УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра механіки і проектування машин

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи

з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА».

(розділ «Кінематика»)

для студентів заочної форми навчання

Харків 2016

Методичні вказівки розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри механіки і проектування машин 26 жовтня 2016 р., протокол № 5 .

Подано варіанти завдань і методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни «Теоретична механіка» (розділ «Кінематика»).

Призначено для заочної форми навчання.

Укладачі:

доценти Н.А. Аксьонова,
О.В. Оробінський,
О.В. Надтока

Рецензент

проф. О.В. Братченко

ЗМІСТ

ВСТУП

Під час підготовки спеціалістів для залізничного транспорту навчальними планами передбачено вивчення студентами механічного, будівельного та АТЗ факультетів на I, II і III курсах дисципліни “Теоретична механіка”. При формуванні теоретичної бази з цієї дисципліни провідна роль належить лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів “Статика”, “Кінематика”, “Динаміка”. У ході вивчення курсу теоретичної механіки важливим аспектом є проведення практичних занять, виконання індивідуальних завдань та контрольних робіт.

Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу даних методичних вказівок.

1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Програмою дисципліни „Теоретична механіка” передбачено виконання контрольних робіт з розділу „Кінематика”.

Зміст контрольних робіт, а саме номери завдань до кожної з них, уточнюється викладачем під час настановних занять.

Кожна задача супроводжується десятьма рисунками і таблицею (з тим самим номером, що і задача), яка містить додатково до тексту задачі вихідні дані з десяти варіантів (від 0 до 9), номери яких наведені у першому стовпчику таблиці.

В усіх задачах студент обирає номер рисунка згідно з передостанньою цифрою шифру залікової книжки, а номер варіанта – згідно з останньою цифрою: наприклад, якщо шифр закінчується числом 38, то рисунок задачі має бути за номером 3, а вихідні дані з таблиці в рядку з номером 8. Контрольні роботи виконуються на аркушах формату А4. Оформлення титульної сторінки контрольного завдання здійснюється відповідно до встановлених вимог, а саме на ній обов’язково вказуються назва кафедри, назва дисципліни, номер роботи, рік, шифр, прізвище та ініціали студента.

Розв’язання задач має супроводжуватись стислим текстовим поясненням (які формули або теореми застосовуються, звідки отримуються ті чи інші результати та ін.), а також детальним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Рисунки до розв’язання задач необхідно виконувати акуратно із застосуванням креслярського приладдя. На них наносять позначення всіх використовуваних величин: розміри, координатні осі, вектори сил та ін.

Слід звернути увагу на те, що розрахункова схема виконується строго згідно з вихідними даними свого варіанта задачі, і тоді в більшості випадків вона має бути простішою, ніж на загальному рисунку.

Контрольні роботи, що не відповідають усім переліченим вимогам, рецензуватися не будуть і повертатимуться для переоформлення.

2 ЗАВДАННЯ К-1

Задача К–1, а

Точка В рухається у площині *xy* (рисунки 2.1.0–2.1.9, таблиця 2.1; траєкторія точки на рисунках показана умовно). Закон руху точки заданий рівнянням: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, де x та y виражені у сантиметрах, t – у секундах.

Знайти рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 1$ *с* визначити швидкість і прискорення точки, а також її дотичне та нормальне прискорення і радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Залежність $x = f_1(t)$ вказана безпосередньо на рисунках, а залежність $y = f_2(t)$ наведена у таблиці 2.1 (для рисунків 2.1.0 – 2.1.2 – у стовпчику 2, для рисунків 2.1.3 – 2.1.6 – у стовпчику 3, для рисунків 2.1.7 – 2.1.9 – у стовпчику 4).

Задача К–1, б

Точка рухається вздовж дуги кола радіуса $R = 2$ *м* за законом $S = f(t)$, що заданий у таблиці 2.1, стовпчику 5 (S – у метрах, t – у секундах), $S = AM$ – відстань від точки *A,* яка є початком відліку координати S до рухомої точки M, виміряна вздовж дуги кола.

Визначити швидкість та прискорення точки у момент часу $t_1 = 1\ c$. Зобразити на рисунку вектори $\overline{V}$ та $\overline{a}$, вважаючи, що точка у цей момент часу перебуває у положенні *M*, а додатний напрямок відліку *S* – від *A* до *M*.

Вказівки до розв’язання завдання К-1

Завдання К-1 належить до кінематики точки та розв’язується за допомогою формул, за якими визначаються швидкість та прискорення точки у декартових координатах (координатний спосіб задання руху точки), а також формул, за якими визначаються швидкість, дотичне та нормальне прискорення точки при натуральному способі задання її руху.

У задачі всі величини треба визначити тільки для моменту часу $t_1 = 1\ c$. У деяких варіантах задачі К–1, а при визначенні траєкторії або при подальших розрахунках (для їх спрощення) треба мати на увазі відомі з тригонометрії формули

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Таблиця 2.1

Варіант	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рисунки 0 - 2	рисунки 3 - 6	рисунки 7 - 9	
1	2	3	4	5
0	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2t^2 + 2$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$
1	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$8\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$6\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$2\sin(\frac{\pi}{3}t)$
2	$-3\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	$(2 + t)^2$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$6t - 2t^2$
3	$2\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2t^3$	$10\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$-2\sin(\frac{\pi}{6}t)$
4	$3\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$2\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$-4\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$
5	$10\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2 - 3t^2$	$12\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-3\sin(\frac{\pi}{3}t)$
6	$6\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	$2\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$-3\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$3t^2 - 10t$
7	$-2\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$(t + 1)^3$	$-8\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-2\cos(\frac{\pi}{3}t)$
8	$9\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$2 - t^3$	$9\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$3\sin(\frac{\pi}{6}t)$
9	$-8\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-2\cos(\frac{\pi}{6}t)$

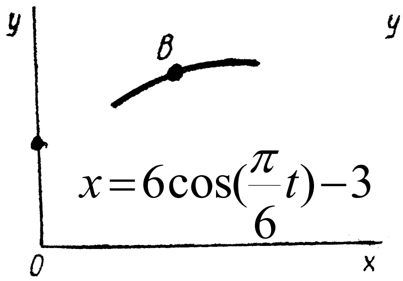

Рисунок 2.1.0

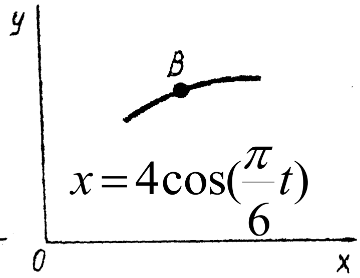

Рисунок 2.1.1

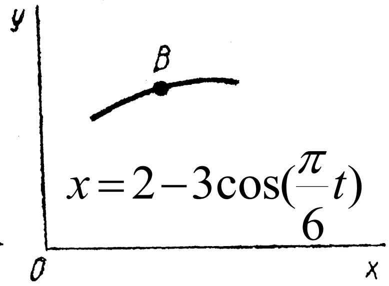

Рисунок 2.1.2

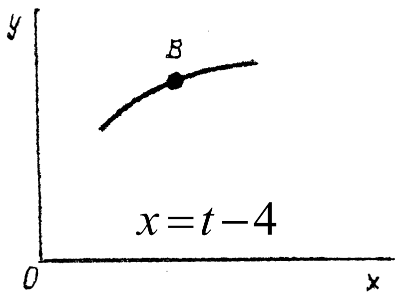

Рисунок 2.1.3

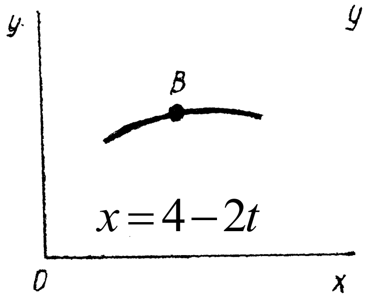

Рисунок 2.1.4

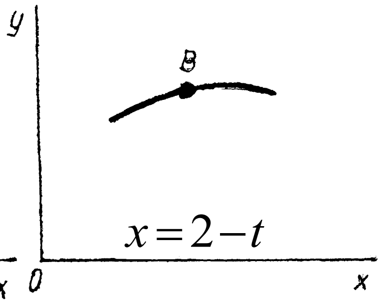

Рисунок 2.1.5

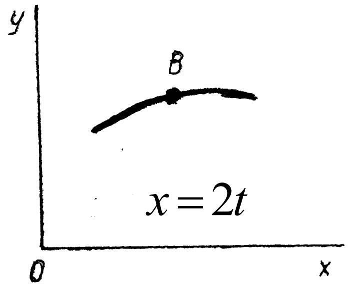

Рисунок 2.1.6

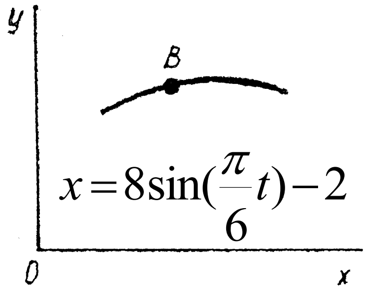

Рисунок 2.1.7

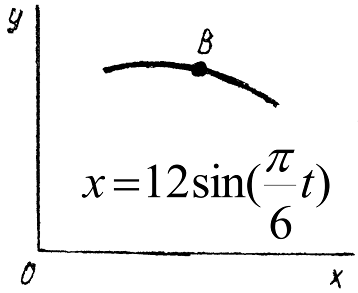

Рисунок 2.1.8

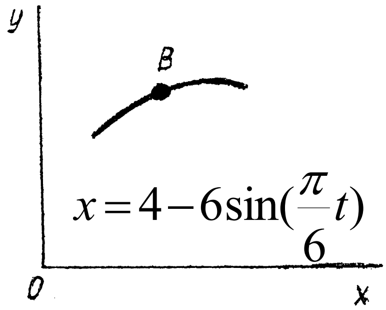

Рисунок 2.1.9

Приклад К–1, а

Дано: $x = -2cos(\frac{\pi}{4}t)+3$ *см,*

$y = 2sin(\frac{\pi}{8}t)-1$*см,* $t_1=1$ *с.*

Знайти: рівняння траєкторії точки; положення точки В для моменту часу t_1; її швидкість і прискорення, а також дотичне і нормальне прискорення; радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання.

1 Для визначення рівняння траєкторії точки виключимо із заданих рівнянь руху час *t*. Застосуємо формулу $cos2\alpha=1-2sin^2\alpha$, тобто

$$cos(\frac{\pi}{4}t)=1-2sin^2(\frac{\pi t}{8}).$$

Тоді

$$cos(\frac{\pi t}{4})=\frac{3-x}{2};\ sin(\frac{\pi t}{8})=\frac{y+1}{2},$$

отже,

$$\frac{3-x}{2}=1-2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Остаточно маємо рівняння траєкторії точки: $x = (y+1)^2+1$ – це парабола.

2 Положення точки B_1 при $t_1=1$ *с* буде:

$$x_1= -2cos(\frac{\pi}{4})+3=1{,}6 см;\quad y_1=2sin(\frac{\pi}{8})-1= -0{,}23\ см.$$

3 Швидкість точки визначимо за її проекціями на координатні осі:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}sin(\frac{\pi t}{4})\Big/_{t_1=1}=1{,}11\ ^{см}\!/_{c}\ ,$$

$$V_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{4}cos(\frac{\pi t}{8})\Big/_{t_1=1}=0{,}73\ ^{см}\!/_{c}\ .$$

Модуль швидкості $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{1{,}11^2+0{,}73^2}=1{,}33\ ^{см}\!/_{c}$.

4 Аналогічно визначимо прискорення точки:

$$a_x=\frac{dVx}{dt}=\frac{\pi^2}{8}cos(\frac{\pi t}{4})\Big/_{t_1=1}=0{,}87\ ^{см}\!/_{c^2}\ ,$$

$$a_y=\frac{dVy}{dt}=-\frac{\pi^2}{32}sin(\frac{\pi t}{8})\Big/_{t_1=1}=-0{,}12\ ^{см}\!/_{c^2}\ .$$

Модуль прискорення $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{0{,}87^2+0{,}12^2}=0{,}88\ ^{см}\!/_{c^2}$.

5 Дотичне прискорення знайдемо за формулою:

$$a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{V_x\cdot a_x+V_y\cdot a_y}{V}=\frac{1{,}11\cdot 0{,}87+0{,}73\cdot(-0{,}12)}{1{,}33}=0{,}66\ ^{см}\!/_{c^2}\ .$$

6 Нормальне прискорення точки буде:

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{0{,}88^2-0{,}66^2}=0{,}58\ ^{см}\!/_{c^2}\ .$$

7 Радіус кривизни траєкторії у точці B_1 знайдемо як:

$$\rho=\frac{V^2}{a_n}=\frac{1{,}33^2}{0{,}58}=3{,}05\ см.$$

Відповідь: $x=(y+1)^2+1$; $V=1{,}33\ ^{см}\!/_{c}$; $a=0{,}88\ ^{см}\!/_{c^2}$; $a_\tau=0{,}66\ ^{см}\!/_{c^2}$; $a_n=0{,}58$ см/с^2; $\rho=3{,}05$ см (рисунок 2.2).

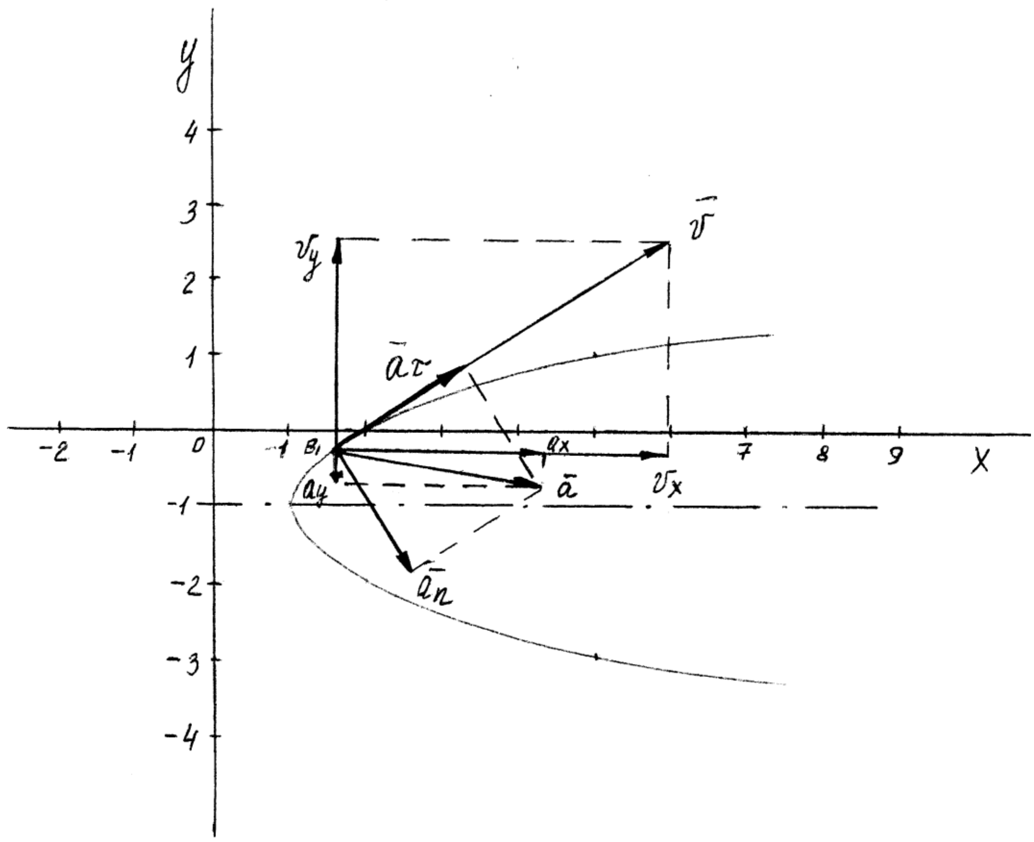

Рисунок 2.2

Приклад К–1, б

Дано: $R=2м$, $S=\overset{\smile}{AM}=2Sin(\frac{\pi . t}{4})$ *м*, $t_1=1$ *с*.

Знайти: положення точки M_1 для моменту часу t_1 ; її швидкість і прискорення.

Розв'язання.

1 Визначимо положення точки M_1:

$$S_1=\overset{\smile}{AM_1}=2sin(\frac{\pi}{4})=1{,}4\ м,$$

$$\alpha=\frac{S_1}{R}=\frac{1{,}4}{2}=0{,}7\ рад=40^o.$$

2 Знайдемо швидкість точки M_1:

$$V=\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{4}t)\Big/_{t=1}=1,11\ ^{м}\!/_{c}.$$

Оскільки $V>0$, то вектор швидкості $\overline{V}$ спрямований по дотичній до кола у бік збільшення дугової координати S.

3 Прискорення точки M_1 визначимо за його дотичною $(\overline{a}_\tau)$ та нормальною $(\overline{a}_n)$ складовими:

$$\overline{a}=\overline{a}_\tau+\overline{a}_n,\ \overline{a}_\tau\perp\overline{a}_n,$$

$$a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2S}{dt^2}=-\frac{\pi^2}{8}sin\,(\frac{\pi.t}{4})\Big/_{t=1}=-0,87\ ^{м}\!/_{c^2},$$

$$a_n=\frac{V^2}{R}=\frac{1,11^2}{2}=0,62\ ^{м}\!/_{c^2};$$

Модуль прискорення буде $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{0,87^2+0,62^2}=1,07\ ^{м}\!/_{c^2}$.

Оскільки $a_\tau<0$, то вектор $\overline{a}_\tau$ спрямований по дотичній до кола у бік зменшення дугової координати S.

Відповідь: $V=1,11$ м/с; $a_\tau=-0,87\ ^{м}\!/_{c^2}$; $a_n=0,62\ ^{м}\!/_{c^2}$; $a=1,07\ ^{м}\!/_{c^2}$.

На рисунку 2.3 зображені всі вектори $\overline{V}$, $\overline{a}_\tau$, $\overline{a}_n$, $\overline{a}$ з урахуванням знаків V та a_τ (точка M_1 рухається сповільнено).

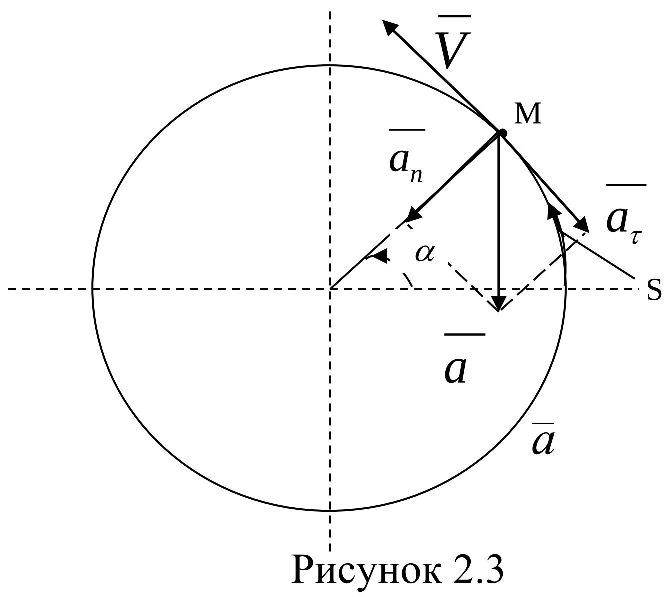

Рисунок 2.3

3 ЗАВДАННЯ К-2

Механізм складається зі ступінчастих коліс *1-3*, що знаходяться у зчепленні або зв'язані пасовою передачею, зубчастої рейки *4* та вантажу *5*, прив'язаного до кінця нитки, що намотана на одне з коліс (рисунки 3.1.0–3.1.9, таблиця 3.1). Радіуси ступенів коліс дорівнюють відповідно: у колеса *1* $r_1 = 2$ *см*, $R_1 = 4$ *см, у колеса 2* - $r_2 = 6$ *см*, $R_2 = 8$ *см, у колеса 3* - $r_3 = 12$ *см*, $R_3 = 16$ *см*. На ободах коліс розташовані точки *A, B* та *C*.

У стовпчику "Дано" таблиці 3.1 вказаний закон руху або закон зміни швидкості ведучої ланки механізму, де $\varphi_1(t)$ – закон обертання колеса *1*, $S_4(t)$ – закон руху рейки *4*, $\omega_2(t)$ – закон зміни кутової швидкості колеса *2*, $V_5(t)$ – закон зміни швидкості вантажу і так далі (скрізь φ виражене у радіанах, *s* – у сантиметрах, *t* – у секундах). Додатний напрямок для φ та ω проти ходу годинникової стрілки, для s_4, s_5 та v_4, v_5 – вниз.

Визначити у момент часу $t_1 = 2$ *с* вказані у таблиці 3.1, стовпчиках швидкість (*v*-лінійні, ω - кутові) та прискорення (*a*-лінійні, ε- кутові) відповідних точок або тіл (v_5-швидкість вантажу *5* і так далі).

Вказівки до розв'язання завдання К-2

Завдання К-2 спрямоване на дослідження обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. При розв'язанні задачі врахувати, що, коли два колеса знаходяться у зчепленні, швидкість точки зчеплення кожного колеса однакова, а якщо два колеса з'єднані пасовою передачею, то швидкості усіх точок паса і, як наслідок, точок, що розташовані на ободі кожного з цих коліс, у заданий момент часу чисельно однакові; при цьому вважається, що пас відносно ободу колеса не ковзає.

Таблиця 3.1

Варіант	Дано	Знайти	
		швидкості	прискорення
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_B v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A v_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4 ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5 ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4 ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_5 v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	v_4 ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_A ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4 ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_5 v_B	ε_2, a_A, a_4

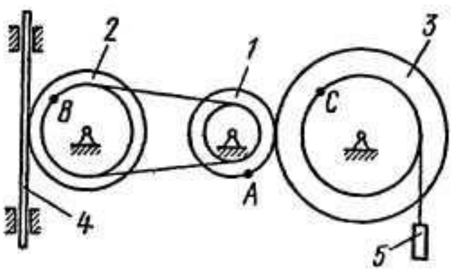

Рисунок 3.1.0

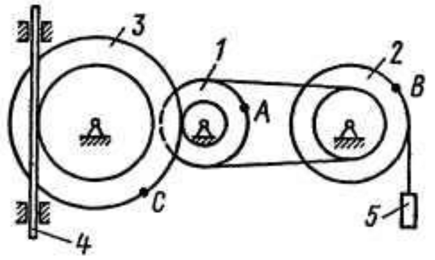

Рисунок 3.1.1

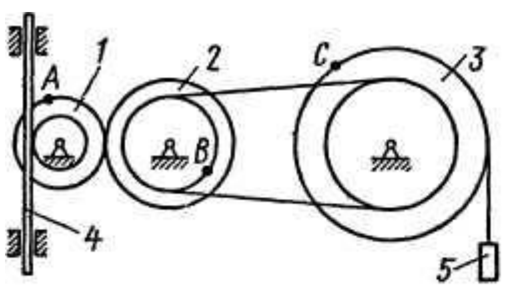

Рисунок 3.1.2

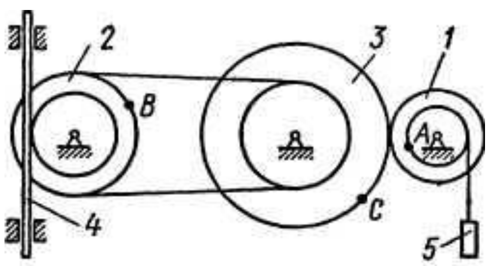

Рисунок 3.1.3

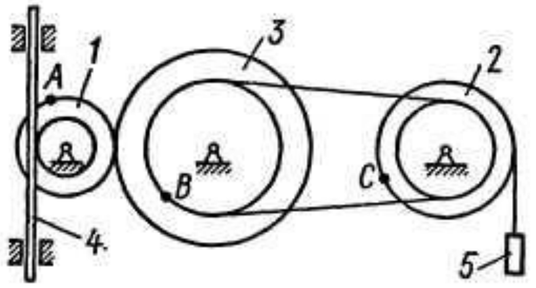

Рисунок 3.1.4

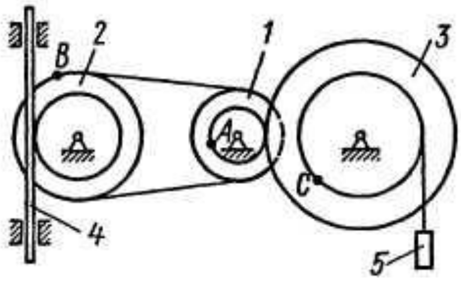

Рисунок 3.1.5

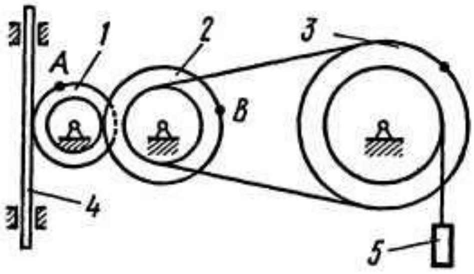

Рисунок 3.1.6

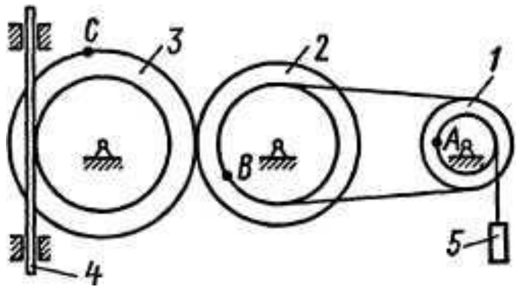

Рисунок 3.1.7

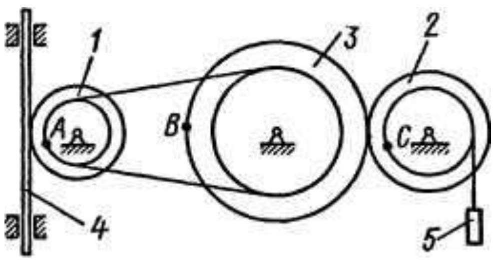

Рисунок 3.1.8

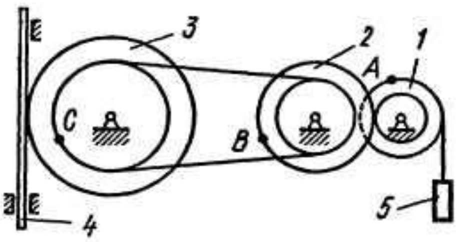

Рисунок 3.1.9

Приклад К-2

Дано: R_2 =6 *см*, r_2 =4 *см*, R_3 =8 *см*, r_3 =3 *см*, $S_1=3t^3$ *см*, t_1 =3 *с* (рисунок 3.2).

Знайти: ω_3; V_4; ε_3 a_A –?

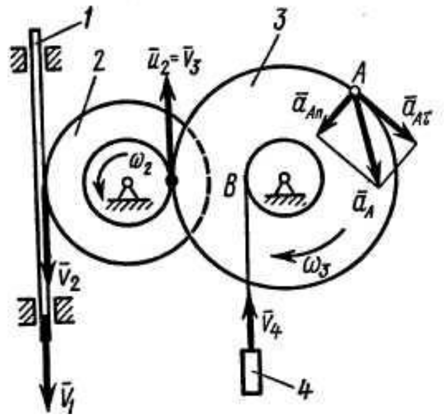

Рисунок 3.2

Розв'язання.

1 Умовимось позначати швидкості точок, які лежать на зовнішніх ободах коліс (радіусів *Ri*), *Vi*, а точок, які лежать на внутрішніх ободах (радіусів *ri*), *Ui*.

2 Визначимо кутові швидкості усіх коліс як функції часу *t*. За відомим законом руху рейки *1* знайдемо її швидкість:

$$V_1=\frac{dS_1}{dt}=9t^2\Big/_{t=3}=9\cdot 3^2=81\ \text{см}\!\!\Big/_{c}.$$

Оскільки рейка *1* і колесо *2* знаходяться у зчепленні, то $V_2=V_1$ або $\omega_2 R_2=V_1$. Але колеса *2* і *3* теж знаходяться у зчепленні, отже, $U_2=V_3$ або $\omega_2 r_2=\omega_3 R_3$. Таким чином знайдемо:

$$\omega_2=\frac{V_1}{R_2}=\frac{3}{2}t^2\Big/_{t_1=3}=\frac{3}{2}\cdot 3^2=13{,}5\ c^{-1},$$

$$\omega_3=\frac{r_2}{R_3}\,\omega_2=\frac{3\cdot t^2\cdot 4}{2\cdot 8}=\frac{3}{4}\,t^2\Big/_{t_1=3}=\frac{3}{4}\cdot 3^2=6{,}75\ c^{-1}.$$

3 Визначимо кутові прискорення усіх коліс:

$$\varepsilon_2=\frac{d\omega_2}{dt}=3t\Big/_{t=3}=9\ c^{-2};\quad \varepsilon_3=\frac{d\omega_3}{dt}=\frac{3}{2}\,t\Big/_{t=3}=4{,}5\ c^{-2}.$$

Оскільки знаки ω_2 і ε_2 однакові, то колеса обертаються прискорено.

4 Визначимо V_4. Оскільки $V_4=V_B=\omega_3\, r_3=6{,}75\cdot 3=20{,}25\ \text{см}\!\!\Big/_{c}$.

5 Визначимо a_A.

Для точки А

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n};\ \overline{a}_A^{\tau} \perp \overline{a}_A^{n};$$

де

$$a_A^{\tau} = R_3\,\varepsilon_3 = 4{,}5 \cdot 8 = 36\ \, {см}/{с^2};\ a_A^{n} = \omega_3^2 \cdot R_3 = 6{,}75^2 \cdot 8 = 364{,}5\ {см}/{с^2}.$$

Модуль прискорення

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^{n})^2} = \sqrt{36^2 + 364{,}5^2} = 366{,}3\ {см}/{с^2}.$$

Усі швидкості і прискорення точок, а також напрями кутових швидкостей показані на рисунку 3.2.

Відповідь: $\omega_3=6{,}75\ с^{-1}$; $V_4=20{,}25\ {см}/{с}$; $\varepsilon_3=4{,}5\ с^{-2}$; $a_A=366{,}3\ {см}/{с^2}$.

4 ЗАВДАННЯ К–3

Плоский механізм складається зі стержнів *1, 2, 3, 4* та повзуна *B* або *E* (рисунки 4.1.0–4.1.7) або зі стержнів *1, 2, 3* та повзунів *B* та *E* (рисунки 4.1.8–4.1.9), з’єднаних між собою та з нерухомими опорами O_1, O_2 шарнірами; точка *D* знаходиться посередині стержня *AB*. Довжина стержнів дорівнює відповідно $l_1=0{,}4$ *м*, $l_2=1{,}2$ *м*, $l_3=1{,}4$ *м*, $l_4=0{,}6$ *м*. Положення механізму визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значення цих кутів та інших заданих величин вказані у таблиці 4.1, а (для рисунків 4.1.0–4.1.4) або у таблиці 4.1, б (для рисунків 4.1.5–4.1.9); при цьому у таблицях 4.1, а та 4.1, б ω_1 і ω_4 – величини постійні.

Визначити величини, що вказані у таблицях, стовпчиках “Знайти”.

Дугові стрілки на рисунках вказують, як при побудові схеми механізму мають відкладатися кути: за ходом або проти ходу годинникової стрілки (наприклад, кут γ на рисунку 4.1.8 потрібно відкласти від *DB* за ходом годинникової стрілки, а на рисунку 4.1.9 – проти ходу годинникової стрілки і т. д.).

Побудову схеми починати зі стержня, напрямок якого визначається кутом α.

Задані кутову швидкість та кутове прискорення вважати напрямленими проти ходу годинникової стрілки, а задані швидкість $\overline{V}_B$, та прискорення $\overline{a}_B$ –від точки B до b (на рисунках 4.1.5–4.1.9).

Вказівки до розв'язання завдання К-3

Завдання К-3 – на дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла. При його розв'язанні для визначення швидкостей точок механізму та кутових швидкостей його ланок слід скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла та поняттям про миттєвий центр швидкостей, використовуючи цю теорему (або це поняття) до кожної ланки механізму окремо.

При визначенні прискорень точок механізму виходити з векторного рівняння $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau$, де А – точка, прискорення $\overline{a}_A$ якої або задано, або безпосередньо визначається за умовами задачі (якщо точка А рухається по дузі, то $\overline{a}_A = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau$); В – точка, прискорення $\overline{a}_B$ якої треба визначити. Якщо точка В рухається не прямолінійно, то напрямок $\overline{a}_B$ заздалегідь невідомий.

У цьому випадку $\overline{a}_B$ також слід зображувати двома складовими ($\overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau$), тоді векторне рівняння матиме вигляд:

$$\overline{a}_B^\tau + \overline{a}_B^n = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau.$$

При цьому вектор нормального прискорення $\overline{a}_B^n$ відомий як за напрямком (вздовж BO_2 до точки O_2), так і за модулем $a_B^n = V_B^2 / O_2B$. Вектор $\overline{a}_B^\tau$ направлений перпендикулярно BO_2 у будь-який бік. Після проектування наведеного рівняння на два будь-яких напрямки одержимо невідомі величини – a_B^τ та a_{BA}^τ. Тоді $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$.

Прискорення a_{BA}^τ необхідне для визначення ε_{AB}.

Таблиця 4.1, а (рисунки 4.1.0–4.1.4)

Варіант	Кути					Дано		Знайти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 c^{-1}	ω_4 c^{-1}	V точок	ω ланки	*a* точок	ε ланки
0	0	60	30	0	120	6	-	B,E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	-	4	A,E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	B,E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	-	5	A,E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	-	D,E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	A,E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	B,E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	-	2	A,E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	-	D,E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	-	8	A,E	DE	A	AB

Таблиця 4.1, б (рисунки 4.1.5–4.1.9)

Варіант	Кути					Дано				Знайти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 c^{-1}	ε_1 c^{-2}	V_B м/с	a_B м/с^2	V точок	ω ланки	*a* точок	ε ланки
0	120	30	30	90	150	2	4	-	-	B,E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	-	-	4	6	A,E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	-	-	B,E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A,E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B,E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D,E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	-	-	B,E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A,E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	-	-	B,E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	-	-	5	4	D,E	AB	A	AB

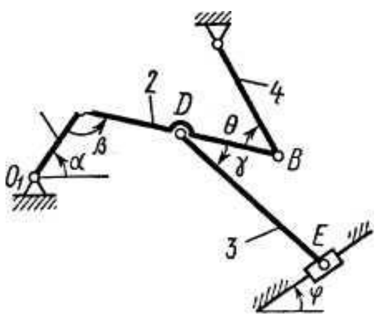

Рисунок 4.1.0

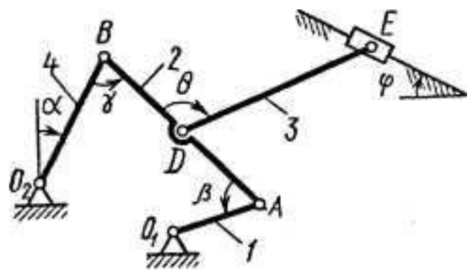

Рисунок 4.1.1

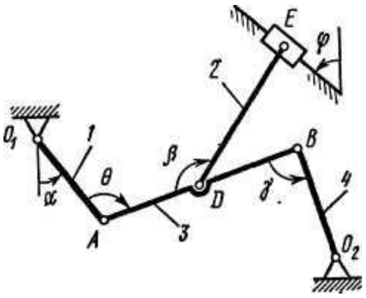

Рисунок 4.1.2

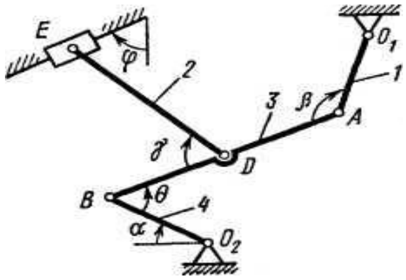

Рисунок 4.1.3

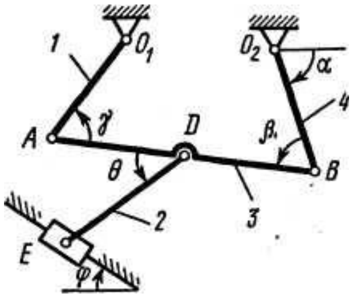

Рисунок 4.1.4

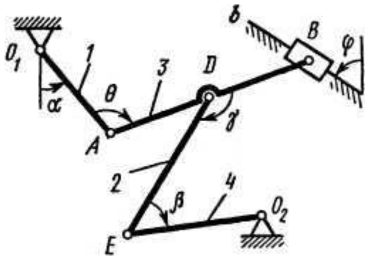

Рисунок 4.1.5

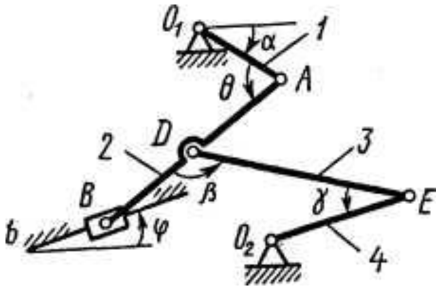

Рисунок 4.1.6

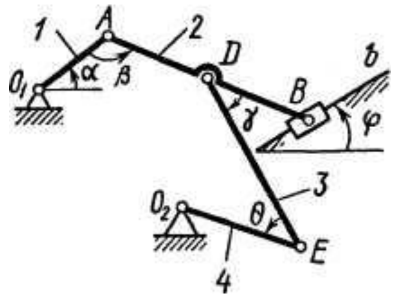

Рисунок 4.1.7

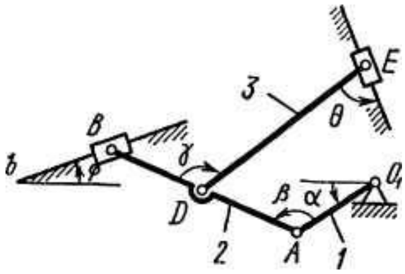

Рисунок 4.1.8

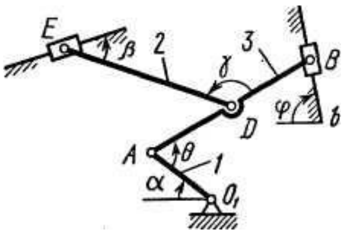

Рисунок 4.1.9

Приклад К-3

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $АД = ДВ$, $l_1 = 0{,}4$ *м*, $l_2 = 1{,}2$ *м*, $l_3 = 1{,}4$ *м*, $\omega_1 = 2c^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7\ c^{-2}$ (напрями ω_1 і ε_1 – проти ходу годинникової стрілки) (рисунок 4.2).

Знайти: V_B, V_E, ω_2, a_B, ε_3 – ?

Розв’язання.

1 Будуємо положення механізму відповідно до заданих кутів (рисунок 4.3).

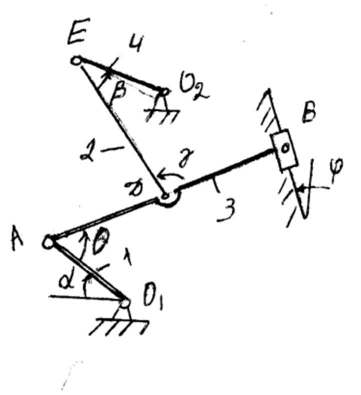

Рисунок 4.2

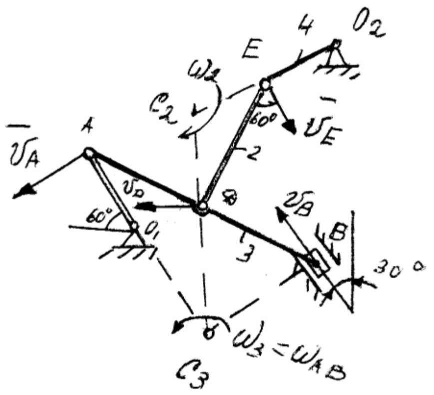

Рисунок 4.3

2 Визначаємо $\overline{V_B}$. Точка *B* належить стержню *AB*. Для визначення V_B треба знати швидкість якої-небудь іншої точки цього стержня і напрямок $\overline{V_B}$. За даними задачі, враховуючи напрями ω_1, можна знайти $\overline{V_A}$:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 2 \cdot 0.4 = 0.8 \, {}^{м}\!/\!_{c} ; \overline{V_A} \perp OA .$$

Напрямок $\overline{V_B}$ збігається з рухом повзуна *B* уздовж напрямних. Тоді, знаючи $\overline{V_A}$ і напрямок $\overline{V_B}$, застосуємо теорему про рівність проекцій швидкостей двох точок тіла (стержня *AB*) на пряму, яка з’єднує ці точки (пряма *AB*). Проекції швидкостей мають однакові знаки, тому визначимо напрямок вектора $\overline{V_B}$:

$$V_B \cos 30° = V_A \cdot \cos 60° \Rightarrow V_B = \frac{V_A \cdot \cos 60°}{\cos 30°} = \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.866} = 0.46\, {}^{м}\!/\!_{с}.$$

3 Визначаємо $\overline{V_E}$. Точка *Е* належить стержню *ДЕ*. Отже, для визначення $\overline{V_E}$ необхідно знати швидкість точки *Д*, яка належить одночасно стержню *АВ*. Для чого, знаючи $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$, будуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) стержня *АВ*; це точка C_3, яка лежить на перетині перпендикулярів до $\overline{V_A}$ і $\overline{V_B}$, встановлених з точок *А* і *В*. За напрямом вектора $\overline{V_A}$ визначаємо напрям повороту стержня *АВ* навколо МЦШ C_3. Вектор $\overline{V_Д}$ перпендикулярний відрізку $C_3Д$ і спрямований у бік повороту. Величину $V_Д$ знайдемо за формулами:

$$\omega_{AB} = \omega_3 = \frac{V_A}{AC_3} = \frac{V_B}{BC_3} = \frac{V_Д}{ДC_3} = \frac{0{,}46}{0{,}7} = 0{,}657\, c^{-1}, V_Д = \omega_{AB} \cdot ДC_3,$$

ΔAC_3B – прямокутний, $\Delta ДC_3B$ – рівнобічний, і $C_3B = C_3Д = \frac{l_3}{2} = 0{,}7$ *м.*

Тоді $V_B = V_Д = 0{,}46$ *м/с;* $\overline{V_Д} \perp C_3Д$.

Оскільки точка *Е* належить одночасно стержню O_2E, що обертається навколо O_2, то $\overline{V_E} \perp O_2E$. Тоді, встановлюючи з точок *Е* і *Д* перпендикуляри до швидкостей $\overline{V_E}$ і $\overline{V_Д}$, побудуємо МЦШ C_2 стержня *ДЕ*. За напрямком вектора $\overline{V_Д}$ визначимо напрям повороту стержня *ДЕ* навколо центра C_2. Вектор $\overline{V_E}$ спрямований у бік повороту цього стержня. З рисунка 4.3 бачимо, що $\angle C_2EД = \angle C_2ДE = 30°$, звідки $C_2E = C_2Д$. Тоді

$$\omega_2 = \frac{V_Д}{C_2Д} = \frac{V_Д \cdot \cos 30°}{l_2 \cdot 0.5} = \frac{0.46 \cdot 0.866}{1.2 \cdot 0.5} = 0.67\, c^{-1},$$

$$V_E = \omega_2 \cdot C_2E = \omega_2 \cdot C_2Д = V_Д = 0{,}46\, {}^{м}\!/\!_{с}.$$

4 Визначимо $\overline{a_B}$ (рисунок 4.4).

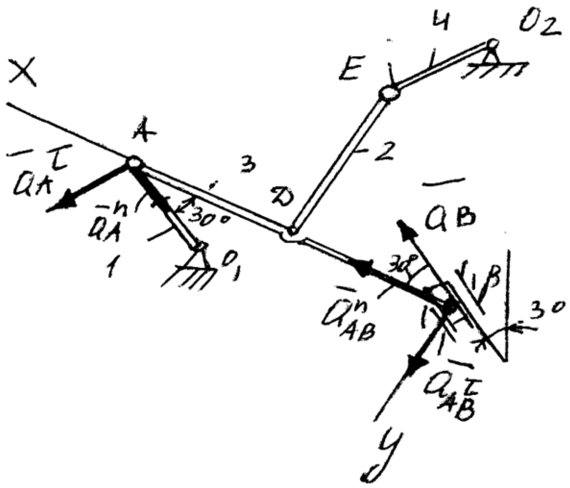

Рисунок 4.4

Точка *B* належить стержню *AB*. Для визначення $\overline{a_B}$ треба знати прискорення якої-небудь іншої точки стержня *AB* і траєкторію точки *B*. За даними задачі можна визначити:

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^\tau} + \overline{a_A^n},$$

де

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8 \ {}^{м}\!/_{c^2}, \ \overline{a_A^n} = \omega_1^2 \cdot l_1 = 2^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}6 \ {}^{м}\!/_{c^2}.$$

Вектор $\overline{a_A^n}$ напрямлений уздовж AO_1, а $\overline{a_A^\tau} \perp AO_1$. Оскільки точка *B* одночасно належить повзуну, то вектор $\overline{a_B}$ паралельний напрямним повзуна. Зобразимо вектор $\overline{a_B}$ на рисунку 4.4.

Для визначення $\overline{a_B}$ застосуємо рівність:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A^\tau} + \overline{a_A^n} + \overline{a_{AB}^\tau} + \overline{a_{AB}^n}, \qquad (4.1)$$

де $a_{AB}^n = \omega_3^2 \cdot l_3 = 0.657^2 \cdot 1.4 = 0.6 \ {}^{м}\!/_{c^2}$, і $\overline{a_{AB}^n}$ спрямований від *B* до *A*; вектор $\overline{a}_{AB}^{\tau} \perp AB$.

Спроектуємо векторну рівність (4.1) на вісь x (*BA*):

$$a_B \cos 30° = a_A^\tau \cos 60° - a_A^n \cos 30° + a_{AB}^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_B = \frac{a_A^\tau \cos 60° - a_A^n \cos 30° + a_{AB}^n}{\cos 30°} = \frac{2.8 \cdot 0.5 - 1.6 \cdot 0.86 + 0.6}{0.866} = 0.715\, {}^{м}\!/\!_{с^2}\,.$$

Оскільки $a_B > 0$, то вектор $\overline{a_B}$ напрямлений, як показано на рисунку 4.4.

5 Визначимо ε_3. Щоб знайти ε_3 спочатку визначимо $\overline{a}_{BA}^\tau$. Для цього спроектуємо обидві частини рівності (4.1) на вісь y ($\perp AB$):

$$-a_B \sin 30° = a_A^\tau \cdot \sin 60° + a_A^n \cdot \sin 30° + a_{AB}^\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{AB}^\tau = -a_B \sin 30° - a_A^\tau \sin 60° - a_A^n \sin 30° =$$

$$= -0.715 \cdot 0.5 - 2.8 \cdot 0.86 - 1.6 \cdot 0.5 = -3.58\ {}^{м}\!/\!_{с^2}\,.$$

Знак вказує, що напрямок $\overline{a_{AB}^\tau}$ протилежний показаному на рисунку 4.4.

З рівняння $a_{AB}^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_3$ одержимо: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_{AB}^\tau}{l_3} = \dfrac{3.58}{1.4} = 2.56\ с^{-2}$.

Відповідь: $V_B = 0,46\ {}^{м}\!/\!_{с}$; $V_E = 0,46\ {}^{м}\!/\!_{с}$; $\omega_2 = 0,67\ с^{-1}$; $a_B = 0,715\ {}^{м}\!/\!_{с^2}$; $\varepsilon_3 = 2,56\ с^{-2}$.

5 ЗАВДАННЯ К–4

Прямокутна пластина (рисунки 5.1.0–5.1.4) або кругла пластина радіуса $R = 60$ *см* (рисунки 5.1.5–5.1.9) обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = f_1(t)$, що заданий у таблиці 5.1. Додатний напрямок відліку кута φ показано на рисунках дуговою стрілкою. На рисунках 5.1.0, 5.1.1, 5.1.2, 5.1.5, 5.1.6 вісь обертання перпендикулярна площині та проходить через точку *O* (пластина обертається у своїй площині); на рисунках 5.1.3, 5.1.4, 5.1.7, 5.1.8, 5.1.9 вісь обертання OO_1 лежить у площині пластини (пластина обертається у просторі).

Таблиця 5.1

Варіант	Для всіх рисунків $\varphi = f_1(t)$	Для рисунків 0-4		Для рисунків 5-9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \overset{\frown}{AM} = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

По пластині вздовж прямої *BD* (рисунки 5.1.0–5.1.4) або вздовж кола радіуса *R* (рисунки 5.1.5 – 5.1.9) рухається точка *M*; закон її відносного руху, тобто залежність $s=AM=f_2(t)$ (s виражено у сантиметрах, t – у секундах), заданий у таблиці 5.1. окремо для рисунків 5.1.0–5.1.4 та для рисунків 5.1.5–5.1.9; надані також розміри *b* та *l*. На рисунках 5.1.0-5.1.9 точка *M* показана у положенні, при якому $s=AM>0$ (при $s<0$ точка *M* розташована з іншого боку від точки *A*).

Знайти абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки *M* у момент часу $t_1=1$ *с*.

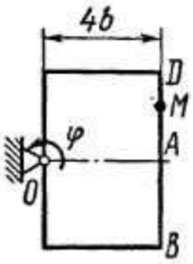

Рисунок 5.1.0

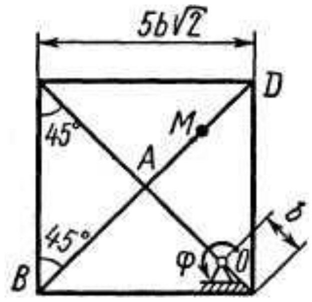

Рисунок 5.1.1

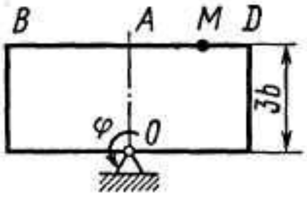

Рисунок 5.1.2

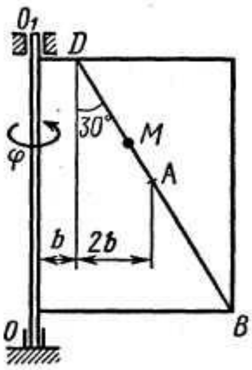

Рисунок 5.1.3

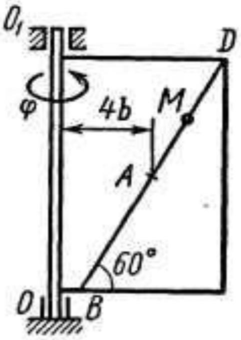

Рисунок 5.1.4

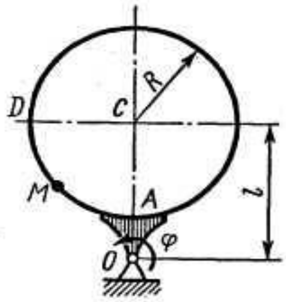

Рисунок 5.1.5

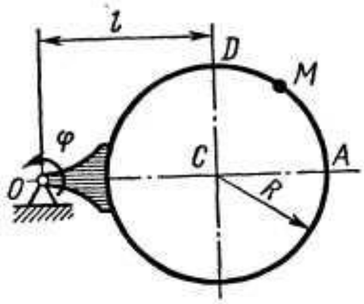

Рисунок 5.1.6

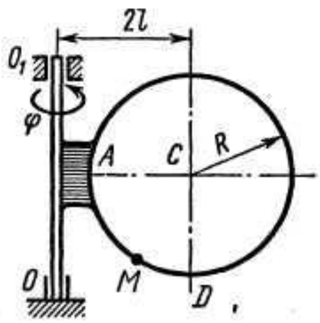

Рисунок 5.1.7

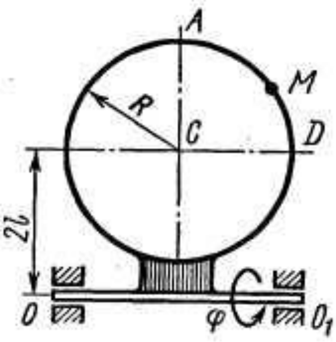

Рисунок 5.1.8

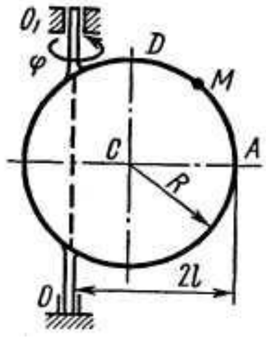

Рисунок 5.1.9

Вказівки до розв'язання завдання К–4

Завдання К-4 спрямоване на дослідження складного руху точки. Для його розв'язання скористаємося теоремами про додавання швидкостей і про додавання прискорень точки. Перш ніж провести всі розрахунки, треба за умовами задачі визначити, де розташовується точка *М* на пластині у момент часу $t_1 = 1$ *с*, та зобразити точку саме у цьому положенні.

У випадках, що зображені на рисунках 5.1.5–5.1.9, при розв'язанні задачі не підставляти числового значення *R*, доки не будуть визначені положення точки *М* у момент часу $t_1 = 1$ *с* та кут між радіусами СМ і СА у цей момент.

Приклад К-4, а

Дано: $R = 0,5$ *м*, $\varphi_e = t^2 - 0,5t^3$ *рад*,

$S = \mathrm{S} = \pi R \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ *м*, $t_1 = 2$ *с*

(рисунок 5.2).

Знайти: $V_{абс}$, $a_{абс}$–?

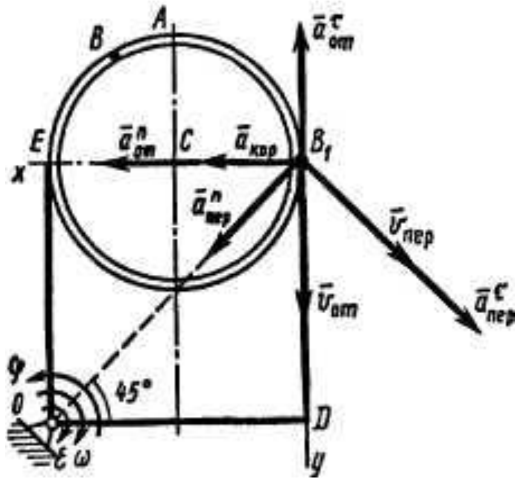

Рисунок 5.2

Розв'язання

1 Розглянемо рух точки *В* як складний: рух уздовж дуги кола – відносний, обертання пластини – переносний рух. Тоді абсолютна швидкість та абсолютне прискорення знайдемо за формулами:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_{від} + \overline{V}_{пер}, \tag{5.1}$$

$$\overline{a}_a = \overline{a}^{\tau}_{від} + \overline{a}^{n}_{від} + \overline{a}^{\tau}_{пер} + \overline{a}^{n}_{пер} + \overline{a}_{кор}. \tag{5.2}$$

2 Відносний рух. Цей рух відбувається за законом

$$S = \overset{\smile}{AB} = \pi R \cos\left(\frac{\pi . t}{3}\right) м.$$

Визначимо положення точки B_1 на дузі кола у час $t_1=2\ c$:

$$S_1 = \pi R \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}5\pi R,$$

тоді $\angle ACB_1 = \frac{S_1}{R} = -0{,}5\pi$.

Знак мінус показує, що точка B_1 у час $t_1=2$ с розташовується праворуч від точки A.

Визначимо чисельні значення $V_{від}, a^{\tau}_{від}, a^{n}_{від}$:

$$V_{від} = \frac{dS}{dt} = -\frac{\pi R^2}{3} sin\left(\frac{\pi.t}{3}\right) \Big/ t=2 = -\frac{3.14 \cdot 0.5^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1.42 \ м/с ;$$

$$a^{\tau}_{від} = \frac{dV_{від}}{dt} = -\frac{\pi^3 R}{9} cos\left(\frac{\pi.t}{3}\right) \Big/ t=2 = \frac{\pi^3 \cdot 0.5}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86 \ м/с^2 ;$$

$$a^{n}_{від} = \frac{dV^2_{від}}{R} = \frac{1.42^2}{0.5} = 4.06 \ м/с^2 .$$

Знаки показують, що вектор $\bar{a}^{\tau}_{від}$ напрямлений у бік додатного відліку відстані S, а вектор $\bar{V}_{від}$ – у протилежний бік; вектор $\bar{a}^{n}_{від}$ напрямлений до центра кола C.

3 Переносний рух. Обертання відбувається за законом $\varphi=t^2-0{,}5t^3$. Знайдемо кутову швидкість ω і кутове прискорення ε переносного руху:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t - 1.5t^2 \Big/ t = 2c = 2 \cdot 2 - 1.5 \cdot 2^2 = -2 \ c^{-1};$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 - 3t \Big/ t=2 = 2 - 3 \cdot 2 = -4\, c^{-2}.$$

Знаки показують, що напрямки ω та ε протилежні напрямку додатного відліку кута φ.

Пластина обертається прискорено за ходом годинникової стрілки.

Знайдемо відстань $h_1=OB_1$ точки B_1 від осі обертання:

$$h_1 = 2R\sqrt{2} = 2 \cdot 0.5\sqrt{2} = 1{,}41\ м\,.$$

Тоді $\overline{V}_{пер}$ і $\overline{a}_{пер}$ визначаємо за формулами:

$$V_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 2 \cdot 1.41 = 2.82\ м/с;$$

$$a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 4 \cdot 1.41 = 5{,}64\ м/с^2,\ a^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot h_1 = 2^2 \cdot 1.41 = 5{,}64\ м/с^2\,.$$

4 Коріолісове прискорення.

Модуль коріолісового прискорення визначаємо за формулою:

$$a_{кор} = 2|\omega| \cdot |V_{від}| \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 1.42 = 5.68\ м/с^2,\ \overline{\omega} \perp \overline{V}_{від}\,.$$

Напрямок $\overline{a}_{кор}$ знайдемо за правилом М. Є. Жуковського: вектор $\overline{V}_{від}$ повернемо на кут 90° за напрямом ω, тобто за ходом стрілки годинника [або $\overline{a}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{V}_{від})$].

5 Визначимо $\overline{V}_{абс}$. Проведемо координатні осі $XB_1\ Y$ та спроектуємо обидві частині рівняння (5.1) на ці осі:

$$V_{абсx} = V_{від\,x} + V_{пер\,x} = 0 - |V_{пер}| \cos 45^\circ = -2.82 \cdot 0.7 = -1.99\ м/с;$$

$$V_{абсy} = V_{від\,y} + V_{пер\,y} = |V_{від}| - |V_{пер}| \sin 45^\circ = 1.42 + 2.82 \cdot 0.7 = 3.41\ м/с$$

$$V_{абс} = \sqrt{V^2_{абс\,x} + V^2_{абс\,y}} = \sqrt{1.99^2 + 3.41^2} = 3.95\ м/с,$$

або

$$V_{абс} = \sqrt{V^2_{від} + V^2_{пер} + 2|V_{від}| \cdot |V_{пер}| \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{1.42^2 + 2.87^2 + 2 \cdot 1.42 \cdot 2.87 \cdot 0.7} = 3.95\ м/с\,.$$

6 Визначимо $a_{абс}$. Для визначення $a_{абс}$ спроектуємо обидві частині рівняння (5.2) на ці осі $XB_1\ Y$:

$$a_{абсх} = a^n_{від} + a_{кор} + a^n_{пер} \cdot \cos 45^\circ - \left|a^\tau_{пер}\right| \cos 45^\circ =$$

$$= 4.06 + 5.68 + 5.64 \cdot 0.7 - 5.64 \cdot 0.7 = 9.74 \ {}^{м}\!/_{с^2};$$

$$a_{абсу} = a^n_{пер} \cos 45^\circ + \left|a^\tau_{пер}\right| \cdot \cos 45^\circ - \left|a^\tau_{від}\right| = 5{,}64 \cdot 0{,}7 + 5{,}64 \cdot 0.7 - 0.86 = 7.15 \ {}^{м}\!/_{с^2};$$

Тоді $a_{абс} = \sqrt{a^2_{абс\ x} + a^2_{абс\ y}} = \sqrt{9.74^2 + 7.15^2} = 12.08 \ {}^{м}\!/_{с^2}$.

Відповідь: $V_{абс} = 3.95 \ {}^{м}\!/_{с}; a_{абс} = 12.08 \ {}^{м}\!/_{с^2}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., 1986.

2 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М., 1984. – Ч. 1, 2.

3 Толкачов А.М. Статика: Конспект лекцій з теоретичної механіки. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – Ч. 1.

4 Толкачов А.М. Кінематика: Конспект лекцій з теоретичної механіки. – Харків: ХарДАЗТ, 1999. – Ч. 2.

5 Іванова З.О. Динаміка: Конспект лекцій з теоретичної механіки. – Харків: УкрДАЗТ, 2001. – Ч. 1.

6 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М., 1985.

7 Комплексне методичне забезпечення до вивчення дисципліни „Теоретична механіка”. – Харків: УкрДАЗТ, 2004.