружні сили, позначені як $F_{\text{пруж}}$, виникають у всій деформованій пружині та спрямовані протилежно до напрямку зовнішньої сили $F_{\text{зовн}}$. Основна ідея полягає в тому, що ці пружні сили протидіють зовнішній силі і намагаються повернути пружину до її початкового стану. Іншими словами, вони спрямовані так, щоб відновити рівновагу та знищити деформацію, яку викликала зовнішня сила.

Для пружних деформацій справедливий **закон Гука**: *сила пружності, що виникає при деформації стиснення або розтягування, пропорційна величині деформації*

$$F_{\text{пруж},x} = -kx,$$

де $F_{\text{пруж},x}$ – проекція сили пружності на вісь Ox ;

k – коефіцієнт жорсткості пружини;

x – абсолютна деформація (видовження або стискання).

Жорсткість пружини залежить від форми та розмірів тіла, а також від його матеріалу.

Сили тертя з'являються при переміщенні стискаючих тіл або їхніх частин одна відносно одної (рисунок 4.9)

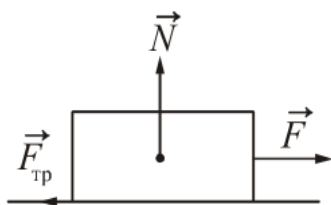


Рисунок 4.9 – Сила тертя

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu |\vec{N}|,$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання, він залежить від природи матеріалу та якості обробки поверхні;

N – сила нормального тиску.

Сили тертя спрямовані по дотичній до поверхонь, що труться, причому так, що вони протидіють відносному зміщенню цих поверхонь.

Тертя, що виникає при відносному переміщенні двох дотичних тіл, називається *зовнішнім*; тертя між частинами одного і того ж суцільного тіла називається *внутрішнім*.

На тіло, що рухається у в'язкому (рідкому або газоподібному) середовищі, діє сила, що гальмує його рух. Ця сила називається *силою в'язкого тертя*

$$F_{\text{тр}} = -rv,$$

де r – коефіцієнт опору, він залежить від розмірів та форми тіла, а також від властивості середовища, де рухається тіло;

v – швидкість руху тіла.

Знак « $-$ » у законі вказує на те, що сила тертя спрямована протилежно до швидкості.

Питання до лекції

- 1 Що вивчає динаміка?
- 2 Що таке сила? Одиниця вимірювання сили.
- 3 Що таке маса? Що означає виміряти масу?
- 4 Що таке імпульс тіла? Одиниця вимірювання імпульсу.
- 5 Сформулюйте перший закон Ньютона. Для яких систем справедливий перший закон Ньютона?
- 6 Сформулюйте та запишіть другий закон Ньютона. Сформулюйте та запишіть третій закон Ньютона.
- 7 Сформулюйте закон всесвітнього тяжіння. Чому дорівнює гравітаційна постійна, який її фізичний зміст?
- 8 Яка сила називається силою пружності? Яка природа цієї сили?
- 9 Яка сила називається силою тертя? Назвіть види сил тертя. Коли з'являється сила тертя спокою? Чому вона дорівнює?

Лекція 5

РОБОТА, ПОТУЖНІСТЬ, ЕНЕРГІЯ

План лекції

- 5.1 Робота постійної та змінної сили.
- 5.2 Графічне зображення роботи.
- 5.3 Потужність.
- 5.4 Кінетична енергія при поступальному русі. Теорема про кінетичну енергію.
- 5.5 Потенціальна енергія. Консервативні та неконсервативні сили.
- 5.6 Види потенціальної енергії.
- 5.7 Повна механічна енергія. Закон збереження повної механічної енергії.

5.1 Робота постійної та змінної сили

Робота – є кількісною характеристикою процесу обміну енергією між тілами, що взаємодіють. Зміна механічного руху тіла пов'язана з силами, які діють на тіло з боку інших тіл.

Механічною роботою сили \vec{F} на деякому переміщенні \vec{S} називається добуток модуля сили на переміщення точки її прикладення і на косинус кута α між напрямком сили і напрямком переміщення (рисунок 5.1)

$$A = F \cdot S \cos \alpha.$$

Праву частину формули можна записати у вигляді *скалярного добутку*

$$A = (\vec{F}, \vec{S}).$$

Одиниця вимірювання роботи у системі SI – Джоуль: $[A] = \text{Дж}$.

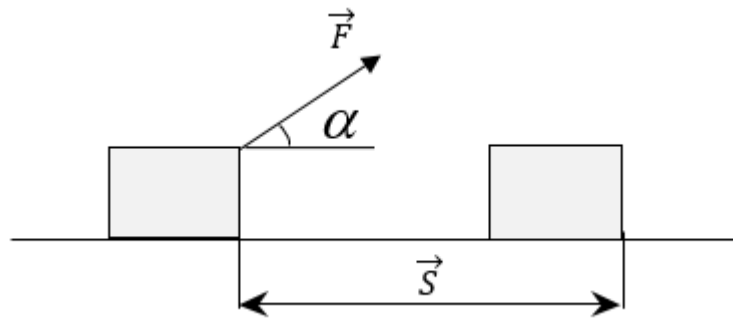
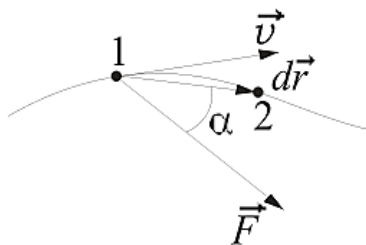


Рисунок 5.1 – Механічна робота [2]

Залежно від величини кута α механічна робота може бути додатною ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), від'ємною (при $\alpha > \frac{\pi}{2}$) та дорівнювати нулю ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Нехай матеріальна точка рухається по криволінійній траєкторії під дією сили \vec{F} і здійснює переміщення $d\vec{r}$.

Елементарною роботою називається фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку сили \vec{F} на елементарне переміщення $d\vec{r}$ (рисунок 5.2).



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

де α – кут між векторами \vec{F} та $d\vec{r}$.

У скалярному вигляді

$$dA = F \cdot dr \cdot \cos\alpha.$$

Рисунок 5.2 – Елементарна робота [8]

Робота при скінченному переміщенні виражається формулою

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r}.$$

Цей вираз називається криволінійним інтегралом вектора \vec{F} вздовж траєкторії 1-2.

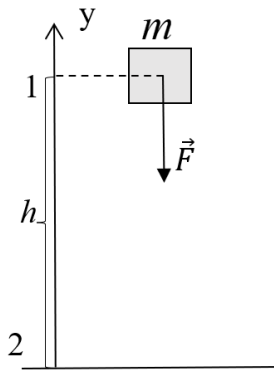


Рисунок 5.3 – Робота сили тяжіння

Приклад: Знайдемо роботу сили тяжіння при переміщенні тіла масою m з положення 1 у положення 2 (рисунок 5.3).

$$A_{1,2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} (-mg, dy) = mgh$$

Це означає, що робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла.

5.2 Графічне зображення роботи

Розглянемо випадок обчислення роботи при постійній силі ($\vec{F} = const$), тоді роботу можна знайти за формулою

$$A_{1,2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r} = F_r(r_2 - r_1),$$

де F_r – проекція сили \vec{F} на напрям \vec{r} .

Робота як інтеграл має геометричний смисл: *робота чисельно дорівнює площі фігури, утвореної графіком залежності F_r , віссю r та вертикальними прямими $r = r_1$ та $r = r_2$* (рисунок 5.4).

Елементарна робота чисельно дорівнює площі тонкої смужки dr (рисунок 5.5)

$$A = \int_{(r_1)}^{(r_2)} F_r dr.$$

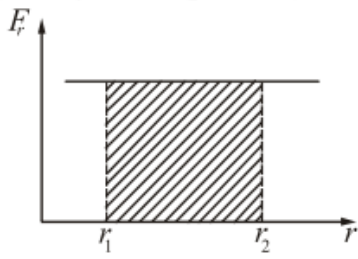


Рисунок 5.4 – Робота при постійній силі $\vec{F} = const$

Робота чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції.

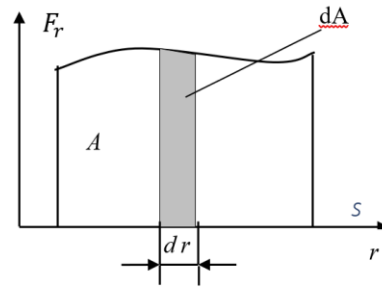


Рисунок 5.5 – Елементарна робота [2]

5.3 Потужність

Для характеристики інтенсивності здійснення роботи використовується фізична величина, що називається потужністю.

Потужність – скалярна величина, яка чисельно дорівнює роботі, що здійснюється за одиницю часу

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Миттєва потужність – фізична величина, що дорівнює скалярному добутку сили на швидкість дії

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}.$$

Одиниця вимірювання потужності у системі SI – Ватт: $[N] = \text{Вт}$.

5.4 Кінетична енергія при поступальному русі. Теорема про потенціальну енергію

Кінетична енергія – це енергія, яку має матеріальна точка внаслідок механічного руху і визначається роботою, яку необхідно виконати, щоб здійснити цей рух. Кінетична енергія тіла, що знаходиться в поступальному русі, визначається за формулою

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Покажемо, як пов'язані між собою робота і кінетична енергія. За другого закону Ньютона $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ формула для переміщення тіла $d\vec{r} = \vec{v} dt$, тоді робота

$$A_{1,2} = \int_1^2 \left(m \frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} dt \right) = m \int_1^2 (\vec{v}, d\vec{v}) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

де v_1 – початкова, а v_2 – кінцева швидкості точки.

Теорема зв'язку роботи і енергії: робота всіх сил на деякому переміщенні дорівнює збільшенню кінетичної енергії тіла на цьому переміщенні

$$A_{1,2} = E_{k2} - E_{k1},$$

де E_{k1} та E_{k2} – кінетична енергія тіла відповідно у початковій і кінцевій точках шляху.

Кінетична енергія системи є функцією стану її руху та залежить від вибору системи відліку. Отримані результати легко узагальнити для будь-якої системи матеріальних точок.

Кінетична енергія системи визначається як сума кінетичних енергій окремих матеріальних точок, що утворюють цю систему

$$E_{\text{к,системи}} = \sum_{i=1}^n E_{\text{к}i}.$$

Одиниця вимірювання кінетичної енергії в SI – Джоуль: $[E_{\text{к}}] = \text{Дж}$.

5.5 Потенціальна енергія. Консервативні та неконсервативні сили

Сили, робота яких не залежить від форми шляху між двома точками, а залежить тільки від їхнього взаємного розташування, називаються *консервативними*. Одна з основних властивостей консервативних сил полягає в тому, що їх можна пов'язати з потенціальною енергією.

Прикладами консервативних сил є гравітаційна сила, сила пружності та сила тяжіння. Усі ці сили відповідають принципу консервативності, оскільки їхня потенціальна енергія зберігається при зміні положення об'єкта в полі сили, і робота цих сил не залежить від конкретного шляху переміщення.

Потенціальна енергія – це механічна енергія системи тіл, що визначається взаємним розташуванням тіл і характером сил взаємодії між ними.

Якщо на частинку діє консервативна сила, то можна ввести поняття потенціальної енергії для такої системи. Визначимо функцію потенціальної енергії E_p , яка залежить від координат частинки в тривимірному просторі (x, y, z) . Для зручності враховуємо положення частинки в трьох вимірах

$$A_{1,2} = -(E_p(x_2, y_2, z_2) - E_p(x_1, y_1, z_1)).$$

Теорема про потенціальну енергію: робота консервативної сили на деякому переміщенні дорівнює зменшенню потенціальної енергії тіла на цьому переміщенні

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}.$$

Зв'язок між потенціальною енергією та силою задається формулою:

$$\vec{F} = -grad E_p.$$

Одиниця вимірювання потенціальної енергії в SI – Джоуль:
 $[E_p] = \text{Дж}.$

5.6 Види потенціальної енергії

- *Потенціальна енергія в однорідному силовому полі*

Поле називається *однорідним*, якщо сила, що діє на тіло однакова у всіх точках поля. Якщо тіло масою m знаходиться в однорідному полі сили тяжіння Землі, то потенціальна енергія в однорідному силовому полі буде дорівнювати

$$E_p = mgh,$$

де g – прискорення вільного падіння, h – висота тіла над поверхнею Землі.

- *Потенціальна енергія пружно деформованого тіла*

При деформації пружного тіла в ньому виникають внутрішні сили, що перешкоджають деформації. Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

$$E_p = \frac{k\Delta x^2}{2},$$

де k – коефіцієнт пружності, Δx – абсолютна деформація.

- *Потенціальна енергія гравітаційного поля, яке створене точковою масою*

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

де m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл;

r – відстань між матеріальними точками або тілами;

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна стала.

Сили, робота яких залежить від форми траєкторії, за якою рухалось тіло, називаються *неконсервативними*. До неконсервативних сил відносяться сили тертя. Робота сил тертя завжди негативна.

Властивості неконсервативних сил включають те, що їхня робота вздовж замкнутого контуру не дорівнює нулю, але визначає зміну механічної енергії системи. Також важливо враховувати, що робота неконсервативних сил зазвичай призводить до втрат енергії в системі.

5.7 Повна механічна енергія. Закон збереження повної механічної енергії

Сума кінетичної і потенціальної енергії тіла називається його **повною механічною енергією**

$$E = E_k + E_p.$$

Закон збереження повної механічної енергії: якщо на тіло діють тільки консервативні сили, то його повна механічна енергія залишається постійною: можуть відбуватися лише перетворення потенціальної енергії в кінетичну і назад, але повний запас енергії тіла не змінюється

$$E = E_k + E_p = \text{const.}$$

Замкнутою системою називається сукупність тіл, на які не діють зовнішні сили. Якщо між тілами такої системи діють тільки консервативні сили, то вона називається *консервативною*.

Повна механічна енергія замкнутої консервативної системи тіл зберігається в часі. Якщо ж у замкнутій системі, крім консервативних, діють також неконсервативні сили (дисипативні), наприклад сили тертя, то повна механічна енергія системи не зберігається. При переході тіла з положення 1 у положення 2 частина його потенційної енергії піде на здійснення роботи з подолання сили тертя

$$E_{p1} - E_{p2} = E_{k2} - E_{k1} + |A_{тр}|,$$

або

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} - |A_{тр}|,$$

тобто, повна механічна енергія тіла зменшується на величину цієї роботи, яка перетворюється в тепло

$$E_1 - E_2 = |A_{тр}|.$$

Це пояснюється тим, що сили тертя здійснюють завжди від'ємну роботу – механічна енергія перетворюється у внутрішню. Отже, наявність сил тертя в замкнутій системі приводить до зменшення її повної механічної енергії. Але в цьому випадку виконується **загальний закон збереження енергії**: в ізольованій від будь-яких зовнішніх впливів системі залишається постійною сума всіх видів енергії.

Питання до лекції

- 1 Як визначається механічна робота і які одиниці її вимірювання?
- 2 Що таке змінна робота в механіці та як вона відрізняється від постійної роботи?
- 3 Як можна використовувати поняття механічної роботи та законів збереження для вирішення реальних завдань у техніці та науці?

- 4 Яка система тіл називається замкнутою? Наведіть приклади.
- 5 Дайте визначення кінетичної енергії. Сформулюйте теорему про кінетичну енергію.
- 6 Які сили називаються консервативними? Наведіть приклади цих сил.
- 7 Дайте визначення потенційної енергії. Сформулюйте теорему щодо потенційної енергії.
- 8 Як визначається потенційна енергія, які фактори впливають на її величину?
- 9 Які види потенційної енергії вам відомі?
- 10 Сформулюйте закон збереження механічної енергії.

Лекція 6

ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ. ВИКОРИСТАННЯ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ ТА ЕНЕРГІЇ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЗІТКНЕНЬ ТІЛ

План лекції

- 6.1 Система тіл. Закон збереження імпульсу.
- 6.2 Абсолютно пружний удар (АПУ).
- 6.3 Випадки абсолютно пружних ударів.
- 6.4 Абсолютно непружний удар (АНУ).
- 6.5 Випадки абсолютно непружних ударів.

Поняття законів збереження є важливим і фундаментальним у сучасній фізиці, і вивчення цих законів дає змогу краще розуміти фізичні процеси та взаємодії у Всесвіті. Ці закони виникли в результаті досліджень різних галузей фізики і виявилися невід'ємною частиною опису природних явищ. Наприклад, закон збереження енергії виник у зв'язку з розглядом руху тіл та взаємодій між ними. Поступово подібні закони були виявлені в інших областях фізики, таких як закон збереження імпульсу, кількості руху, моменту імпульсу, електричного заряду тощо.

6.1 Система тіл. Закон збереження імпульсу

Механічна система тіл – сукупність матеріальних точок (тіл), що розглядаються в системі. На тіла системи можуть діяти *внутрішні сили* (з боку інших тіл, що входять до складу системи) та *зовнішні сили* (з боку тіл, які не входять до складу системи). Якщо на тіла системи не діють зовнішні сили, система називається *замкнутою*.

Імпульсом системи називається векторна сума імпульсів тіл, що входять до складу системи

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i.$$

Імпульс системи може змінюватися внаслідок дії зовнішніх сил.

Розглянемо систему, що складається з *трьох* частинок (рисунок 6.1).

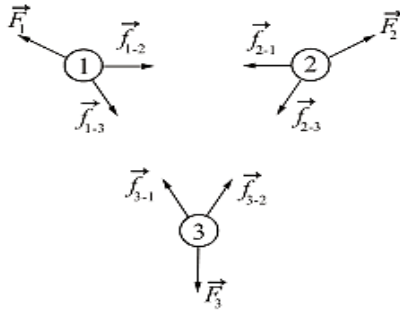


Рисунок 6.1 – Система з трьох частинок [5]

Введемо позначення, нехай $\vec{f}_{i,j}$ – сила, що діє на i – частинку з боку j – частинки, \vec{F}_i – рівнодійна зовнішніх сил, що діють на i – частинку, \vec{p}_i – імпульс i – частинки.

Знайдемо рівняння руху для всіх частинок, яке визначає зміну у часі повного імпульсу системи

$$\begin{aligned} d\vec{p}_1/dt &= \vec{f}_{1-2} + \vec{f}_{1-3} + \vec{F}_1, \\ d\vec{p}_2/dt &= \vec{f}_{2-1} + \vec{f}_{2-3} + \vec{F}_2, \\ d\vec{p}_3/dt &= \vec{f}_{3-1} + \vec{f}_{3-2} + \vec{F}_3. \end{aligned}$$

Сума всіх складових лівої частини рівняння дає похідну за часом від повного імпульсу системи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) &= (\vec{f}_{1-2} + \vec{f}_{2-1}) + (\vec{f}_{1-3} + \vec{f}_{3-1}) + \\ &+ (\vec{f}_{2-3} + \vec{f}_{3-2}) + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \end{aligned}$$

де $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$ – сума зовнішніх сил, сума внутрішніх сил, що діють на частинки буде дорівнювати нулю, тоді можемо записати

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

де \vec{p} – повний імпульс системи;

$\frac{d}{dt}$ – похідна за часом.

Швидкість зміни сумарного імпульсу системи тіл є результатом взаємодії з зовнішніми силами.

Припустимо що сума зовнішніх сил дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), звідки $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. З цієї умови маємо, що

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = const,$$

або для системи з N точок

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const.$$

Закон збереження імпульсу: імпульс замкнутої системи матеріальних точок (тіл) залишається незмінним.

Розглянемо окремі випадки:

1 Нехай на систему діють зовнішні сили ($\vec{F}_i \neq 0$), сума цих сил дорівнює нулю ($\sum_i^N \vec{F}_i = 0$). У цьому випадку можна стверджувати, що зміна імпульсу системи дорівнює нулю, тобто $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, це означає, що імпульс системи залишається постійним у часі.

2 Нехай на систему діють зовнішні сили ($\vec{F}_i \neq 0$), але дорівнює нулю сума проєкцій цих сил на будь-яку вісь Ox , тобто $\sum_i^N F_{ix} = 0$. З рівняння маємо що $\frac{dp_x}{dt} = 0$, $\sum_i^N p_{i,x} = const$. Отже, імпульс системи відносно осі Ox не змінюється з часом.

3 Нехай на систему діють сили ($\vec{F}_i \neq 0$), при цьому сума проєкцій цих сил не дорівнює нулю ($\sum_i^N \vec{F}_i \neq 0$). Тоді час дії сил дуже малий, тоді

$d\vec{p} \rightarrow 0$. У такому випадку $\vec{p} = const$, тобто імпульс системи залишається постійним.

Прикладом такого випадка може бути випадок взаємодії тіл під час удару чи вибуху, де взаємодія відбувається протягом дуже короткого проміжку часу.

6.2 Абсолютно пружний удар (АПУ)

Ударом називається зіткнення двох або більше тіл, коли взаємодія продовжується дуже короткий час. При ударі в тілах виникають такі значні внутрішні сили, що зовнішніми силами можна знехтувати. Це дає змогу розглядати ці тіла як замкнуту систему і застосовувати до неї закони збереження.

Удар називається **центральним**, якщо тіла до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їхні центри мас (рисунок 6.2).

Суть пружного удару полягає в тому, що кінетична енергія відносного руху контактуючих тіл на короткий час перетворюється в енергію пружної деформації, яка так само переходить знову в кінетичну енергію руху. Внаслідок чого має місце перерозподіл енергії між тілами, які взаємодіють.

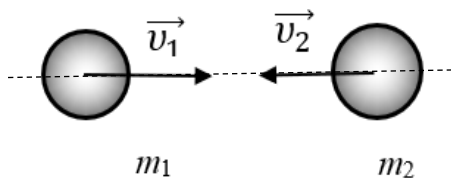


Рисунок 6.2 – Центральний удар

Абсолютно пружний удар – зіткнення двох тіл, під час якого зберігається не тільки геометрична сума імпульсів, а й сума кінетичних енергій взаємодіючих тіл, тобто виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії.

Розглянемо зіткнення двох тіл і визначимо швидкості тіл після пружного удару. Нехай перша куля наздоганяє другу (рисунок 6.3).

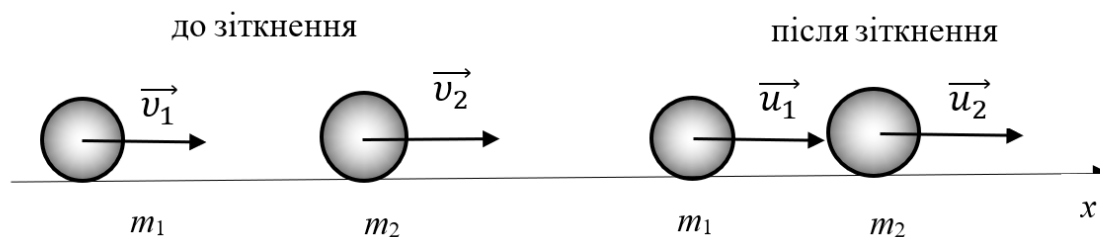


Рисунок 6.3 – Пружний удар. Рух куль в одному напрямку [2]

Позначимо швидкості куль масами m_1 і m_2 до удару через \vec{v}_1 і \vec{v}_2 , а після удару – через \vec{u}_1 і \vec{u}_2 .

Закон збереження імпульсу та енергії має вигляд

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2;$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

у скалярному вигляді

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}.$$

Скоротимо та перегрупуємо доданки

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \\ m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \\ m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2), \end{cases}$$

розділивши почленно рівності, отримаємо $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$, звідки

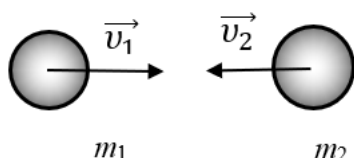
$$u_1 = u_2 + v_2 - v_1.$$

знайдемо швидкість другої та першої кулі після зіткнення

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}.$$

Коли кулі рухаються назустріч одна одній (рисунок 6.4), закон збереження імпульсу та енергії має вигляд



$$\begin{cases} m_1v_1 - m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \end{cases}$$

Рішенням системи є рівняння

$$u_1 = \frac{-2m_2v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1},$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 - v_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

Рисунок 6.4 – Пружний удар.

Кулі рухаються назустріч одна одній

6.3 Випадки абсолютно пружних ударів

Розглянемо деякі окремі випадки зіткнень.

1 Припустимо, що маси куль однакові $m_1 = m_2 = m$, у цьому випадку

$$u_1 = \frac{2m \cdot v_2}{m+m} = v_2;$$

$$u_2 = \frac{2m \cdot v_1}{m+m} = v_1,$$

тобто в процесі удару частинки обмінюються швидкостями.

Якщо друга куля до удару перебувала у спокої ($v_2 = 0$), то перша куля після удару зупиняється, а друга починає рухатися зі швидкістю, яку мала перша куля, в тому ж напрямку.

2 Кулі рухаються назустріч одна одній, тоді

$$u_1 = \frac{-2mv_2}{m+m} = -v_2;$$

$$u_2 = \frac{2mv_1}{m+m} = v_1,$$

після удару кулі рухаються в протилежні напрямки, перша куля зі швидкістю другої до удару, а друга зі швидкістю першої.

3 Кулі рухаються назустріч одна одній з однаковими швидкостями ($v_1 = v_2 = v$), тоді

$$u_1 = \frac{-2m_2v+v(m_1-m_2)}{m_2+m_1} = \frac{-3m_2v+vm_1}{m_2+m_1} = v \frac{m_1-3m_2}{m_2+m_1},$$

$$u_2 = \frac{2m_1v-v(m_2-m_1)}{m_2+m_1} = \frac{2m_1v-vm_2+vm_1}{m_2+m_1} = v \frac{3m_1-m_2}{m_2+m_1}.$$

4 Друга куля до зіткнення нерухома ($v_2 = 0$), тоді

$$u_1 = v_1 \frac{m_1-m_2}{m_2+m_1};$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_2+m_1},$$

якщо маса першої кулі більше другої, то вона продовжить рух у тому ж напрямі, якщо менше, то покотиться назад. Другий шар після зіткнення почне рухатися.

5 Перша куля стикається з нерухомою другою кулею нескінченної маси ($v_2 = 0, m_2 \rightarrow \infty$), тоді

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = v_1 \frac{m_1/m_2 - m_2/m_2}{m_2/m_2 + m_1/m_2} \rightarrow v_1 \frac{0-1}{1+0} = -v_1;$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1/m_2}{m_2/m_2 + m_1/m_2} \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0,$$

тобто перша куля відскакує назад з тією ж самою швидкістю.

6.4 Абсолютно непружний удар (АНУ)

Абсолютно непружний удар – це удар, після якого швидкості обох тіл, що зіштовхуються, є однаковими. При непружному зіткненні у початковий момент удару швидкість деформації велика (кулі стискаються), тому виникають значні сили, що надають обом кулям прискорення, яке спрямоване в протилежні напрямки. З іншого боку, у процесі удару швидкості деформації поступово зменшуються, а самі деформації зростають. Цей процес триває до того моменту, коли швидкості тіл стають однаковими. На цьому етапі деформації тіл припиняють змінюватися, сили вже не діють, і тіла продовжують свій рух із однакою швидкістю.

При абсолютно непружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та повної енергії. Механічна ж енергія тіл до удару більше ніж після удару, оскільки вона частково (або повністю) переходить у внутрішню енергію тіл і витрачається на роботу деформації тіл.

Розглянемо абсолютно непружне зіткнення двох кульок, що утворюють замкнену систему. Нехай дві кулі масами m_1 і m_2 мали до удару швидкості \vec{v}_1 і \vec{v}_2 , а після удару рухаються з загальною швидкістю \vec{u} (рисунок 6.5).

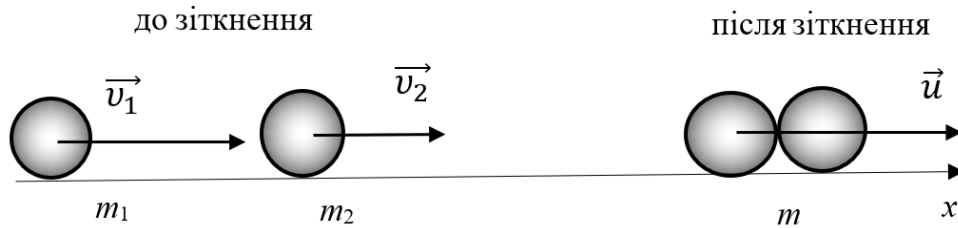


Рисунок 6.5 – Абсолютно непружне зіткнення куль. Рух куль в одному напрямку

Згідно з законом збереження сумарний імпульс куль до удару має бути таким же, як після удару

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$

швидкість системи куль після АНУ

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон збереження механічної енергії для непружного удару не виконується, проте ми можемо написати

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 + E_{\text{вт}},$$

де $E_{\text{вт}}$ – втрати механічної енергії в системі.

6.5 Випадки абсолютно непружних ударів

Розглянемо деякі окремі випадки:

1 Кулі рухаються в одному напрямку. Удар можливий, якщо швидкості \vec{v}_1 і \vec{v}_2 різні. Наприклад, $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$, тобто друга куля наздоганяє

першу. Після удару кулі будуть рухатися в ту ж сторону зі швидкістю більшою, ніж швидкість першої кулі і меншою, ніж швидкість другої

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

2 Кулі рухаються назустріч одна одній. Після удару кулі будуть рухатися разом в ту сторону, в яку рухалась куля, що має більший імпульс, тобто

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

якщо імпульси обох куль однакові за величиною, то після удару обидві кулі зупиняться.

Питання до лекції

- 1 Сформулюйте закон збереження імпульсу.
- 2 Що таке удар? Що називається лінією удару?
- 3 Який удар називається центральним?
- 4 Який удар називається абсолютно непружним? Які закони збереження виконуються за абсолютно непружного удару?
- 5 Запишіть закони збереження абсолютно непружного удару.
- 6 Запишіть формули знаходження швидкості системи тіл при непружному зіткненні.
- 7 Який удар називається абсолютно пружним? Які закони збереження виконуються за абсолютно пружного удару?
- 8 Запишіть закони збереження для абсолютно пружного удару.
- 9 Запишіть закон збереження імпульсу абсолютно непружного удару.
- 10 Як визначити втрату енергії внаслідок непружного зіткнення?

Лекція 7

ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

План лекції

- 7.1 Момент інерції матеріальної точки та твердого тіла.
- 7.2 Моменти інерції деяких геометричних тіл відносно осі обертання.
- 7.3 Теорема Штейнера.
- 7.4 Момент сили.
- 7.5 Основне рівняння динаміки обертального руху.
- 7.6 Момент імпульсу. Рівняння моментів.
- 7.7 Закон збереження моменту імпульсу.
- 7.8 Кінетична енергія твердого тіла при обертальному і поступальному русі.

Динаміка обертального руху є важливою галуззю механіки, що вивчає рух тіл навколо своєї осі під впливом зовнішніх сил. Однією з основних характеристик у динаміці обертального руху є момент сили. Момент сили, прикладений до тіла, спричиняє зміну кутової швидкості інерціальної маси тіла відносно його осі обертання. Закони збереження моменту інерції тіла відіграють важливу роль у визначенні його обертального руху. Для аналізу обертального руху використовуються різні математичні і фізичні параметри, такі як момент інерції I , кутова швидкість ω , кутове прискорення ε та інші. Залежно від форми тіла та прикладених сил обертальний рух може мати різні характеристики та властивості.

7.1 Момент інерції матеріальної точки та твердого тіла

Момент інерції – фізична величина, яка є мірою інертності тіла в обертальному русі. Від моменту інерції залежить швидкість зміни кутової

швидкості та кутового прискорення при дії на тіло (матеріальну точку) моменту сили.

Момент інерції матеріальної точки відносно нерухомої осі обертання OO' називається скалярна фізична величина, що дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані до осі обертання (рисунок 7.1)

$$I = mr^2,$$

де m – маса матеріальної точки; r – відстань від точки до осі обертання.

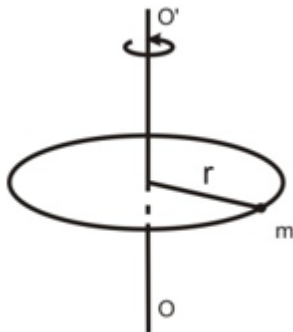


Рисунок 7.1 – Момент інерції матеріальної точки [8]

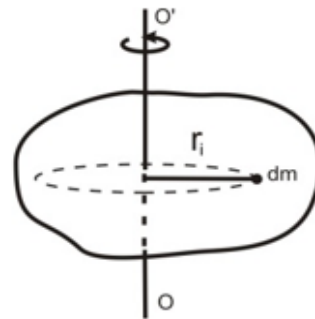


Рисунок 7.2 – Момент інерції твердого тіла з нерівномірним, безперервним розподілом dm [8]

Момент інерції системи матеріальних точок відносно осі обертання OO' дорівнює сумі мас матеріальних точок на квадрат відстані до осі обертання кожної з них

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

де m_i – маса i -ої матеріальної точки;

r_i – відстань i -ої матеріальної точки від точки до осі обертання.

Для знаходження **моменту інерції твердого тіла** з нерівномірним, безперервним розподілом мас dm , слід перейти від суми до інтегрування за об'ємом тіла V (рисунок 7.2)

$$I = \int r^2 dm,$$

де інтегрування відбувається по об'єму тіла.

Якщо тіло однорідне, то $dm = \rho dV$, тоді

$$I = \rho \int r^2 dV,$$

де ρ – густина тіла;

r – відстань від обертової осі до об'ємного елемента dV .

Одиниця вимірювання моменту інерції в SI: $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

7.2 Моменти інерції деяких геометричних тіл відносно осі обертання

В таблиці 7.1 наведені моменти інерції деяких геометричних тіл відносно осі обертання.

Таблиця 7.1

Тіло	Відносно осі	Момент інерції
Тонкий стрижень масою m та довжиною l	Перпендикулярної стрижню, що проходить крізь його середину	$I = \frac{ml^2}{12}$
Тонкий стрижень масою m та довжиною l	Перпендикулярної стрижню, що проходить крізь його кінець	$I = \frac{ml^2}{3}$
Тонка труба чи кільце радіусу r	Співпадає з віссю труби	$I = mr^2$
Круглий диск або циліндр маси m та радіусу r	Перпендикулярної площині диска, що проходить крізь його центр	$I = \frac{mr^2}{2}$
Куля маси m та радіусу r	Співпадає з діаметром	$I = \frac{2}{5}mr^2$

Більшість наведених у таблиці моментів інерції обчислені відносно осі, що проходить крізь центр мас вказаних тіл. Для обчислення моментів інерції тіл відносно осей, які не проходять через центр мас, використовується теорема Штейнера.

7.3 Теорема Штейнера

Теорема Штейнера: момент інерції тіла відносно осі, яка не проходить через центр мас, дорівнює сумі моменту інерції відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями (рисунок 7.3)

$$I = I_0 + md^2,$$

де I_0 – момент інерції цього тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла;

d – відстань між паралельними осями;

m – маса тіла.

Обчислимо момент інерції тонкого однорідного стрижня відносно осі, що проходить через кінець стрижня за допомогою теореми Штейнера (рисунок 7.4).

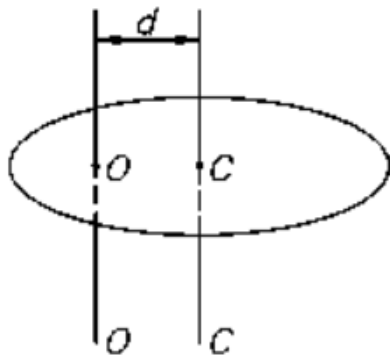


Рисунок 7.3 – Теорема Штейнера [8]

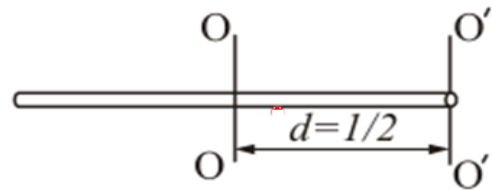


Рисунок 7.4 – Момент інерції тонкого однорідного стрижня [8]

Оскільки відстань до осі обертання $d = l/2$. З теореми Штейнера маємо

$$I = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

7.4 Момент сили відносно точки та відносно осі

Момент сили – величина, яка є мірою взаємодії тіл в обертальному русі. Слід розрізняти момент сили відносно точки і відносно осі.

Моментом сили \vec{F} відносно нерухомої точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r} , проведеного з точки O в точку прикладання сили, на силу \vec{F} (рисунок 7.5)

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}].$$

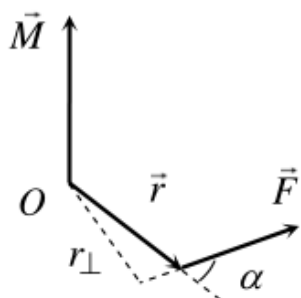


Рисунок 7.5 – Момент сили відносно нерухомої точки O [2]

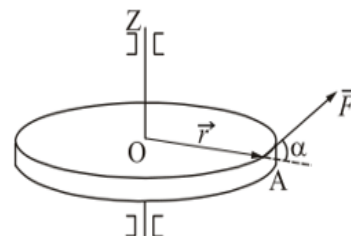


Рисунок 7.6 – Момент сили відносно нерухомої осі z [6]

Напрямок моменту сили визначають за правилом правого гвинта, а модуль моменту сили дорівнює

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot d,$$

де α – кут між вектором \vec{F} і радіус-вектором \vec{r} .

Плечем сили називається довжина перпендикуляра, опущеного з полюса O на лінію дії сили

$$d = r \cdot \sin \alpha.$$

Одиниця вимірювання моменту сили в SI – Ньютон на метр:
 $[M] = \text{Н} \cdot \text{м}.$

Момент сили відносно нерухомої осі z

Моментом сили відносно нерухомої осі z називається скалярна фізична величина M_z , що дорівнює добутку модуля сили, знайденого відносно довільної точки O даної осі z на плече сили (рисунок 7.6).

$$M_z = F \cdot d.$$

7.5 Основне рівняння динаміки обертального руху

Для отримання основного рівняння динаміки обертального руху візьмемо рівняння для моменту сили та підставимо силу з другого закону Ньютона $F_\tau = ma_\tau$, де $a_\tau = \varepsilon \cdot r$ – тангенціальне прискорення, ε – кутове прискорення, звідки

$$F_\tau = m\varepsilon \cdot r.$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння на r , отримуємо

$$F_\tau \cdot r = (m\varepsilon \cdot r)r.$$

Ураховуючи, що $F_\tau \cdot r = M$ – момент сили і $I = mr^2$ – момент інерції точки, отримуємо

$$M = I \cdot \varepsilon,$$

або у векторному вигляді

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\epsilon}.$$

Основне рівняння динаміки обертального руху: момент сили, що діє на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення.

7.6 Момент імпульсу. Рівняння моментів

Момент імпульсу є кількісною характеристикою обертального руху. Моментом імпульсу \vec{L} матеріальної точки відносно точки O називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r} точки на вектор її імпульсу \vec{p} (рисунок 7.7)

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$

Одиниця вимірювання моменту імпульсу в SI: $[L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$.

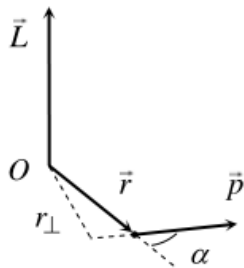


Рисунок 7.7 – Момент імпульсу [2]

Напрямок вектора моменту імпульсу \vec{L} визначається правилом правого гвинта.

Модуль моменту імпульсу дорівнює $L = r \cdot p \cdot \sin \alpha$.

З'ясуємо, яка величина відповідає за зміну моменту імпульсу. Для цього знайдемо похідну за часом

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right],$$

зауважимо, що $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$; $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$; тоді $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] = 0$, оскільки \vec{v} паралельно \vec{p} , тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Формулу можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

це співвідношення називається **рівнянням моментів**: похідна за часом моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центру дорівнює моменту активної сили відносно того ж центра.

Якщо матеріальна точка рухається по колу радіуса r , момент імпульсу дорівнює $L = mvr$, кутова швидкість $\omega = \frac{v}{r}$, тоді можна записати формулу для моменту імпульсу у вигляді

$$L = mr^2\omega.$$

7.7 Закон збереження моменту імпульсу

За аналогією з динамікою поступального руху можна показати, що рівняння моментів можна узагальнити на випадок системи N частинок (матеріальних точок). Якщо на кожен з матеріальних точок системи діють *зовнішні* і *внутрішні* сили, то момент зовнішніх сил, прикладених до кожної з матеріальних точок системи, дорівнює

$$\vec{M}_{\text{зовн}} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{зовн}},$$

де $\vec{M}_{\text{зовн}}$ – результуючий або головний момент зовнішніх сил.

Під *зовнішніми силами* слід розуміти сили, що діють на матеріальні точки системи ззовні, а під *внутрішніми* – сили, з якими кожна матеріальна точка системи діє на всі інші її точки. Тоді рівняння моментів для системи матеріальних точок у векторній формі буде мати вигляд

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}}.$$

Якщо ми маємо замкнуту систему, то момент зовнішніх сил буде дорівнювати нулю $\vec{M}_{\text{зовн}} = 0$, тоді з рівняння моментів отримуємо, що

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

звідки випливає, що

$$\vec{L} = \text{const}, \quad I \cdot \vec{\omega} = \text{const}.$$

Закон збереження моменту імпульсу: якщо результуючий момент зовнішніх сил, що діють на систему матеріальних точок, дорівнює нулю, то момент імпульсу системи залишається постійним у часі.

7.8 Кінетична енергія твердого тіла при обертальному русі

Розглянемо матеріальну точку масою m , яка обертається по колу радіусом r під дією сили F , яка завжди спрямована по дотичній до цього кола ($\cos \alpha = 1$).

Робота, яка виконується при обертанні, може бути виражена відстанню, яку проходить точка по колу при повороті на певний кут φ .

Отже, робота визначається як

$$A = F \cdot S = \Delta E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Перейдемо від лінійних величин S до кутових величин φ . З використанням виразу $S = r\varphi$, $v = \omega r$ формулу можна переписати

$$A = F \cdot r\varphi = \frac{m(\omega r)^2}{2}.$$

Нагадаємо, що добуток сили на плече називається моментом сили $M = rF$, добуток маси матеріальної точки на квадрат радіусу кола, по якому здійснюється обертання, називається моментом інерції матеріальної точки $I = mr^2$, тоді формула приймає вигляд

$$A = M \cdot \varphi.$$

Розглянемо рух тіла, що котиться, тоді цей рух можна уявити як сукупність поступального руху і обертального руху відносно осі z (рисунок 7.8).

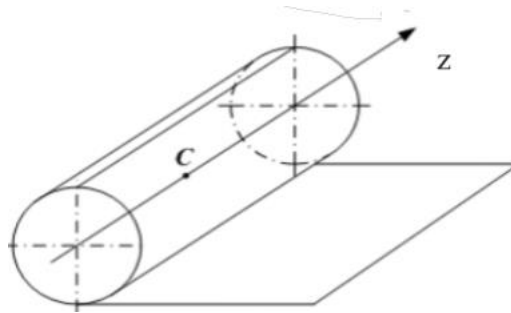


Рисунок 7.8 – Теорема Кеніга

Якщо центр мас тіла рухається зі швидкістю v , а обертання відносно осі z відбувається з кутовою швидкістю ω , то кінетичну енергію тіла можна подати у вигляді

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

де $E_{k(\text{оберт})} = \frac{I\omega^2}{2}$ – кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Теорема Кеніга: кінетична енергія рухомого тіла дорівнює сумі кінетичної його енергії поступального руху і енергії обертання навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до напрямку його руху.

Питання до лекції

- 1 У чому полягає фізичний зміст моменту інерції?
- 2 Запишіть формули для моментів інерції: а) матеріальної точки; б) системи матеріальних точок; в) твердого тіла.
- 3 Чому дорівнює момент інерції циліндра, кулі?
- 4 Сформулюйте теорему Штейнера. В яких випадках вона використовується?
- 5 Дайте визначення моменту сили: відносно нерухомої точки O та відносно осі обертання. Зробіть відповідні малюнки.
- 6 Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху.
- 7 Дайте визначення моменту імпульсу: відносно нерухомої точки O та відносно осі обертання. Зробіть відповідні малюнки.
- 8 Сформулюйте та запишіть формулу закону збереження моменту імпульсу.
- 9 Запишіть формули для кінетичної енергії твердого тіла при обертальному і поступальному русі.
- 10 Сформулюйте теорему Кеніга.

Лекція 8

ЕЛЕМЕНТИ ГІДРО- ТА АЕРО-МЕХАНІКИ. МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РЕЧОВИН І ГАЗІВ

План лекції

- 8.1 Тиск у рідині.
- 8.2 Закон Паскаля. Гідравлічний прес.
- 8.3 Тиск на дно і стінки посудини. Сила Архімеда.
- 8.4 Сполучені посудини.
- 8.5 Тиск атмосфери. Дослід Торрічеллі.

8.1 Тиск у рідині

Помістимо в рідину тонку пластинку. На обидві поверхні з боку рідини будуть діяти сили, спрямовані перпендикулярно до пластинки. (Ці сили існують і без платівки). Нехай на площадку площею S перпендикулярно до неї діє рівномірно розподілена сила F . Тоді тиск P на неї дорівнює:

$$P = \frac{F}{S}. \quad (8.1)$$

Тиск – фізична величина, яка чисельно дорівнює силі F , що діє на одиницю площі поверхні S перпендикулярно до неї.

Одиниця вимірювання тиску в SI –Паскаль (Па): $[P] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

8.2 Закон Паскаля. Гідравлічний прес

Закон Паскаля: тиск, який здійснюється на рідину або газ, передається ними однаково в усіх напрямках.

На законі Паскаля ґрунтується дія **гідравлічного пресу**. Він складається з двох посудин, що сполучаються, заповнені рідиною та закриті поршнями S_1 і S_2 . Якщо на малий поршень діє сила F , то в рідині виникає тиск P (рисунок 8.1).

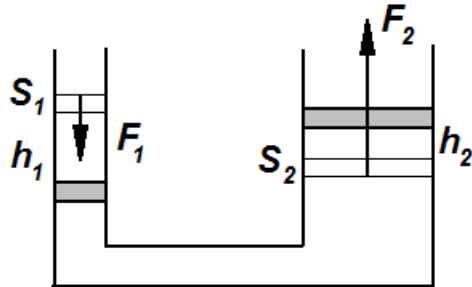


Рисунок 8.1 – Гідравлічний прес

Цей тиск передається рідиною по всіх напрямках однаково. Отже, на поршень S_2 буде діяти сила тиску $F_2 = pS_2$.

Є очевидним, що

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (8.2)$$

тобто при роботі гідравлічного пресу виникає вигреш за силою. Відношення сил дорівнює відношенню площини поршнів.

При опусканні поршня S_1 на глибину h_1 об'єм рідини, що витискається, підніме поршень S_2 на висоту h_2

$$S_1 h_1 = S_2 h_2.$$

Отже,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{F_2}{F_1},$$

тобто

$$F_1 h_1 = F_2 h_2.$$

Отже, робота, здійснена при опусканні малого поршня, дорівнює роботі, яку може виконати гідравлічний прес.

8.3 Тиск рідини на дно і стінки посудини. Сила Архімеда

Виділимо в стисливій рідині, що знаходиться в гравітаційному полі, вузький горизонтально розташований циліндр (рисунок 8.2).

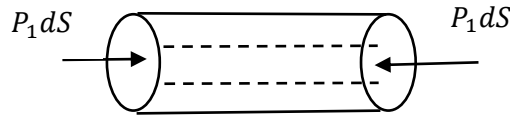


Рисунок 8.2 – Тиск рідини на дно і стінки посудини у випадку горизонтального розташування

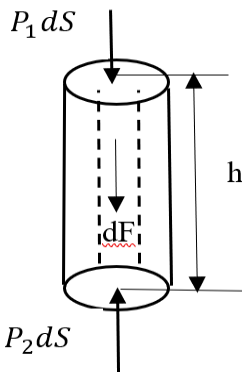
Розглянемо, з якою силою рідинна діє на основу циліндра

$$dF_1 = p_1 dS;$$

$$dF_2 = p_2 dS.$$

Оскільки рідина нерухома, то

$$dF_1 = dF_2$$



тому

$$p_1 = p_2,$$

тобто тиск у всіх точках цього рівня однаковий. Тому вільна поверхня рідини, що покоїться, завжди горизонтальна далеко від стінок посудини.

Рисунок 8.3 – Тиск рідини на дно і стінки посудини у випадку вертикального розташування циліндру

У випадку вертикального циліндра (рисунок 8.3) на його основі уздовж вертикальної осі, крім сил тиску, буде діяти сила тяжіння dF , яка створюється

стовпчиком рідини перерізом S та висотою h

$$F = mg,$$

де m – маса рідини:

$$m = \rho V = \rho Sh.$$

Тоді сила тяжіння

$$dF = gdm = \rho g dSh.$$

З умови рівноваги

$$dF + p_1 dS = p_2 dS;$$

$$\rho gh dS + p_1 dS = p_2 dS.$$

Розділимо на dS обидві частини

$$\rho gh + p_1 = p_2;$$

$$\rho gh = p_2 - p_1. \quad (8.4)$$

Отже, тиск, що створюється стовпом рідини (газу) – *гідростатичний тиск*. З цієї формули видно, що тиск на нижні шари рідини більший, ніж на верхні шари. Гідростатичний тиск на стінки посудини зростає зі збільшенням глибини, оскільки різні точки бокової поверхні знаходяться на різній глибині.

У силу цього, на тіло, занурене в рідину, діятиме відштовхувальна сила, яка і визначається законом Архімеда.

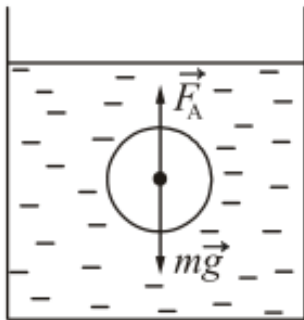


Рисунок 8.4 – Сили, що діють на тіло, занурене в рідину [4]

Значення сили залежить від густини рідини та об'єму тієї частини тіла, яка знаходиться безпосередньо в рідині.

Закон Архімеда: на тіло, занурене в рідину або газ, діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі рідини або газу в об'ємі тіла (рисунок 8.4).

Для того щоб розрахувати силу Архімеда, необхідно перемножити густину рідини, об'єм частини тіла, яка занурена в рідину, і сталу величину g .

$$F_a = \rho_{\text{ж}} g V,$$

де $\rho_{\text{ж}}$ – густина рідини;

V – об'єм зануреної частини тіла.

8.4 Сполучені посудини

Посудини, які мають спільну частину, називаються сполученими.

Однорідна рідина у сполучених посудинах встановлюється на однаковому рівні. Якщо ж у сполучені посудини налити рідину з різною густиною, то рівні будуть різними. При цьому нижче рівня розділу рідини буде знаходитися однорідна рідина (рисунок 8.5).

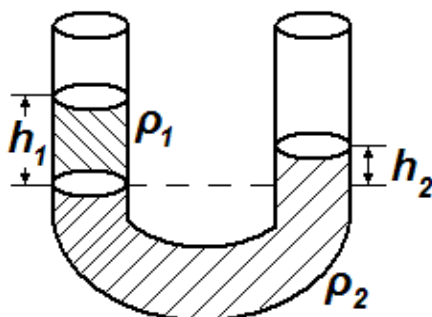


Рисунок 8.5 – Сполучені посудини

Отже, гідростатичний тиск на цьому рівні в обох посудинах має бути однаковим

$$p_1 = p_2;$$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2;$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

У сполучених посудинах висоти стовпів рідин над рівнем границі розділу є обернено пропорційними густинам рідин.

8.5 Тиск атмосфери. Дослід Торрічеллі

Атмосферою називається шар повітря, що оточує Землю. Верхня границя атмосфери знаходиться на висоті близько 10000 км над рівнем Землі. Тиск атмосфери був виміряний у 1643 р. італійським вченим Торрічеллі.

Дослід Торрічеллі. Запаяну з одного боку скляну трубку заповнюють ртуттю. Потім її опускають відкритим кінцем у посудину з ртуттю. Частина ртуті буде вилита, а висота стовпчика ртуті, що залишилась у трубці, знижується до рівня 760 мм над рівнем ртуті у посудині (рисунок 8.6).

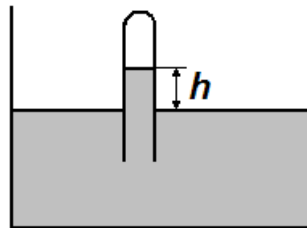


Рисунок 8.6 – Схема досліду Торрічеллі

Оскільки тиск стовпчика ртуті висотою h врівноважується атмосферним тиском

$$p_{\text{атм}} = \rho_{\text{Hg}} g h,$$

то тиск стовпчика ртуті дорівнює атмосферному. Отже, дослід показує, що **нормальний атмосферний тиск**: $p = 760$ мм рт. ст. Слід урахувати, що 1мм рт. ст.=133,3 Па.

Висота стовпчика ртуті в трубці залежить від зовнішнього атмосферного тиску прямо пропорційно, тому прилад Торрічеллі можна використовувати для спостереження за зміною погодних умов. Нині існують різні прилади вимірювання атмосферного тиску: ртутний барометр, барометр – aneroid.

Також тиск повітря знижується зі збільшенням висоти: у нижніх шарах атмосфери тиск є більшим, ніж у високих. Прилад, що дає змогу вимірювати висоту над рівнем моря залежно від тиску, називається **альтиметром**.

Питання до лекції

- 1 Дайте визначення тиску та запишіть відповідну формулу.
- 2 Запишіть формулу для тиску в рідині.
- 3 Сформулюйте закон Паскаля.
- 4 Пояснить механізм дії гідравлічного пресу.
- 5 Сформулюйте закон Архімеда. Зробіть пояснювальний рисунок.
- 6 Які посудини вважають сполученими? Як співвідносяться висоти та густини рідин у сполучених посудинах?
- 7 Який тиск атмосфери вважається нормальним?
- 8 Опишіть дослід Торрічеллі.

Лекція 9

МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ. РІВНЯННЯ СТАНУ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ. ІЗОПРОЦЕСИ

План лекції

9.1 Молекулярна фізика та термодинаміка. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії.

9.2 Термодинамічні параметри. Температура.

9.3 Ідеальний газ. Ізопроееси в ідеальному газі.

9.4 Рівняння стану ідеального газу.

9.1 Молекулярна фізика та термодинаміка. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії

Молекулярна фізика – це розділ фізики, що вивчає будову та властивості речовини.

Молекулярно-кінетична теорія – ставить собі за мету витлумачити ті властивості тіл, які безпосередньо спостерігаються на досвіді (тиск, температуру тощо) як сумарний результат дії молекул.

Основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ):

- будь-яке тіло – тверде, рідке чи газоподібне складається з великої кількості малих відокремлених частинок – молекул (молекули складаються з атомів, які можна вважати одноатомними молекулами).

-молекули будь-якої речовини знаходяться в безперервному хаотичному русі;

-ці частинки взаємодіють із силами тяжіння та відштовхування.

У МКТ також використовуються поняття:

1 Кількість речовини (ν) – відношення числа молекул у даній речовини до числа атомів у 0,012 кг вуглецю.

Одиниця вимірювання кількості речовини в SI: $[\nu] = \text{моль}$.

2 Молярна маса (M) – маса одного моля речовини. Справедливим є співвідношення

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A},$$

де m – маса молекул у речовині;

N – кількість молекул у речовині;

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

Одиниця вимірювання молярної маси в SI: $[M] = \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Число Авогадро вказує, скільки атомів або молекул міститься в одному молі речовини.

Молекулярна фізика – розділ фізики, в якому вивчають будову та властивості речовини, виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень.

Процеси, вивчені молекулярною фізикою, є результатом сукупного впливу великої кількості молекул.

Термодинаміка – також займається вивченням різних властивостей тіл та змін стану речовини. Однак на відміну від МКТ, термодинаміка вивчає *макроскопічні властивості* тіл та явищ природи, не цікавлячись їхньою мікроскопічною картиною. Не вводячи в розгляд молекули, термодинаміка дає змогу робити низку висновків щодо перебігу різних процесів і явищ. В основі термодинаміки лежить кілька *фундаментальних законів*, званих *початками термодинаміки*, які є узагальненням величезної кількості досвідчених фактів. Підходячи до розгляду змін стану речовини з різних точок зору, термодинаміка та МКТ взаємно доповнюють одна одну, утворюючи по суті одне ціле.

Отже, молекулярна фізика і термодинаміка – це розділи фізики, в яких вивчаються макроскопічні процеси в тілах, пов'язані з величезним числом атомів і молекул, що містяться в них. Вони взаємно доповнюють одна одну, утворюючи єдине ціле.

9.2 Термодинамічні параметри. Температура

Термодинамічна система – це сукупність макроскопічних тіл, які взаємодіють та обмінюються енергією, як між собою, так і зовнішнім середовищем (іншими тілами). Це може бути будь-яке тверде тіло, рідина або газ. Стан т-д системи визначається термодинамічними параметрами (параметрами стану). **Термодинамічні параметри** – сукупність фізичних величин, що характеризують властивості термодинамічної системи: **температура T , тиск P та об'єм V** . Функціональна залежність між параметрами стану (P, V, T) називається **рівнянням стану**.

Температура – це фізична величина, що характеризує стан термодинамічної рівноваги макроскопічної системи. Температура різних частин тіла однакова, якщо тіло перебуває у стані термодинамічної рівноваги.

Нині застосовують дві температурні шкали:

- абсолютну термодинамічну, проградуйовану у градусах Кельвіна;
- міжнародну практичну, проградуйовану у градусах Цельсія.

Шкала Цельсія – визначається двома реперними точками: 0°C и 100°C – температури замерзання та кипіння води при тиску $1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Шкала Кельвіна – у якості реперної точки, взята *потрійна точка води* (температура, при якій лід, вода і насичена пара при тиску (609 Па) знаходяться в термодинамічній рівновазі). Температура цієї точки $273,16 \text{ К}$.

Температура $T = 0 \text{ К}$ називається *нулем Кельвіна*. Слід пам'ятати, що температура $T = 0 \text{ К}$ – недосяжна. Температура замерзання води дорівнює $273,15 \text{ К}$ при $P = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Зв'язок між абсолютною термодинамічною та температурою за Міжнародною практичною шкалою

$$T, \text{К} = t, ^\circ\text{C} + 273,15.$$

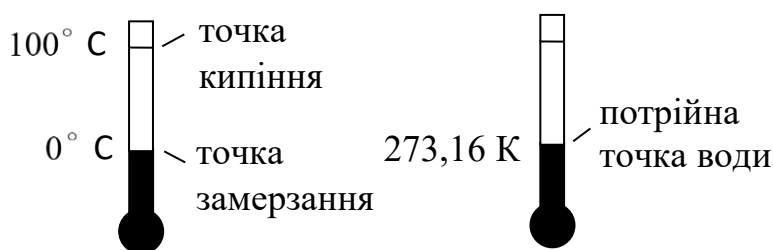


Рисунок 9.1 – Температурні шкали

Чим вища температура, тим більша швидкість руху молекул. Тому температура – міра середньої кінетичної енергії поступального руху молекул. У цьому полягає *термодинамічне тлумачення температури*. Середня кінетична енергія поступального руху одноатомної молекули ідеального газу прямо пропорційна до його абсолютної температури (і не залежить від її маси)

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT,$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – стала Больцмана, відноситься до класу універсальних сталих.

9.3 Ідеальний газ. Ізопроееси в ідеальному газі

Найпростішою термодинамічною системою є ідеальний газ.

Ідеальний газ – це газ, у якому:

- молекули не взаємодіють;
- розміри молекул нехтовно малі;
- при зіткненні молекули поводяться як абсолютно пружні тіла.

Ця модель може бути використана щодо реальних газів, наприклад H_2 , N_2 , O_2 . Оскільки вони знаходяться в умовах, близьких до нормальних (н.у.): $\begin{cases} T = 273K; \\ P = 1,013 \cdot 10^5 \text{Па}, \end{cases}$ а також, при низьких тисках (~ 200 атм) та високих температурах (не нижче $100^\circ C$), то вони є близькими за своїми властивостями до ідеальних газів.

Основні закони ідеального газу характеризують *ізопроееси* у ньому.

Ізопроеесом називається процес переходу термодинамічної системи з одного стану в інший, при якому для даної маси газу один з параметрів стану системи залишається постійним.

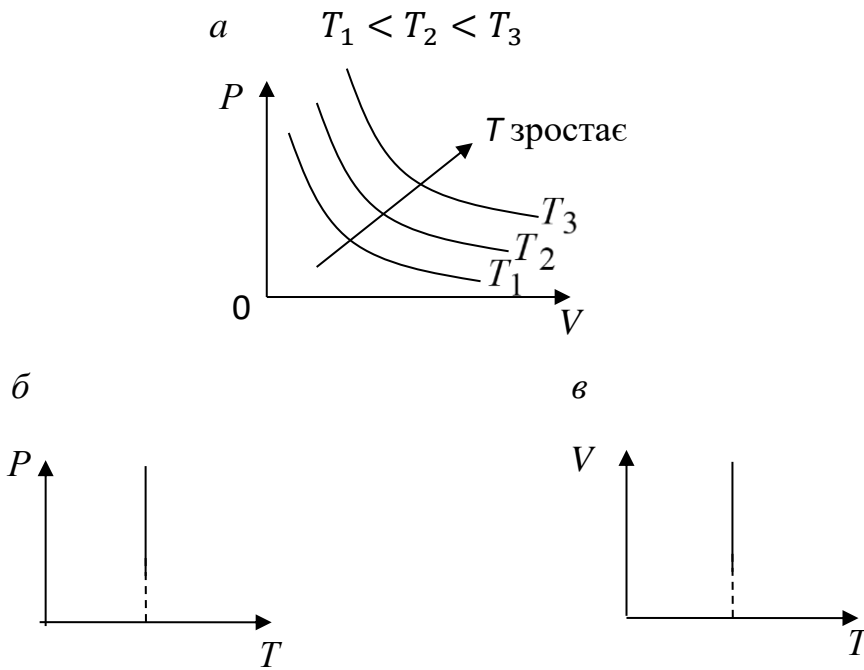
Розглянемо *закони ідеального газу*, які були отримані дослідним шляхом.

Закон Бойля-Маріотта описує **ізотермічний** процес ($T = \text{const}$): для даної маси газу при постійній температурі добуток тиску газу на його об'єм є величина постійна: $P \cdot V = \text{const}$, тобто

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Графік цього процесу – *ізотерма*.

Ізотерми – це гіперболи, розташовані тим вище, чим вища температура, при якій відбувається процес (рисунок 9.2).



a – координати (P,V), б – (P,T), в – (V,T)

Рисунок 9.2 – Ізотерми в координатах

Закон Гей-Люсака визначає ізобарний процес ($P = const$): для даної маси газу при постійному тиску, **об'єм** газу змінюється лінійно з температурою (рисунок 9.3)

$$V = V_0(1 + \alpha_V t), \text{ при } P = const, m = const,$$

де t – температура за Цельсієм;

V_0 – об'єм при 0°C ;

$\alpha = \frac{1}{273,15} K^{-1}$ – температурний коефіцієнт об'ємного розширення.

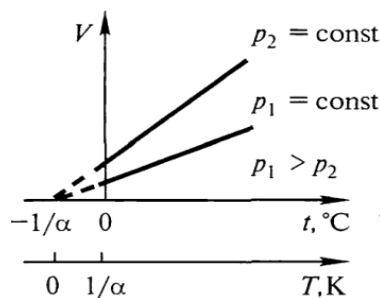


Рисунок 9.3 – Ізобари в координатах (V,t) та (V,T)

Запишемо закон Гей-Люссака у термодинамічній шкалі температур.

З формули $V = V_0(1 + \alpha t)$ випливає, що ізобари перетинають вісь температур у точці $t = -\frac{1}{\alpha} = 273,15^\circ \text{C}$. $[(1 + \alpha t) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{t}]$.

Перенесемо початок відліку до цієї точки, тоді $T = t + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow t = T - \frac{1}{\alpha}$.

У цьому випадку $V = V_0(1 + \alpha t) = V_0(1 + \alpha T - 1) = V_0 \alpha T$.

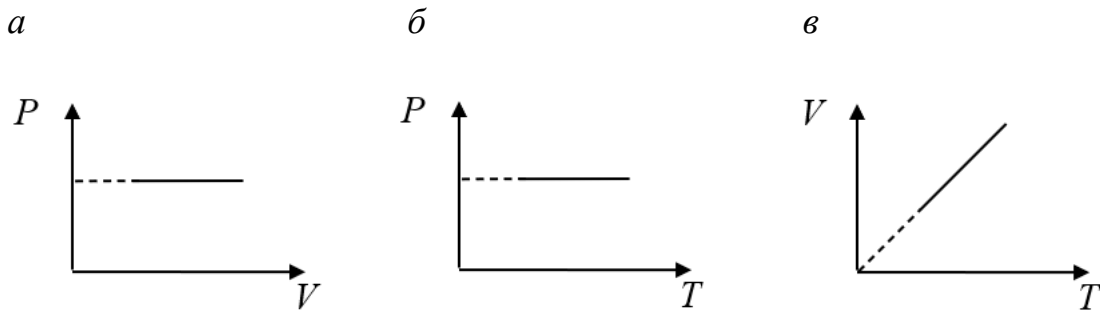
$$V = V_0 \alpha T.$$

Можна записати **рівняння ізобарного процесу**

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad V/T = \text{const}$$

(індекси 1 і 2 відносяться до довільних станів газу).

Графік ізобарного процесу має назву *ізобара* (рисунок 9.4).



a – координати (P, V) , *б* – (P, T) , *в* – (V, T)

Рисунок 9.4 – Ізобари в координатах

Закон Шарля описує **ізохорний** процес ($V = \text{const}$): для даної маси газу при постійному **об'ємі** тиск газу змінюється лінійно з температурою (рисунок 9.5)

$$P = P_0(1 + \alpha t), \text{ при } V = \text{const}; m = \text{const}.$$

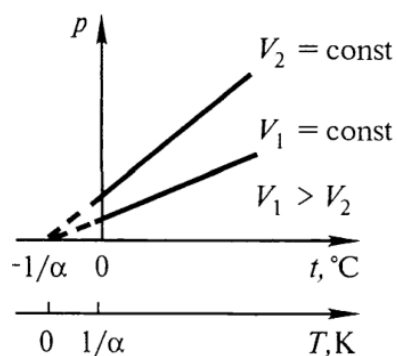


Рисунок 9.5 – Ізохори в координатах (P, t) та (P, T) .

З рівняння $P = P_0(1 + \alpha t)$ випливає, що

$$t = -\frac{1}{\alpha} \Rightarrow T = t + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow t = T - \frac{1}{\alpha}; \quad P = P_0(1 + \alpha T - 1) = P_0 \alpha T.$$

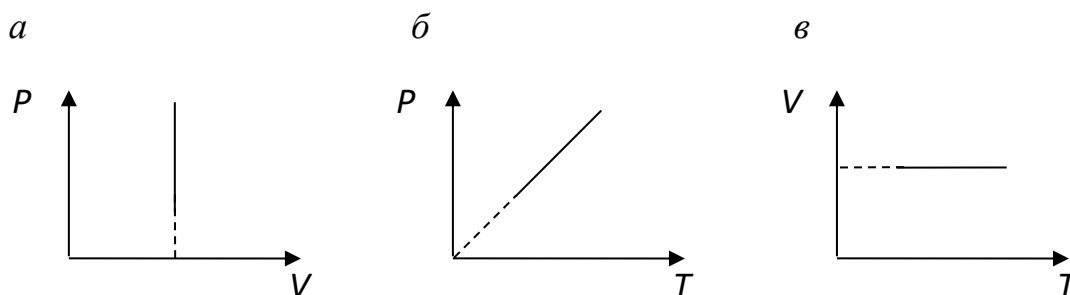
$$P = P_0 \alpha T$$

Можна записати **рівняння ізохорного процесу**

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad P/T = const$$

(індекси 1 і 2 відносяться до довільних станів газу).

Графік ізохорного процесу має назву *ізохора* (рисунок 9.6).



a – координати (P, V) , b – (P, T) , c – (V, T)

Рисунок 9.6 – Ізохори в координатах

9.4 Рівняння стану ідеального газу

Рівняння стану ідеального газу – **рівняння Менделєєва-Клапейрона**

$$PV = \frac{m}{M}RT = \nu RT$$

зв'язує між собою термодинамічні параметри стану ідеального газу і дає змогу передбачити стан газу, якщо при деяких заданих тиску та температурі

1 моль газу займає **молярний об'єм** $V = \frac{m}{M}V_m$, де M – **молярна маса** $M = \left[\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right]$,

$\frac{m}{M} = \nu$ – **кількість речовини**, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$ – універсальна газова стала.

З рівняння Менделєєва-Клапейрона можна вивести всі газові закони, що були відкриті дослідним шляхом. Запишемо рівняння стану ідеального газу в **об'єднаному вигляді** (таблиця 9.1) при $\frac{P \cdot V}{T} = \text{const}$

Таблиця 9.1

Закон Бойля-Маріотта	Закон Гей-Люссака	Закон Шарля
$P \cdot V = \text{const},$ $T = \text{const}; m = \text{const}$	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2},$ $P = \text{const}; m = \text{const}$	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2},$ $V = \text{const}; m = \text{const}$

Використовуючи **сталу Больцмана**

$$k = \frac{R}{N_A},$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, отримаємо ще одну форму запису рівняння стану.

Рівняння Менделєєва-Клапейрона для 1 моля газу запишемо у вигляді

$$P = \frac{RT}{V_m}$$

та врахуємо, що

$$R = kN_A.$$

Тоді

$$P = \frac{kN_A \cdot T}{V_m} = nKT.$$

Отже, **рівняння стану ідеального газу** (для тиску для концентрації молекул газу) має вигляд

$$p = nkT,$$

де $n = \frac{N_A}{V_m}$ – концентрація молекул – число молекул в одиниці об'єму.

Тиск ідеального газу за даної температури є пропорційним концентрації його молекул. При однаковій температурі та однакових тисках усі гази містять в одиниці об'єму однакову кількість молекул.

Питання до лекції

- 1 Сформулюйте основні положення молекулярно-кінетичної теорії.
- 2 Який газ називається ідеальним?
- 3 У чому полягає фізичний зміст температури?
- 4 Які температурні шкали вам відомі? Запишіть формулу зв'язку між абсолютною термодинамічною та температурою за шкалою Цельсія.
- 5 Що таке число ступенів свободи молекули? Назвіть кількість ступенів свободи в одно-, дво- та багатоатомної молекули.
- 6 Що називається ізопроцесом?
- 7 Опишіть ізотермічний процес. Запишіть основне рівняння для нього та наведіть графіки ізотермічного процесу в координатах (P,V).
- 8 Опишіть ізобарний процес. Запишіть основне рівняння для нього. Наведіть графіки ізобарного процесу в координатах (P,V), (P,T), (V,T).
- 9 Опишіть ізохорний процес. Запишіть основне рівняння для нього. Наведіть графіки ізохорного процесу в координатах (P,V), (P,T), (V,T).
- 10 Запишіть рівняння Менделєєва-Клапейрона, рівняння стану ідеального газу. Поясніть зміст величин, що входять до цих рівнянь.

Лекція 10

ВНУТРІШНЯ ЕНЕРГІЯ ТА РОБОТА. ФАЗОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РЕЧОВИНИ

План лекції

- 10.1 Внутрішня енергія ідеального газу.
- 10.2 Число ступенів свободи молекули.
- 10.3 Робота газу в термодинаміці.
- 10.4 Теплоємність. Види теплоємності.
- 10.5 Агрегатні стани речовини. Рівняння теплового балансу.
- 10.6 Фазові перетворення.

10.1 Внутрішня енергія ідеального газу

Молекули ідеального газу не взаємодіють одна з одною на відстані. Зміна стану ідеального газу супроводжується зміною тільки енергії хаотичного руху його молекул. Внаслідок цього під **внутрішньою енергією ідеального газу** розуміють енергію хаотичного поступального та обертального руху його молекул. Істотно зазначити, що внутрішня енергія ідеального газу залежить лише від температури. Вона визначається лише станом газу та не залежить від того, яким способом газ привели до цього стану. Тому **внутрішня енергія – функція стану речовини.**

Способи зміни внутрішньої енергії термодинамічної системи:

- здійснити роботу,
- передати системі будь-яку кількість теплоти.

Необхідною умовою виконання роботи є переміщення взаємодіючих із системою тіл чи його макроскопічних частин, отже зміна об'єму системи.

10.2 Число ступенів свободи молекули

Число ступенів свободи матеріального об'єкта (молекули) i (рисунок 10.1) дорівнює кількості незалежних координат, які необхідно задати, щоб однозначно визначити положення цього об'єкта у просторі щодо системи відліку, що розглядається. Наприклад положення матеріальної точки в просторі визначається трьома координатами x, y, z .

Матеріальна точка має три ступеня свободи. Абсолютно тверде тіло має шість ступенів свободи:

- координати x, y, z визначають положення центру мас;
- кути θ, φ, ψ – орієнтацію двох взаємно перпендикулярних, жорстко пов'язаних із тілом осей OO і $O'O'$ (рисунок 10.1);

- x, y, z – поступальні ступені свободи;
- θ, φ, ψ – обертальні ступені свободи абсолютно твердого тіла.

Система N матеріальних точок, між якими немає жорстких зв'язків, має $3N$ ступенів свободи.

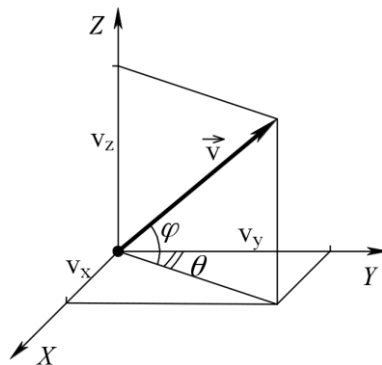


Рисунок 10.1 – Визначення числа ступенів свободи матеріальної точки [13]

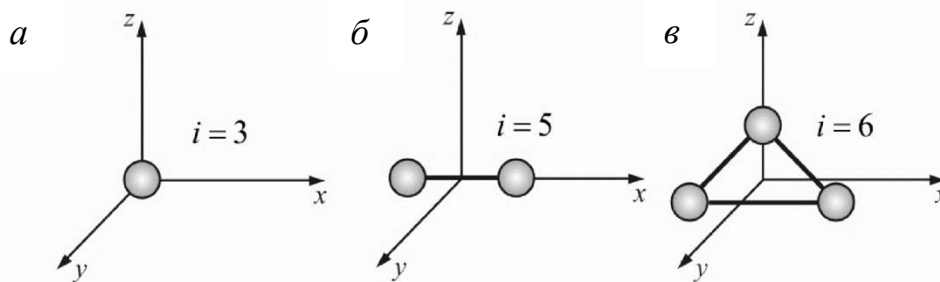
Згідно з теоремою Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи, якщо система молекул знаходиться в тепловій рівновазі при температурі T , то середня кінетична енергія рівномірно розподілена між усіма ступенями свободи і для кожного поступального та обертального ступеня свободи молекули вона дорівнює

$$E = \frac{kT}{2}.$$

Тому на кожний коливальний ступінь свободи доводиться

$$E_k = \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = kT$$

Молекули газів, що складаються з одного атома (Ar, Xe, Ne) мають три ступеня свободи $i=3$; з двох атомів (O_2 , H_2 , N_2) – п'ять ступенів свободи $i=5$; з трьох і більше атомів (CO_2 , CH_4) (багатоатомні молекули) – шість ступенів свободи $i=6$ (рисунок 10.2).



a – одноатомні; *б* – двоатомні; *в* – багатоатомні молекули

Рисунок 10.2 – Ступені свободи [13]

Вираз для **внутрішньої енергії** ідеального газу

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT. \quad (10.1)$$

Одиниця вимірювання внутрішньої енергії в SI: $[U] = \text{Дж}$.

Згідно з (10.1), внутрішня енергія:

- одноатомного газу $U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT$;
- двоатомного газу $U = \frac{5}{2} \frac{m}{M} RT$;
- багатоатомного газу $U = \frac{6}{2} \frac{m}{M} RT$.

10.3 Робота газу в термодинаміці

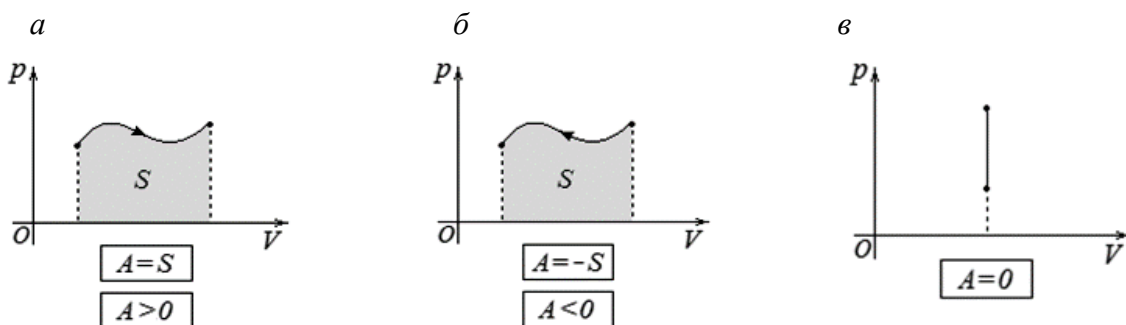
Робота газу в термодинаміці визначається співвідношенням

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

де p – тиск, dV – зміна об'єму термодинамічної системи.

Нехай із газом проводять деякий процес, в якому виконується робота. Слід розрізнити роботу газу та роботу над газом (робота зовнішніх сил над газом). Для того самого процесу ці дві роботи рівні по модулю, але відрізняються за знаком: $A = -A$. Це можна пояснити тим, що зміна об'єму системи може бути як додатною, так і від'ємною.

Уявимо графічно роботу як площу під кривою процесу в координатах p, V (рисунок 10.3). Якщо $dV > 0$ – робота позитивна, газ розширюється і робота дорівнює площі під кривою, взятою зі знаком «+», тобто система здійснює роботу (рисунок 10.3, а). Якщо $dV < 0$ – робота негативна, газ стискається, тобто робота відбувається над системою (рисунок 10.3, б). Якщо $dV = 0$, робота не здійснюється (рисунок 10.3, в).



а – розширення газу, б – стискання газу в – постійний об'єм газу

Рисунок 10.3 – Робота газу [13]

Чисельне значення роботи залежить від шляху переходу системи з одного стану до іншого. Тому робота, на відміну від внутрішньої енергії, є функцією процесу.

10.4 Теплоємність. Види теплоємності

Теплопередача здійснюється або шляхом безпосередньої взаємодії частинок системи з частинками середовища при їхніх випадкових зіткненнях (теплопровідність, конвекція), або шляхом обміну електромагнітним випромінюванням (випромінювання).

Енергія, що отримується або віддається системою в процесі теплопередачі, називається **кількістю теплоти Q**. Кількість тепла, як і робота, – функція процесу.

Теплоємність – скалярна фізична величина, що характеризує зв'язок між кількістю відомої системи тепла та зміною її температури. Розрізняють повну, питому та молярну теплоємності.

Повна теплоємність (теплоємність) – чисельно дорівнює кількості тепла, яку треба надати газу, щоб підвищити його температуру на один градус

$$C_{\text{пов}} = \frac{Q}{\Delta T}.$$

Одиниця вимірювання теплоємності в SI: $[C_{\text{пов}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Питома теплоємність c чисельно дорівнює кількості тепла, яку необхідно надати одиниці маси речовини, щоб підвищити її температуру на один градус

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}.$$

Одиниця вимірювання питомої теплоємності в SI: $[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

Молярна теплоємність чисельно дорівнює кількості тепла, яку необхідно надати одному молю речовини, щоб підвищити його температуру на один градус

$$C_{\mu} = \frac{Q}{\nu \Delta T}$$

Одиниця вимірювання молярної теплоємності в SI: $[C_{\mu}] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Зв'язок між питомою та молярною теплоємністю

$$C_{\mu} = \mu c.$$

10.5 Агрегатні стани речовини. Рівняння теплового балансу

У природі існує **чотири агрегатних стани речовини**:

- 1) твердий;
- 2) рідкий;
- 3) газоподібний;
- 4) плазмовий (плазма) – це газ, що складається з нейтральних та іонізованих молекул, а також з електронів.

При нагріванні (охолодженні) речовина переходить із твердого стану спочатку в рідкий, а потім, при подальшому підвищенні температури, – в газоподібний. Кількість теплоти, яку більш нагріте тіло віддає при охолодженні, дорівнює кількості теплоти, яку більш холодне тіло отримує при нагріванні.

Якщо через Q_1 позначити кількість теплоти, передану першим тілом, а через Q_2 – кількість теплоти, отриману другим тілом, то

$$Q_1 = Q_2. \quad (10.2)$$

Рівняння (10.2) називають **рівнянням теплового балансу**.

Кількість теплоти Q , яку тіло отримало при нагріванні (або віддало при охолодженні) можна визначити за формулою

$$Q = cm\Delta T = cm(T_2 - T_1),$$

де c – питома теплоємність речовини.

Одиниця вимірювання кількості теплоти в SI: $[Q] = \text{Дж}$.

У спільному випадку теплообмін відбувається між багатьма тілами і рівняння теплового балансу буде записано так:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0,$$

де Q_1, Q_2, Q_3 – кількість теплоти, отримана або віддана тілами.

10.6 Фазові перетворення

У термодинаміці **фазою** називається сукупність частин системи з однаковим хімічним складом, що знаходяться в однаковому стані. Наприклад у закритій посудині знаходяться вода, лід і пара. Це система трьох фаз. Одна фаза – вода, друга – лід, третя – пара. За певних умов різні фази однієї й тієї ж речовини перебувають у рівновазі. Рівновага існує лише у певному інтервалі температур, причому кожному значенню T відповідає значення p : $p = f(T)$.

У термодинаміці доводиться, що рівновага більш ніж трьох фаз однієї речовини неможлива. Перехід з однієї фази до іншої (фазовий перехід першого роду) супроводжується поглинанням або виділенням деякої кількості тепла. Воно називається теплом переходу. Якщо переходи з однієї фази в іншу не супроводжуються поглинанням або виділенням деякої кількості тепла, такі переходи називають фазовими переходами другого

роду. Перехід речовини з однієї фази до іншої називається **фазовим перетворенням**. При фазових перетвореннях відбувається поглинання або виділення кількості теплоти, що називається теплотою переходу. Існує кілька **фазових перетворень: плавлення (кристалізація), пароутворення (конденсація), згорання**.

Процес переходу речовини з твердої фази до рідкої називається **плавленням**. Процес перетворення речовин з рідкої фази до твердої називається **кристалізацією, або твердінням**. Для кожної твердої кристалічної речовини при певному тиску існує **температура (точка) плавлення або кристалізації**. Температура кристалізації дорівнює температурі плавлення. У процесі плавлення (кристалізації) ця температура не змінюється.

Кількість теплоти Q , яка є необхідною для плавлення одиниці маси твердої речовини m при температурі плавлення, називається **питомою теплотою плавлення λ**

$$\lambda = \frac{Q}{m}.$$

Одиниця вимірювання в системі SI: $[\lambda] = \text{Дж/кг}$.

Питома теплота плавлення залежить від природи речовини та від зовнішнього тиску.

При охолодженні рідин до температури кристалізації відбувається кристалізація речовини – перехід речовини з рідкого у твердий кристалічний стан. При цьому виділяється кількість теплоти, що дорівнює теплоті плавлення.

Аморфні тіла (скло, смоли та ін.) не мають певної точки плавлення й кристалізації. При плавленні вони змінюють свій фазовий стан поступово.

Процес переходу речовини з рідкої фази в газоподібну називається **пароутворенням**. Процес переходу речовини з твердої фази в газоподібну називається **сублімацією**. Зворотній перехід із газоподібної фази до рідкої

називається **конденсацією**. Пароутворення відбувається завдяки двом способам – випаровуванню та кипінню. Пароутворення, яке виникає лише з поверхні рідини, називається **випаровуванням**. Випаровування відбувається при будь-якій температурі та збільшується при її підвищенні. При **кипінні** випаровування рідини відбувається в усьому об'ємі (а не лише з вільної поверхні) всередині створюваних бульбашок пари.

Кількість теплоти Q , що є необхідною для випаровування одиниці маси рідини m , нагрітої до температури кипіння, називається **питомою теплотою пароутворення r**

$$r = \frac{Q}{m}.$$

Одиниця вимірювання в системі SI: $[r] = \text{Дж/кг}$.

Досліди вказують, що питома теплота пароутворення дорівнює питомій теплоті конденсації.

Питомою теплотою згоряння палива q називається кількість теплоти, що виділяється при повному згорянні одиниці маси палива

$$q = \frac{Q}{m}.$$

Одиниця вимірювання в системі SI: $[q] = \text{Дж/кг}$.

Питання до лекції

- 1 Що розуміють під внутрішньою енергією ідеального газу?
- 2 Запишіть формули для внутрішньої енергії одно-, дво- та багатоатомного газу.
- 3 Назвіть способи зміни внутрішньої енергії системи.
- 4 Поясніть, від якого чинника залежить знак роботи. Наведіть відповідні графіки.

- 5 Що таке теплопередача? Дайте визначення поняття «теплоємність». Перелічіть види теплоємності та запишіть відповідні формули.
- 6 Запишіть рівняння теплового балансу та поясніть його фізичний зміст.
- 7 Опишіть процеси фазових перетворень, які вам відомі. Запишіть відповідні рівняння.
- 8 Чи можна розглядати нагрів (охолодження) речовини фазовим переходом? Відповідь обґрунтуйте.

Лекція 11

ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРШОГО ЗАКОНУ ТЕРМОДИНАМІКИ ДО АНАЛІЗУ ІЗОПРОЦЕСІВ В ІДЕАЛЬНОМУ ГАЗІ

План лекції

11.1 Перший закон термодинаміки.

11.2 Застосування першого початку термодинаміки до аналізу ізопроеесів.

11.2.1 Ізохорний процес.

11.2.2 Ізобарний процес.

11.2.3 Ізотермічний процес.

11.3 Адіабатний процес. Рівняння Пуассона.

11.4 Робота газу в адіабатному процесі.

11.1 Перший закон термодинаміки

Термодинаміка базується на двох початках – фундаментальних законах, встановлених унаслідок узагальнення дослідних даних. Перший початок (закон) термодинаміки – окремий випадок формулювання закону збереження та перетворення енергії стосовно теплових процесів.

Перший закон термодинаміки: система отримує унаслідок теплообміну кількість теплоти δQ , яка витрачається на збільшення внутрішньої енергії dU системи та на роботу δA системи проти зовнішніх сил

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

звідси $dU = \delta Q - \delta A$.

Позначимо $\delta A' = -\delta A$, де $\delta A'$ – робота зовнішніх сил над системою. Тоді $dU = \delta A' + \delta Q$ – зміна внутрішньої енергії, дорівнює сумі роботи зовнішніх сил $\delta A'$ і кількості теплоти dQ , що отримана системою з навколишнього середовища (**друге формулювання першого закону термодинаміки**).

Круговий процес або **цикл** – це сукупність термодинамічних процесів, унаслідок яких система повертається до початкового стану. Система, яка здійснює круговий процес, називається **робочим тілом**. Робочим тілом зазвичай є газ. Оскільки в круговому процесі: $dU = 0$, то $\delta Q = \delta A$ – не можна збудувати вічний двигун (perpetuum mobile), який здійснює роботу, більшу, ніж кількість теплоти, що йому передана. Такий двигун називається вічним двигуном першого роду.

Перший закон термодинаміки можна сформулювати інакше: вічний двигун першого роду є неможливим.

11.2 Застосування першого початку термодинаміки до аналізу ізопроесів

11.2.1 Ізохорний процес

З першого закону термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Оскільки $dV = 0$, $\delta A = pdV = 0$ – при ізохорному процесі газ **не виконує роботу**, то **перший закон термодинаміки для ізохорного процесу**

$$\delta Q = dU.$$

Ураховуючи вираз (10.1), отримаємо для одного моля газу ($\nu = 1$ моль):

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT, \quad (11.1)$$

де $C_V = \frac{i}{2}R$ – молярна теплоємність при сталому об'ємі.

Теплота, що надана газу в ізохорному процесі, йде на зміну (збільшення) внутрішньої енергії системи, тобто обмін енергією між газом і довкіллям при ізохоричному процесі відбувається у формі теплопередачі. Тепло, що підводиться до газу, витрачається тільки на збільшення внутрішньої енергії газу.

11.2.2 Ізобарний процес

З першого закону термодинаміки

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + \delta A; \\ \delta Q &= \frac{m}{M} C_V dT + p dV = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} R dT = \frac{m}{M} dT (C_V + R), \end{aligned}$$

отже, **перший закон термодинаміки при ізобарному процесі**

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

або

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT,$$

де $C_p = \frac{i+2}{2}R$ – молярна теплоємність при сталому тиску.

Робота при ізобарному процесі

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1).$$

З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Якщо $T_2 - T_1 = 1\text{К}$, то для 1 моля газу $R = A$, тобто R чисельно дорівнює роботі ізобарного розширення 1 моля ідеального газу при нагріванні на 1 К.

11.2.3 Ізотермічний процес

З першого закону термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Якщо $T = const$, то $dU = 0$, отже, $\delta Q = \delta A$ – робота здійснюється за рахунок теплоти, яку отримує система.

Робота ізотермічного розширення

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Згідно з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Тоді робота газу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m RT}{M V} dV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Оскільки при ізотермічному процесі $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2}$, то **робота при ізотермічному процесі**

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Можемо записати **перший закон термодинаміки для ізотермічного процесу**

$$\delta Q = \delta A.$$

$$\text{Молярна теплоємність газу } C_{\mu} = \frac{Q}{\nu \Delta T} = \pm \infty.$$

Отже, при ізотермічному процесі вся кількість теплоти, що подається газу, витрачається на здійснення ним роботи проти зовнішніх сил. Щоб при розширенні газу його температура знижувалася, до нього в ході ізотермічного процесу необхідно підводити кількість теплоти, еквівалентну зовнішній роботі розширення.

11.3 Адіабатний процес. Рівняння Пуассона

До ізопроцесів можна віднести і адіабатний процес – процес, при якому відсутній теплообмін з навколишнім середовищем: $Q = 0$ – повна теплоізоляція. Приклад: стиск та розтяг повітря в звуковій хвилі, робота двигуна внутрішнього згорання.

Отже, **перший закон термодинаміки для ізобарного процесу**

$$\delta A = -dU,$$

система здійснює роботу за рахунок внутрішньої енергії системи.

Продиференціюємо вираз рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT;$$
$$d(pV) = pdV + Vdp = \frac{m}{M}RdT. \quad (11.2)$$

Розділимо (11.2) на pdV

$$\frac{pdV + Vdp}{pdV} = \frac{\frac{m}{M}RdT}{-\frac{m}{M}C_V dT} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_V - C_p}{C_V} = 1 - \gamma, \quad (11.3)$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – **коефіцієнт Пуассона**.

Отримаємо далі рівняння адіабатичного процесу. З рівняння (11.3)

$$1 + \frac{Vdp}{dV \cdot p} = 1 - \gamma;$$

$$\frac{Vdp}{dV \cdot p} = -\gamma;$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V};$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}.$$

Прологарифмуємо цей вираз

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\gamma \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\gamma} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}.$$

Остаточно отримаємо

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} = \text{const.}$$

Ми отримали **рівняння адіабатного процесу** в координатах (p, V)

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (11.4)$$

Це рівняння носить назву **рівняння Пуассона**.

Отримаємо далі рівняння Пуассона в координатах (T, V) . Для цього з рівняння Менделєєва-Клапейрона виразимо тиск p

$$\begin{aligned} pV &= \frac{m}{M}RT; \\ p &= \frac{m}{M} \frac{RT}{V}; \\ \frac{m}{M} \frac{RT}{V} V^\gamma &= \text{const}, \end{aligned}$$

тоді

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (11.5)$$

– **рівняння адіабатного процесу** в координатах (T, V) .

Для отримання рівняння Пуассона в координатах (T, p) виразимо з рівняння Менделєєва-Клапейрона об'єм V

$$\begin{aligned} V &= \frac{m}{M} \frac{RT}{p} \\ p \cdot \frac{m}{M} \left(\frac{RT}{p}\right)^\gamma &= \text{const}. \end{aligned}$$

тоді

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$$

– **рівняння адіабатного процесу** в координатах (T, p) .

Отже, **рівняння Пуассона для адіабатного процесу:**

$$pV^\gamma = \text{const} \text{ – в координатах } (p, V),$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \text{ – в координатах } (T,V),$$

$$T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{const} \text{ – в координатах } (T,p),$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$ – **показник адиабати, коефіцієнт Пуассона.**

Можна зробити висновок, що проаналізовані ізохорний, ізобарний, ізотермічний та адиабатний процеси мають загальну особливість – вони відбуваються при постійній теплоємності

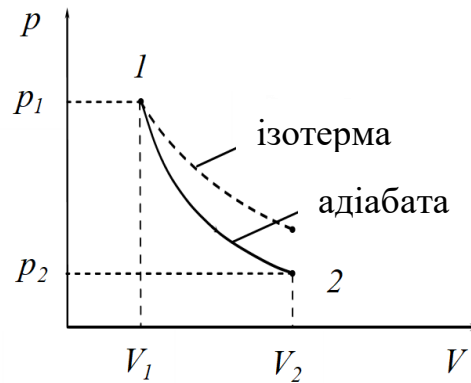
$V = \text{const}, C = C_v$ – ізохорний процес;

$P = \text{const}, C = C_p$ – ізобарний процес;

$T = \text{const}, C = \infty$ – ізотермічний процес;

$Q = \text{const}, C = 0$ – адиабатичний процес.

Проведемо порівняння адиабатного та ізотермічного процесу. На рисунку 11.1 надано графік адиабати в координатах (p, V) .



1 – адиабата, 2 – ізотерна

Рисунок 11.1 – Графіки адиабатного та ізотермічного процесу [8]

Бачимо, що адиабатний процес дуже схожий на ізотермічний, але крива, що характеризує адиабатний процес – адиабата $pV^{\gamma} = \text{const}$ спадає крутіше за ізотеру $pV = \text{const}$ ($\gamma = 1$). Це пояснюється тим, що при адиабатному стисканні збільшення тиску газу обумовлено не тільки

зменшенням його об'єму, як при ізотермічному стисканні, а й підвищенням температури.

При адіабатному розширенні температура газу зменшується, тому тиск газу знижується швидше, ніж при ізотермічному розширенні. Отже, при адіабатному стисканні газ нагрівається, а при адіабатному розширенні охолоджується.

11.4 Робота газу в адіабатному процесі

Для адіабатного процесу перший закон термодинаміки

$$\delta Q = 0.$$

Робота при адіабатному процесі

$$\delta A = -dU = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$$

$$A = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

Якщо газ адіабатно розширюється від V_1 до V_2 , то його температура зменшується від T_1 до T_2 .

Враховуючи, що $C_p = C_V + R$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V};$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1};$$

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Враховуючи $TV^{\gamma-1} = const$, отримаємо

$$\frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 1;$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1};$$

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right) \quad (11.6)$$

З (11.6) робимо висновок: робота за адіабатичного процесу розширення менше, ніж за ізотермічного розширення. Це тому, що за адіабатного розширення відбувається охолодження газу, тоді як за ізотермічного розширення температура підтримується постійною за допомогою припливу ззовні еквівалентної кількості теплоти.

Питання до лекції

- 1 Сформулюйте перший початок термодинаміки.
- 2 Запишіть формулу першого закону термодинаміки та вираз для роботи газу для ізотермічного процесу.
- 3 Запишіть формулу першого закону термодинаміки та вираз для роботи газу для ізохорного процесу.
- 4 Запишіть формулу першого закону термодинаміки та вираз для роботи газу для ізобарного процесу.
- 5 Який процес називається адіабатним? Запишіть для нього формулу першого закону термодинаміки.
- 6 Запишіть рівняння Пуассона в координатах (p, V) , (T, V) , (T, p) .
- 7 Накресліть та порівняйте графіки адіабатного та ізотермічного процесу.

Лекція 12

ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ТЕПЛОВІ ДВИГУНИ. КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ (ККД)

План лекції

12.1 Зворотні та незворотні процеси.

12.2 Теплові двигуни та холодильні машини. Коефіцієнт корисної дії (ККД). Цикл Карно.

12.3 Ентропія та її зміна при деяких термодинамічних процесах.

12.4 Статистичне тлумачення ентропії. Другий початок термодинаміки.

12.1 Зворотні та незворотні процеси

В основі роботи теплових двигунів та холодильних машин лежать кругові процеси чи цикли.

Круговий процес (цикл) – процес, у якому система, пройшовши через низку станів, повертається у вихідний стан. На діаграмі станів (p, V) цикл зображується замкненою кривою.

Прямий цикл – це цикл, за який відбувається додатна робота $A = \oint pdV > 0$. Цикл протікає за годинниковою стрілкою.

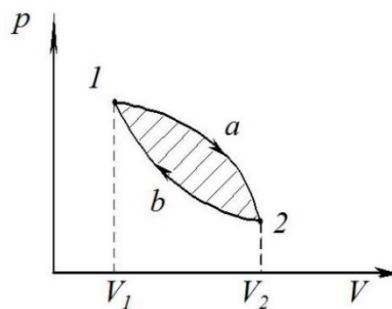


Рисунок 12.1 – Круговий процес [2]

Цикл, що здійснюється ідеальним газом, можна розбити на процеси розширення та стиснення. Робота розширення ($1 \rightarrow a \rightarrow 2$) визначається площею фігури $1a_2V_2V_11$ – додатна ($dV > 0$). Робота стисання ($2 \rightarrow b \rightarrow 1$) визначається площею фігури $2b_1V_1V_22$ – від’ємна ($dV < 0$). Робота, що здійснюється газом за цикл, визначається площею, що охоплюється замкненою кривою (рисунок 12.1).

Зворотний цикл – цикл, за який відбувається від’ємна робота $A = \oint pdV < 0$. Цикл протікає проти годинникової стрілки. Робота розширення $1a2$ додатна ($dV > 0$). Робота стисання $2b1$ від’ємна ($dV < 0$). Робота, що здійснюється газом за цикл, визначається площею, що охоплюється замкненою кривою.

У результаті кругового процесу система повертається у вихідний стан, тобто зміна внутрішньої енергії газу дорівнює нулю. Згідно з першим законом термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Оскільки $dU = 0$, отже, $\delta Q = \delta A$, тобто робота, що здійснюється за цикл, дорівнює кількості отриманої ззовні теплоти. Але в результаті кругового процесу система може теплоту як отримувати, так і віддавати, тоді

$$A = Q_1 - Q_2,$$

де Q_1 – кількість теплоти, отримана від нагрівача, а Q_2 – кількість теплоти, віддана системою охолоджувачу (холодильнику). Коефіцієнт корисної дії (ККД) для кругового процесу

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Процес називається оборотним, якщо може відбуватися як у прямому, так і у зворотному напрямі, і система повертається у вихідний стан, тобто у

навколишньому середовищі й у системі немає ніяких змін. Будь-який інший процес називається незворотнім. Усі реальні процеси супроводжуються дисипацією енергії (через тертя, теплопровідність). Отже, оборотні процеси – це ідеалізовані реальні процеси. Вони економічні і мають максимальний ККД. Ми їх розглядаємо з двох причин: 1) багато процесів у природі та техніці практично оборотні; 2) можна побачити шляхи підвищення ККД реальних двигунів.

12.2 Теплові двигуни та холодильні машини. Коефіцієнт корисної дії (ККД). Цикл Карно

Кругові процеси лежать в основі роботи теплових двигунів та холодильних машин. **Тепловий двигун** – це періодично працюючий двигун, який здійснює роботу за рахунок отриманої ззовні теплоти. У теплових двигунах використовують прямий цикл.

Принцип дії теплового двигуна полягає у такому. Від термостата – нагрівача – з вищою температурою T_1 , за цикл забирається кількість теплоти Q_1 , а термостату з нижчою температурою T_2 (холодильнику) за цикл передається кількість теплоти Q_2 , при цьому виконується робота $A = Q_1 - Q_2$ (рисунок 12.2).

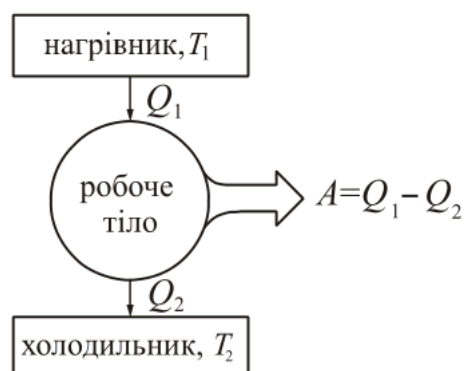


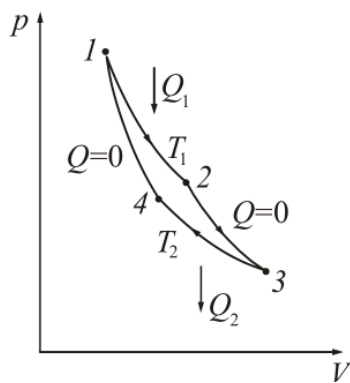
Рисунок 12.2 – Тепловий двигун [6]

ККД теплового двигуна дорівнює ККД кругового процесу – це відношення роботи A , що здійснюється двигуном, до витраченої енергії, тобто до кількості теплоти, взятої від нагрівача

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

З цього виразу видно, що у ідеального теплового двигуна ККД менше одиниці, тобто менше 100 %. Карно показав, що для роботи теплового двигуна необхідно щонайменше двох джерел теплоти з різними температурами, оскільки у процесі стиску потрібно охолоджувати робоче тіло. В іншому випадку ніякої роботи не здійснюватиметься.

Цикл Карно. Цикл Карно найбільш економічний оборотний круговий цикл, що складається з двох ізотерм та двох адіабат. Розглянемо прямий цикл Карно з ідеальним газом в якості робочого тіла (рисунок 12.3).



Процес 1-2 – ізотермічне розширення;

процес 2-3 – адіабатне розширення;

процес 3-4 – ізотермічне стискання;

процес 4-1 – адіабатне стискання.

Рисунок 12.3 – Цикл Карно на діаграмі (P, V) [8]

Розглянемо термодинамічні процеси та роботу в них.

$$A_{12} = \frac{m}{M} R_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1 - \text{ізотермічне розширення (1} \rightarrow 2), T = \text{const}, V_2 > V_1;$$

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) - \text{адіабатне розширення (2} \rightarrow 3), \delta Q = 0, T_2 < T_1;$$

$$A_{34} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2 - \text{ізотермічне стискання (3} \rightarrow 4), T = \text{const}, V_3 > V_4;$$

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23} - \text{адіабатне стискання (4} \rightarrow \text{1), } \delta Q = 0, T_3 < T_4.$$

Робота за цикл

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2.$$

Висновок: робота за цикл визначається площею, обмеженою ізотермами та адіабатами циклу Карно. Термічний **ККД циклу Карно**

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 – кількість теплоти, отримана від нагрівача, а T_2 – кількість теплоти, що віддана системою охолоджувачу (холодильнику). Для будь-якої теплової машини завжди виконується умова $\eta < 100\%$.

Висновок: для циклу Карно ККД визначається лише температурами нагрівача та холодильника.

З усіх періодичних працюючих теплових машин, що мають однакові температури нагрівачів (T_1) і холодильників (T_2), найбільший ККД мають оборотні машини. За **теоремою Карно**, ККД оборотних машин, які працюють при однакових температурах нагрівачів (T_1) і холодильників (T_2), дорівнюють один одному і не залежать від природи робочого тіла (тіла, що здійснює круговий процес і енергію, що обмінюється з іншими тілами), а визначається тільки температурами нагрівача та холодильника.

Холодильні машини – періодично працюючі установки, в яких за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з більш високою температурою.

Принцип дії холодильних машин. Системою за цикл від термостата з нижчою температурою T_2 віднімається кількість теплоти Q_2 і віддається термостату з вищою температурою T_1 кількістю теплоти Q_1 (рисунок 12.6).

Оскільки цей процес неприродний (теплота не може спонтанно переходити від холодного тіла до гарячого), доводиться над системою здійснити роботу

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Отже, кількість теплоти Q_1 , віддана системою термостату з більш високою температурою T_1 , більша за теплоту Q_2 , отриману від термостата з нижчою температурою T_2 , на величину роботи A , здійсненої над системою. **ККД холодильної машини** (холодильний коефіцієнт)

$$\eta = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Висновок: холодильний коефіцієнт характеризує ефективність холодильної машини та визначається як відношення відібраної від термостата з нижчою температурою кількості теплоти T_2 до роботи A , яка витрачається на приведення холодильної машини в дію. Без роботи не можна відбирати теплоту від менш нагрітого тіла і передавати її більш нагрітому тілу.

12.3 Ентропія та її зміна при деяких термодинамічних процесах

Якісна відмінність теплового руху молекул від інших форм руху – його безладність, хаотичність. Тож описи теплового руху молекул вводять кількісну міру ступеня молекулярного безладдя – **ентропію**. Введемо поняття **наведена кількість теплоти** $\frac{Q}{T}$ – відношення теплоти, отриманої тілом в ізотермічному процесі, до температури T тіла, що віддає тепло. Тоді $\frac{\delta Q}{T}$ – наведена кількість теплоти, що надається тілу на нескінченно малій ділянці процесу. Використовуючи це поняття, дамо визначення ентропії.

Ентропія – це функція стану, диференціалом якої є наведена кількість теплоти $\frac{\delta Q}{T}$.

Висновок: наведена кількість теплоти, що надається тілу в будь-якому оборотному круговому процесі, дорівнює нулю: $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$.

Одиниця вимірювання ентропії в SI: [Дж/К]: 1 Дж/К – зміна ентропії системи, якій при температурі 1 К в ізотермічному процесі надається кількість теплоти 1 Дж.

Нерівність Клаузіуса: $\Delta S \geq 0$. Ентропія замкнутої системи може або зростати (у разі незворотних процесів) або залишатися постійною (у разі оборотних процесів). Цей вираз відноситься лише до замкнутих систем. Якщо система обмінюється теплом із зовнішнім середовищем, її ентропія може поводитися будь-як. Немає приладів для вимірювання ентропії. Її можна лише розрахувати. Зміна ентропії системи при її рівноважному переході зі стану 1 до стану 2 визначається виразом

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} = \frac{m}{M} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Підінтегральний вираз та межі інтегрування визначаються через величини, що характеризують досліджуваний процес. Ентропія визначається з точністю до адитивної постійної. Фізичний сенс має сама ентропія, а не різниця ентропій (важливі зміни стану).

Адитивність ентропії полягає в тому, що ентропія S (або зміна ентропії ΔS) системи, що складається з декількох частин, дорівнює сумі ентропій (або сумі алгебри змін ентропій) цих частин

$$S = \sum_{i=1}^n S_i,$$
$$\Delta S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i.$$

12.4 Статистичне тлумачення ентропії. Другий початок термодинаміки

У статистичній фізиці ентропію пов'язують із термодинамічною ймовірністю (W) стану системи: W – це кількість способів, якими може бути реалізовано даний стан макроскопічної системи або кількість мікростанів, що здійснюють цей макростан. Формула Больцмана

$$S = k \ln W.$$

Ентропія визначається логарифмом числа мікростанів, за допомогою яких може бути реалізований цей макростан (k – const Больцмана).

Відповідно до формули Больцмана, ентропія – міра неупорядкованості системи: що більше число мікростанів, реалізують цей макростан, то більше вписувалося ентропія. У найбільш ймовірному стані системи (у стані рівноваги) число мікростанів максимальне, при цьому максимальна ентропія.

Усі процеси у замкнутій системі ведуть до збільшення її ентропії (всі реальні процеси необоротні). Статистичне тлумачення ентропії – у замкнутій системі процеси йдуть у бік збільшення числа мікростанів: від менш ймовірних станів до більш ймовірних, до того часу, поки ймовірність станів стане максимальною.

Отже, з нерівності Клаузіуса $\Delta S \geq 0$ та формули Больцмана $S = k \ln W$ слідує **принцип зростання ентропії**: ентропія та термодинамічна ймовірність станів замкнутої системи можуть або зростати (у разі незворотних процесів), або залишатися постійними (у разі оборотних процесів).

Необхідність введення другого початку термодинаміки пов'язана з тим, що перший початок термодинаміки, виражаючи закон збереження та

перетворення енергії, не дає змоги встановити напрямок перебігу процесів. Крім того, можна уявити безліч процесів, що не суперечать першому початку, але нездійсненних на практиці. Другий початок термодинаміки встановлює напрямок протікання термодинамічних процесів: він відповідає питанням: які процеси у природі можливі, які ні.

Основне формулювання **другого початку термодинаміки** можна представити як **закон зростання ентропії** при незворотних процесах: будь-який процес у замкнутій системі відбувається так, що ентропія системи при цьому не зменшується. У формулі $\Delta S \geq 0$ знак нерівності відноситься до незворотних процесів, а рівності – до оборотних.

Існують формулювання другого початку термодинаміки, які безпосередньо впливають із основного формулювання.

Формулювання другого початку термодинаміки за Кельвіном: неможливий круговий процес, єдиним результатом якого є перетворення теплоти, отриманої від нагрівача, на еквівалентну їй роботу. Другий початок термодинаміки накладає заборону на існування вічного двигуна другого роду, що здійснює роботу з допомогою джерела теплоти.

Формулювання другого початку термодинаміки за Клаузіусом: неможливий круговий процес, єдиним результатом якого є передача теплоти від менш нагрітого тіла до нагрітого. Це формулювання відображає досвідчений факт, зведений до рангу закону. Неможливе виконання рівності, що випливає з першого початку термодинаміки: $Q = A$ (завжди є втрати тепла).

Питання до лекції

- 1 Опишіть принцип роботи теплової машини. Запишіть формулу для її ККД.
- 2 Цикл Карно – опишіть та наведіть відповідний графік. Запишіть формулу для ККД циклу Карно.
- 3 Опишіть тепловий двигун і наведіть формулу для його ККД.
- 4 Опишіть холодильну установку. Напишіть формулу для її ККД.
- 5 Що таке ентропія? Сформулюйте закон зростання ентропії.
- 6 Сформулюйте другий початок термодинаміки за Кельвіном.
- 7 Сформулюйте другий початок термодинаміки за Клаузіусом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 ДСТУ ISO 80000-1:2016 (ISO 80000-1:2009; ISO 80000-1:2009/Cor.1:2011, IDT) Величини та одиниці. Частина 1. Загальні положення. [Чинний від 2018.01.01]. Вид. офіц. Київ : ДП «УкрНДНЦ», 2017. 35 с.
- 2 Котвицький А. Т., Котвицька К. А. Механіка : конспект лекцій. Харків: УкрДУЗТ, 2018. Ч.1. С. 62.
- 3 Попов А. В., Вовк Р. В. Лекції з загальної фізики «Механіка, молекулярна фізика і термодинаміка». Харків : УкрДАЗТ, 2011. 223 с.
- 4 Пойда В. П. Загальна фізика: «Механіка»: конспект лекцій. Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2011. 280 с.
- 5 Загальний курс фізики. Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик; за ред. І. М. Кучерука. Київ: «Техніка», 1999. 536 с.
- 6 Лисенко О. В. Фізика : конспект лекцій. Суми : Вид-во СумДУ, 2017. Ч. 1. 174 с.
- 7 Зачек І. Р., Романишин Б. М., Габа В. М., Гончар Ф. М. Курс фізики: навч. підруч. Львів: Бескид-Біт, 2002. 376 с.
- 8 Волков О. Ф., Лумпієва Т. П. Курс фізики: У 2-х т. Т. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електростатика. Постійний струм. Електромагнетизм : навч. посіб. для студ. інж.- техн. спеціальн. ВНЗ : ДонНТУ, 2009. 224 с.
- 9 Котвицький А. Т., Гресь В. Ю., Котвицька К. А. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електростатика і постійний струм: метод. вказівки до контрольних робіт з фізики № 1, 2. Харків : УкрДУЗТ, 2017. 88 с.

10 Котвицький А. Т., Котвицька К. А. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка : метод. вказівки до практ. занять з фізики. Харків: УкрДУЗТ, 2018. 81 с.

11 Руда Л. М. Лабораторний практикум з фізики : механіка та молекулярна фізика. Харків : УкрДУЗТ, 2018. 54 с.

12 Задачі з фізики / А. В. Попов, Р. В. Вовк, Н. В. Глейзер, В. Ю. Гресь, М. Г. Ревякіна. Харків : УкрДАЗТ, 2009. 108 с.

13 Перший закон термодінаміки. URL:
<https://vseosvita.ua/library/embed/01003ytd-c1b2.doc.html>.

ДОДАТОК А

Основні фізичні постійні

Фізична постійна	Загальне позначення	Значення величини
Прискорення вільного падіння	g	9,81 м/с ²
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /кг·с ²
Постійна Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Швидкість світла у вакуумі	c	$3 \cdot 10^8$ м/с
Універсальна газова стала	R	8,31 Дж/моль·К
Об'єм 1 моля газу при нормальних умовах	V_0	0,0224 м ³ /моль
Постійна Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Постійна закону зміщення Віна	b	$2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постійна другого закону Віна	γ	$\gamma = 1,29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м ³ ·К ⁵)
Одиниця енергії – електрон-вольт	1 eV	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Комптонівська довжина хвилі	λ_k	2,426 пм

ДОДАТОК Б

Множники і префікси для утворення десяткових кратних і часткових одиниць та їх назви

Множник	Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення
піко	п	10^{-12}	тера	т	10^{12}
нано	н	10^{-9}	гіга	Г	10^9
мікро	мк	10^{-6}	мега	М	10^6
мілі	м	10^{-3}	кіло	к	10^3
санті	с	10^{-2}	гекто	г	10^2
деци	д	10^{-1}	дека	да	10^1

ДОДАТОК В

Густина деяких газів за нормальних умов

Газ	Густина ρ , кг/м ³	Газ	Густина ρ , кг/м ³
Азот	1,25	Кисень	1,43
Гелій	0,18	Водень	0,09
Аргон	1,78	Повітря	1,2

ДОДАТОК Г

Густина деяких рідин (при 15 °С)

Рідина	Густина $\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м ³	Рідина	Густина $\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м ³
Вода чиста	1,00	Гліцерин	1,26
Вода морська	1,03	Спирт	0,80
Масло оливкове	0,96	Ефір	0,70
Бензин	0,80	Ртуть	13,6
Сірководень	1,26	Керосин	0,80

ДОДАТОК Д

Густини деяких твердих тіл ($P = 1,01 \cdot 10^5$ Па; $T = 273$ К)

Тверде тіло	Густина $\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м ³	Тверде тіло	Густина $\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м ³
Алюміній	2,7	Тантал	16,6
Молібден	10,2	Кобальт	8,9
Барій	3,50	Титан	4,54
Нікель	8,5	Константан	8,9
Ванадій	6,02	Уран	18,7
Ніхром	8,4	Лід	0,92
Вісмут	9,80	Фарфор	2,3
Олово	7,98	Літій	0,53
Вольфрам	19,30	Хром	7,19
Платина	21,4	Латунь	8,55
Залізо (сталь)	7,87	Марганець	7,4
Свинець	11,34	Мідь	8,96
Золото	19,3	Цезій	1,87
Срібло	10,5	Цинк	7,13

ДОДАТОК Е

Ефективний діаметр молекул, динамічна в'язкість і теплопровідність газів за нормальних умов

Речовина	Ефективний діаметр молекул d , нм	Динамічна в'язкість η , мкПа·с	Теплопровідність σ , мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водень	0,28	8,66	168
Повітря	0,27	17,2	24,1
Гелій	0,22	18,9	142
Кисень	0,36	19,8	24,4
Пара води	0,30	8,32	15,8

ДОДАТОК Ж

Динамічна в'язкість деяких рідин

Речовина	Коефіцієнт динамічної в'язкості при 20 °С η , мПа·с
Вода	1,00
Гліцерин	1480
Масло касторове	987
Масло машинне	100
Ртуть	1,58

ДОДАТОК К

Поверхневий натяг деяких рідин

Рідина	Коефіцієнт поверхневого натягу при 20 °С, σ , мН/м	Рідина	Коефіцієнт поверхневого натягу при 20 °С, σ , мН/м
Бензол	30	Мильна вода	40
Гліцерин	62	Ртуть	$5,0 \cdot 10^2$
Гас	30	Спирт	22

ДОДАТОК Л

Теплові властивості деяких матеріалів

Речовина	Температура плавлення, t , °С	Питома теплоємність c , Дж/(кг·К)	Питома теплота плавлення, λ , кДж/кг
Алюміній	659	896	322
Залізо	1530	500	272
Лід	0	2100	335
Мідь	1100	395	176
Олово	232	230	58,6
Платина	1770	117	113
Свинець	327	126	22,6
Срібло	960	234	88
Сталь	1300	460	84
Цинк	420	391	117

ОСНОВИ ФІЗИКИ

Конспект лекцій

Частина 1

МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Відповідальний за випуск Котвицька К. А.

Підписано до друку 13.03.2024 р.

Умовн. друк. арк. 8,25. Тираж . Замовлення № .

Видавець та виготовлювач Український державний університет
залізничного транспорту,

61050, Харків-50, майдан Фейєрбаха,7.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6100 від 21.03.2018 р.