ARTICLE

DOI 10.36074/grail-of-science.25.06.2021.035

АНАЛІЗ СКЛАДОВИХ ЧЛЕНІВ ДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ У ЗАДАЧІ ПРО ДИФРАКЦІЮ ПЛОСКОГО МОНОХРОМАТИЧНОГО КОЛИВАННЯ УДВОВИМІРНОМУ НЕОБМЕЖЕНОМУ ДВОШАРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ З МЕТАМАТЕРІАЛОМ

Казанко Олександр Віталійович
асистент кафедри Обчислювальної техніки та систем управління
Український державний університет залізничного транспорту, Україна

Пєнкіна Ольга Євгенівна
ст. викладач кафедри Обчислювальної техніки та систем управління
Український державний університет залізничного транспорту, Україна

Анотація. *У роботі розглядається двовимірна необмежена двошарова структура, для якої записується хвильове рівняння (що розв’язується методом розділення змінних). від цього хвильового рівняння виконується перехід до спектральної задачі Штурма-Ліувілля й, врешті, робиться вихід на дисперсійне рівняння. У роботі здійснюються спроби подивитися під іншим кутом на деякі властивості розв’язків (власних функцій) спектральної задачі як залежностей спектрального параметру. Зокрема, були побудовані модельні приклади в котрих записуються лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку для власних функції (як функції аргументом якої є спектрального параметр).*

Ключові слова: *Дифракція, хвильове рівняння, розділення змінних, задача Штурма-Ліувілля, дисперсійне рівняння, двошарове середовище, однорідне й ізотропне середовище, електромагнітна хвиля.*

Уведення. Дифракція є характерним фізичним явищем, яким супроводжується будь-який коливальний процес у просторі та виявляється в зміні форми хвилі при розповсюджені. Особливий інтерес дифракційні задачі получили у зв’язку із різноманітними науково-технічними застосуваннями електромагнітного випромінювання [1-2]. У своєї більшості розв’язки дифракційних задач використовується в галузі технологій управління формою електромагнітних хвиль – хвилеводи, напівпровідникові системи, резонатори, фільтри, антени тощо. До того ж потреба у подальшому розвитку апарату кількісного розуміння електродинамічних явищ продиктована також природнім науково-технічним прогресом у таких галузях як, наприклад, удосконалення існуючих матеріалів, розвиток нанотехнології, впровадження штучних матеріалів, виготовлення нових метаматеріалів. Зокрема, такі тенденції залишають актуальними й розв'язання дифракційних задач [1-5].

Умови дифракційної задачі. У роботі розглядається двовимірна необмежена двошарова структура з метаматеріалом, яка також вважається періодичною з періодом l. Шари даної дифракційної структури перемежаються та мають наступні матеріальні параметри ε_j, μ_j – магнітна, діелектрична проникності та $n_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$ – коефіцієнт заломлення, відповідно, першого й другого шарів ($j = 1, 2$). Тепер уведемо коефіцієнт заломлення середовища, що розглядається, у вигляді кусково-сталої функції:

$$\boldsymbol{n}(z) = \begin{cases} n_1, & z \in \mathrm{I}\ \textit{шар} \\ n_2, & z \in \mathrm{II}\ \textit{шар} \end{cases},$$

Та аналогічно, уводимо магнітну проникність

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z \in \mathrm{I}\ \textit{шар} \\ \mu_2, & z \in \mathrm{II}\ \textit{шар} \end{cases}.$$

де $z \in (-\infty, +\infty)$ *– незалежна просторові змінні. Рівняння плоского монохроматичного коливання для двовимірного необмеженого двошарового середовища має наступний вигляд (модифіковане рівняння Гельмгольца):*

$$\Delta_\mu u + k^2 \boldsymbol{n}^2 u = 0, \qquad (1)$$

де $u = u(z, y)$ *– шукана функція,* z, $y \in (-\infty, +\infty)$ *– незалежні просторові змінні,* $\Delta_\mu = \mu \nabla \frac{1}{\mu} \nabla$ *– модифікований оператор Лапласа,* ∇ *– оператор Гамільтона,* $k = \frac{\omega}{c}$ *– хвильове число,* ω *– циклічна частота монохроматичного коливання,* c *– швидкість світла у порожнечі [6].* Нехай у середовищі розповсюджується ТЕ-хвилі. Введення декартової прямокутної системи координат та застосування методу розділення змінних приводить до наступної задачі Штурма-Ліувілля:

$$\left(\frac{1}{\mu} \dot{Z}\right)^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu} Z = 0, \quad z \in (-\infty, +\infty), \qquad (2)$$

де $Z = Z(z)$ *– шукана власна функція,* $\varsigma_\beta^2 = \sqrt{k^2 \boldsymbol{n}^2 + \beta^2}$, β *– спектральний параметр. Задача полягає у побудові такої повної ортогональної системи функцій* $\{Z_n\}_n$ *кожний елемент якої задовольняє лінійному диференціальному рівнянні 2-го порядку.* Як й передбачає методика розділення змінних, рівняння (1) зводиться до задачі Штурма-Ліувілля – спектральної задачі для лінійного диференціального оператору 2-го порядку (вид фазового функціонального простору визначається, як правило, вихідним хвильовим рівняння та диференціальними якостями шуканих розв'язків). Іншою мовою, при застосуванні методу розділення змінних постає потреба вписуватись в умови розв'язності задачі Штурма-Ліувілля.

З іншого боку, прагнення отримати розв'язок на необмеженому інтервалі також привносить деяку проблематику. У протиставлення диференціальним рівнянням, які розв'язуються на обмеженому проміжку, у рівнянні (2) є декотра специфіка. Справа у тому, що у випадку з обмеженим проміжком дослідник знаходиться у більш вигідному становищі, оскільки певною мірою може знехтувати диференціальними якостями шуканого розв'язку при виході на границю, чого, звісно, неможливо зробити коли йдеться про розв'язання диференціального рівняння на необмеженому інтервалі $(-\infty,+\infty)$. Проте, для рівнянь с періодичними коефіцієнтними (рівнянь Хіла) справедлива теорема Флоке [7-8]. Використання цієї теореми дозволяє отриманий на обмеженому проміжку розв'язок, врешті, інтерпретувати як розв'язок на необмеженому інтервалі $(-\infty,+\infty)$.

Стосовно спектрального диференціального рівняння, що розглядається у роботі, теорема Флоке означає неодмінне існування розв'язку на інтервалі $(-\infty,+\infty)$, що задовольняє умові $\Lambda Z_\beta(z-l) = Z_\beta(z)$ (Λ_β – множник Флоке, l – період, β – спектральний параметр) [7-9]. Справедливість цього положення може бути підтверджена наступними викладами. По-перше, простір розв'язків будь-якого лінійного диференціального рівняння 2-го порядку є двовимірним лінійним простором [10]. Позначмо цей простір розв'язків через U_0. На просторі U_0 задамо оператор T, що увідповіднює функції $Z(z) \in \mathrm{U}_0$ функцію $Z(z-l)$: $\mathrm{T}Z(z) = Z(z-l)$. Такий оператор T є лінійним автоморфізмом простору U_0 (тобто $\mathrm{T}Z(z) = Z(z-l) \in \mathrm{U}_0$) – це по-друге. По-третє, лінійному оператору, що діє у (точніше кінцевовимірному) двовимірному просторі, однозначно відповідає квадратна матриця розміром 2×2. Й, наостанок, залишається розглянути спектральну задачу для квадратної матриці, яка задає лінійний оператор T: $\mathrm{T}Z(z) = \Lambda Z$ (тут Λ – спектральний параметр). Як відомо, квадратна матриця розміром 2×2 має два власних числа Λ_1, Λ_2. Ці власні числа оператору T називають множниками Флоке. Отже, стає зрозумілим, що будь-яке лінійне диференціальне рівняння з періодичними коефіцієнтами (рівняння Хіла), в загалі кажучи, має два розв'язки, що задовольняють умові $\Lambda_{1,2} Z_\beta(z-l) = Z(z)$, $z \in (-\infty,+\infty)$ [8].

Хоча теорема Флоке передрікає неодмінне існування розв'язку, що задовольняє умові $\Lambda_{1,2} Z(z-l) = Z(z)$, $z \in (-\infty,+\infty)$, проте, не для будь-якого спектрального параметру β відповідний множник Флоке Λ_β є підходящим. Як зазначалось вище, обмеження накладаються й ще умовами розв'язності задачі Штурма-Ліувілля.

Т. ч., необхідність вписуватись в умови розв'язності задачі Штурма-Ліувілля та застосовувати теорему Флоке з подальшим знаходженням (точніше, підходящих) множників Флоке приводить до виникнення так званого дисперсійного рівняння – рівняння, що, фактично, пов'язує параметри вихідної дифракційної задачі з умовами розв'язності задачі Штурма-Ліувілля. Ця обставина, в свою чергу, зумовлює дослідницький інтерес до складових членів даного дисперсійного рівняння, зокрема, з'являється й прагнення розуміти поведінку функції-розв'язку спектрального диференціального рівняння у задачі Штурма-Ліувілля як функції спектрального параметру.

Побудові дисперсійного рівняння, для плоского монохроматичного коливання, що розповсюджується у двовимірних необмежених двошарових середовищах присвячено чимало робіт – [1-2, 7-9]. Зазначимо, що дисперсійне рівняння може бути записано виходячи із наступних міркувань. Нехай Z_1, Z_2 – базисні (фундаментальні) розв'язки рівняння (2), та нехай $z_0 \in (-\infty, +\infty)$ – деяка точка. Подієმо оператором T на перший фундаментальний розв'язок Z_1 (щоб знайти матрицю лінійного оператору досить зрозуміти дію цього оператору на базисні елементи, тобто на фундаментальні розв'язки):

$$\mathrm{T}Z_1\big|_{z=z_0} = Z_1(z_0 - l) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}\dot{Z}_1\big|_{z=z_0} = \dot{Z}_1(z_0 - l) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, отримаємо співвідношення для 2-го базисного розв'язку Z_2:

$$\mathrm{T}Z_2\big|_{z=z_0} = Z_2(z_0 - l) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}\dot{Z}_2\big|_{z=z_0} = \dot{Z}_2(z_0 - l) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто маємо чотири невідомих елементи матриці a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} та чотири рівняння. Тож, елементи матриці оператору T виражаються через значення фундаментальних розв'язків Z_1, Z_2 у точках $z_0 - l$, z_0. Цінність цього підходу, зокрема, полягає у тому, що функції Z_1, Z_2 можуть бути відомі лише на періоді $[z_0 - l, z_0]$. Знов ж таки уходимо від необхідності шукати фундаментальні розв'язки на всій числовій вісі $(-\infty, +\infty)$. Знайшовши елементи матриці оператору T відносно базисних функцій Z_1, Z_2 переходимо до розв'язання спектральної задачі – задачі на власні числа та власні функції для оператору T:

$$\mathrm{T}Z = \Lambda Z, \quad Z \in \mathrm{U}_0,$$

Λ – спектральний параметр, U_0 – простір розв'язків. Для заходження власних чисел Λ_1, Λ_2 матриці оператору T розв'язується квадратне рівняння $|\mathrm{T}Z - \Lambda Z| = 0$ ($|\mathrm{T}Z - \Lambda Z|$ – визначник матриці $\mathrm{T}Z - \Lambda Z$). Виявляється, що точка $z_0 \in (\infty, +\infty)$, система координат, система лінійно незалежних розв'язків Z_1, Z_2 [9] можуть бути підібрані саме таким чином, щоб задовольнити умовам розв'язності задачі Штурма-Ліувілля. У роботі/ учб. посібниках [7-9, 11] множники Флоке Λ_1, Λ_2 знаходяться з урахуванням того, що точка z_0 поєднується з початком координат а система лінійно незалежних (фундаментальних) розв'язків Z_1, Z_2 є нормальною системою та мають вигляд $\Lambda_{1,2} = e^{\pm i\mathrm{K}l}$ (K – блохівське хвильове число). У такому підході отримані множники Флоке виходять саме такими, які дають симетричність диференціальному оператору на періоді $[z_0 - l, z_0]$. Симетричність диференціального оператору, у свою чергу, є складовою умовою розв'язності задачі Штурма-Ліувілля [9].

У роботах [6, 12] було записано лінійне диференціальне рівняння простору розв'язків якого належить похідна від розв'язку спектрального диференціального рівняння у задачі Штурма-Ліувілля за спектральним параметром. Зокрема, у роботі [12] зверталось увагу, що для 2-ої похідної від цього ж розв'язку меже бути записано диференціальне рівняння, подібне до рівняння, яке відповідає 1-ої похідної. А саме, для 1-ої похідної за спектральним параметром β маємо наступне диференціальне рівняння [6, 12]:

$$(\frac{1}{\mu}\varphi)^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\varphi = -2\beta\frac{1}{\mu}Z \quad , \qquad (3)$$

де $\varphi = Z'$, $\varsigma_\beta^2 = \sqrt{k^2\mathbf{n}^2 + \beta^2}$. Та, аналогічно, маємо рівняння для 2-ої похідної (за *параметром* β*):*

$$(\frac{1}{\mu}\psi)^{\cdot} + \frac{\varsigma_\beta^2}{\mu}\psi = -2\frac{1}{\mu}Z - 4\beta\frac{1}{\mu}Z' \quad , \qquad (4)$$

де $\psi = Z''$. Цікавим, на думку авторів, є той факт, що розв'язок (точніше, частковий розв'язок) згаданих неоднорідних диференціальних рівнянь може представлятися у вигляді як [6, 12]

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}\dot{\xi}Z + \xi\dot{Z} \, ,$$

де функція ξ *знаходиться за принципом невизначених коефіцієнтів,* Z *– розв'язок спектрального рівняння.* Іншою мовою, виникають підстави вважати, що у випадку двовимірного необмеженого двошарового середовища похідні Z', Z'' лінійно виражається через функції Z, $\dot{Z}$. Ця обставина, у свою чергу, наводить на думку про існування можливості отримати лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку для функції Z – як функції аргументу β. Й хоча побудовані у роботі модельні приклади свідчать на користь цієї можливості, втім, варто зазначити, що деякі питання, тим не менш, залишаються відкритими. Наприклад, чи залежність між двома розв'язками однорідного рівняння впливає на можливість отримати зазначене диференціальне рівняння у більш загальних випадках?

Щоб проілюструвати головну думку роботи, нижче розглянуто два модельних приклади зі зробленими для наочності спрощеннями у спектральному диференціальному рівнянні задачі Штурма-Ліувілля. А саме, нехай спектральне рівняння у задачі Штурма-Ліувілля має наступний вигляд

$$\ddot{Z} + \beta^2 Z = 0 \, , \qquad (5)$$

де Z *– шукана функція,* β *– спектральний параметр.*

Модельний приклад 1. Візьмемо одновимірну модель однорідного та ізотропного середовища. Нехай $Z(z) = \sin\beta z$ – хвиля, що розповсюджується усередині цього середовища ($z \in (-\infty, +\infty)$ – незалежна просторова змінна). Для 1-ої похідної Z' маємо наступне неоднорідне рівняння:

$$\ddot{\varphi} + \beta^2\varphi = -2\beta Z \, , \qquad (6)$$

де $\varphi = Z'$*. Тож, маємо похідну* $Z' = z\cos\beta z$*, яка задовольняє рівнянню (6) – з одного боку, а з іншого боку, представляється у вигляді* $Z' = \frac{1}{\beta}z\dot{Z}$*, тобто лінійно виражається через функції* Z*,* $\dot{Z}$*. Відповідно, для 2-ої похідної* $Z'' = -z^2\sin\beta z = -z^2 Z$ *маємо неоднорідне рівняння*

$$\ddot{\psi} + \beta^2\psi = -2Z - 4\beta Z' \, ,$$

де $\psi = Z''$*, або,*

$$\ddot{\psi}+\beta^2\psi=-2Z-4\beta z\frac{1}{\beta}\dot{Z} \quad \Leftrightarrow \ddot{\psi}+\beta^2\psi=-2Z-4z\dot{Z}. \tag{7}$$

Неважко зрозуміти, що $\psi_0 = -z^2 Z$ є розв'язком цього неоднорідного рівняння (переконуємося безпосередньою підстановкою). Отже, отримуємо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції Z як функції аргументу β:

$$Z''+z^2 Z=0. \tag{8}$$

Незалежна просторова зміна z й спектральний параметр β, як видно, входять до функції розв'язку Z інварінтно. Ця інваріантність, мабуть, виявилася у формі кінцевого рівняння для функції Z як функція аргументу β.

Модельний приклад 2. модель середовища візьмемо таку ж як й 1-му модельному прикладі. Нехай $Z = \beta\cos\beta z$, – хвиля, що розповсюджується усередині цього середовища ($z \in(-\infty,+\infty)$ – незалежна просторова змінна). Функція Z є розв'язком спрощеного спектрального диференціального рівняння (5). Знову, для 1-ої похідної $Z' = \cos\beta z-\beta z\sin\beta z$ маємо рівняння

$$\ddot{\varphi}+\beta^2\varphi=-2\beta Z,$$

де $\varphi = Z'$*, і знову, стає видно, що* Z' *лінійно виражається через функції* Z*,* $\dot{Z}$ *–* $Z'_\beta=Z+\frac{1}{\beta}z\dot{Z}$*. Далі, для 2-ої похідної* $=\beta\cos Z'' = 0-2*1\cdot z\sin\beta z-z^2\beta\cos\beta z$ $=-2\frac{1}{\beta^2}\cdot z\underbrace{\beta^2\sin\beta z}_{-\dot{z}}-z^2 Z = 2\frac{1}{\beta^2}z\dot{Z}-z^2 Z$ *маємо рівняння*

$$\ddot{\psi}+\beta^2\psi=-2Z-4\beta Z',$$

де $\psi = Z''$*, або,*

$$\ddot{\psi}+\beta^2\psi=-2Z-4\beta(Z+z\frac{1}{\beta}\dot{Z}).$$

Перегруповуючи доданки у правій частини останнього перетворення, матимемо

$$\ddot{\psi}+\beta^2\psi=-2(1+2\beta)Z-4z\dot{Z}.$$

Далі, розв'язок цього рівняння будемо відшукувати у вигляді $\psi_0=\eta Z+\chi\dot{Z}$ (роблячи підстановку приходимо до рівнянь $\ddot{\chi}+2\dot{\eta}=-4z$, $\ddot{\eta}-2\beta^2\dot{\chi} = -2(1+2\beta)$):

$$\ddot{\chi}+2\dot{\eta}=-4z,\quad \dot{\eta}=-2z-\frac{1}{2}\ddot{\chi},\quad \ddot{\eta}=-(2z)^{\cdot}-\frac{1}{2}(\ddot{\chi})^{\cdot},\quad \Rightarrow -(2z)^{\cdot}-\frac{1}{2}(\ddot{\chi})^{\cdot}-2\beta^2\dot{\chi}=-2(1+2\beta),$$

$$\Rightarrow(4z+\ddot{\chi}+4\beta^2\chi)^{\cdot}=4(1+2\beta),\quad \Rightarrow\ddot{\chi}+4\beta^2\chi=4\cdot 2\beta z,\quad \Rightarrow \chi_0=4\cdot 2\beta\frac{1}{4\beta^2}z=2\frac{1}{\beta}z.$$

Також знаходимо функцію η

$$\eta=z^2-\frac{1}{2}\dot{\chi} = z^2-\frac{1}{\beta}.$$

Отже, розв'язок неоднорідного рівняння (6) має вигляд

$$Z'' = (z^2 - \frac{1}{\beta})Z + 2\frac{1}{\beta}\dot{Z}.$$

Як видно, друга похідна за спектральним параметром також лінійно представляється через функції Z, $\dot{Z}$. З урахуванням першої похідної дістаємось,

$$\frac{1}{z}Z - \frac{1}{z}Z'_\beta = \frac{1}{\beta}\dot{Z} \qquad Z'' = (z^2 - \frac{1}{\beta})Z + 2\frac{1}{z}Z - 2\frac{1}{z}Z'_\beta \qquad Z'' - 2\frac{1}{z}Z'_\beta = (z^2 + 2\frac{1}{z} - \frac{1}{\beta})Z$$

й, врешті,

$$Z'' - 2\frac{1}{\beta}(Z' - Z) + z^2 Z = 0 \quad \Leftrightarrow Z'' - 2\frac{1}{\beta}Z' + (2\frac{1}{\beta} + z^2)Z = 0 \tag{9}$$

Таким чином, отримано лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції Z як функції аргументу β.

Висновки. Як свідчать побудовані у роботі модельні приклади, 1-а й 2-га друга похідні за спектральним параметром від Z – тобто від розв'язку спектрального диференціального рівняння у задачі Штурма-Ліувілля в найпростіших випадках (для однорідного й ізотропного середовища) – лінійно виражається через Z, $\dot{Z}$. Для таких випадків були записані лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку відносно функції Z, як функції, аргументом якої є спектральний параметр – (8-9). Подальше розв'язання отриманих рівнянь дозволить, як здається, дивитися під новим кутом на властивості розв'язку спектрального рівняння у задачі Штурма-Ліувілля, що в свою, чергу урізноманітнює підходи до аналізу, як окремих членів, так й самого дисперсійного рівняння

Список використаних джерел:

[1] Ярив, А, & Юх, П. (1987) *Оптические волны в кристаллах – пер. с англ.* М.: Мир – 616с.

[2] Шестопалов, В. П., & Литвиненко, Л. Н. (1973) *Дифракция волн на решетках: монография*. Харьков: ХГУ им. М. Горького - 288 с.

[3] Кусайкин, А. П., & Мележик, П. Н., & Поединчук, А. Е. (2009) *Эффект резонансного излучения электромагнитных волн дифракционной решеткой с метоматериалом*, том 35, вып. 1.» *письма в ЖТФ*: 26-34.

[4] Liang Wu, & Sailing He, (2003) *Band structure for one-dimensional photonic crystal containg left-handed materials - Physical review B 67*: 235103:1-6.

[5] Бреховских, Л. М. (1973) *Волны в слоистых средах, 2-е издание.* Москва: Наука, – 343 с.

[6] Казанко, О., & Пєнкіна, О. (2020). Диференціювання поперечних розв'язків хвильового рівняння по подовжньому хвильовому числу в дифракційній задачі для необмеженого періодичного шаруватого середовища з метаматеріалом. *Збірник наукових праць ΛΌГОΣ*, 126-130. DOI: https://doi.org/10.36074/05.06.2020.v3.49.

[7] Eastham M. S.P.,. (1975) *The spectral theory of periodic differential equations.* Edinburg,.

[8] S. Winkler, & W. Magnus (1996) *Hill's Equation.* New York, London, Sydney: Interscience Publisher a division John Wiley & Sons.

[9] G. V. Morozov, D. & W. L. Sprung. (2011) Floquet-Bloch waves in one-dimensional photonic crystal.» *A Letters Journal Exploring Physics, EPL, 96,*: 54005:p1-p5.

[10] Виленкин, Н. Я. & Доброхотова, М. А. Сафонов, А. Н. (1984) *Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для студентов физ-мат. фак., стр. 111, теорема 1, следствие и далее по тексту.* Москва: Просвещение, 1984 – 176 с.

[11] Shmat'ko, Н. Я. & Kazanko, A. V. roc. 8th Int. Conf. *Exterordinary reflecton from photonic crystal with metamaterials.* Odessa: UWBUSIS, 2016. 160-162.

[12] Казанко, О.В. & Пєнкіна, О.Є. (2019). Диференціювання дисперсійного рівняння у дифракційній задачі для необмеженого двовимірного періодичного шаруватого середовища. *Wiadomości o postępie naukowym i rzeczywistych badaniach naukowych współczesności: kolekcja prac naukowych «ΛΌГОΣ» z materiałami międzynar. nauk.-prakt. konf.* (Tom. 4, ss. 36-42). 17 czerwca 2019, Krakow: OP «Europejska platforma naukowa».

