УДК 681.32:512.54

О.Ю. Каменєв (канд. техн. наук, в.о. доц.), А.О. Лапко (канд. техн. наук, доц.)
Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків
кафедра автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів
E-mail: alexstein@meta.ua; a_lapko@ukr.net

ІЗОМОРФІЗМ КЛАСІВ ТОЛЕРАНТНОСТІ НА РІЗНИХ РІВНЯХ ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

На підставі теоретико-множинного аналізу багаторівневих ієрархічних автоматизованих систем управління технологічними процесами виділені класи толерантності на різних їх рівнях за функціональною ознакою, пов'язаною із призначенням технологічних об'єктів. Встановлено, що зазначені класи толерантності мають ознаки абелевих адитивних груп, для чого запропоновано використання груп, базованих на кусково-заданій бінарній операції над індексами їх елементів. Із використанням теореми Келі з теорії груп доведено, що зазначені класи толерантності є ізоморфними по відношенню один до одного на різних рівнях систем. Це дозволяє напрацювати єдині підходи до синтезу, проектування, технічного обслуговування та ремонту різних рівнів ієрархічних систем та засобів їх досліджень.
Ключові слова: *бієкція, толерантність, ізоморфізм, група, АСУ, рівень.*

Загальна постановка проблеми. При аналізі й синтезі багаторівневих ієрархічних автоматизованих систем управління технологічними процесами (АСУ ТП) із програмованою логікою функціонування виникає необхідність узгодження між рівнями. Тривіальні підходи, що застосовуються з цією метою, базуються на відповідності між об'єктами керування та контролю системи, її програмними і апаратними модулями на всіх рівнях. Проте в багатьох випадках така відповідність виявляється не однозначною, що призводить до порушення адекватності приймання-передачі командної і контрольної інформації. Такий порядок речей не є припустимим для АСУ ТП у відповідальних сферах, тому для них зазначена відповідність має бути однозначно встановлена і доведена [1, 2].

Постановка задач дослідження. Метою роботи є розроблення підходу до формування єдиних теоретико-групових моделей багаторівневих АСУ ТП з точки зору виділення на її рівнях взаємно-однозначних класів толерантності, що дозволить виділити спільні принципи їх проектування, дослідження та подальшої експлуатації.

Для досягнення зазначеної мети поставлені та вирішені такі задачі:

– формування виразу для кусково-заданої групи, що може об'єднувати елементи та модулі АСУ ТП спільного призначення;

– встановлення принципів групування елементів всіх рівнів АСУ ТП за функціональною ознакою із використанням кусково-заданої групи;

– визначення умов ізоморфізму між функціональними групами різних рівнів АСУ ТП, розроблення методики доведення зазначеного ізоморфізму.

Результати досліджень. Групування функціональних елементів на різних рівнях АСУ ТП. Нехай деяка АСУ ТП побудована за клієнт-серверною архітектурою та містить n ієрархічних рівнів, що задіяних в керуванні та контролі множиною A технологічних об'єктів. Кожний об'єкт керування та контролю (ОКК) $a_j \in A$ безпосередньо взаємодіє з одним мікропроцесорним об'єктним контролером (МПК) $ll_j \in LL$, що є елементом нижнього рівня (*low level*). В свою чергу логічні залежності функціонування АСУ ТП реалізуються програмним забезпеченням (ПЗ) середнього рівня системи (*middle level*), причому керування та контроль кожного МПК здійснюється програмним модулем $ml_j \in ML$, а безпосередньо логічні залежності виконуються при динамічній взаємодії елементів ml_j:

$$\forall (a_j \in A) \leftrightarrow \exists (ll_j \in LL) \leftrightarrow \exists \ (ml_j \in ML). \tag{1}$$

Відповідно до праць [3, 4] множину ОКК A у складі АСУ ТП можна розділити на n класів толерантності за типом використаних МПК нижнього рівня (за функціональною ознакою):

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{LL}, \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{LL} = \varnothing, \tau_i^{LL} \subset A \times A : \forall A_i^{LL} \to \exists! \, LL_i \subset LL, \tag{2}$$

де A_i^{LL} – відповідний клас толерантності на множині A; τ_i^{LL} – відношення толерантності за типом використаних МПК; LL_i – множина МПК певного типу, до яких підключені ОКК A_i^{LL}.

Якщо в межах кожного класу толерантності A_i^{LL} виконати суцільну наскрізну нумерацію елементів a_ϑ ($\vartheta = \overline{1, (r = [A_i^{LL}])}$) відповідно до формули (2) та задати на ньому бінарну операцію «*», таку що відповідає виразу (3),

$$\begin{gathered}
\forall (a_b, a_c) \in A_i^{LL} \to \exists a_d \in A_i^{LL} : a_b * a_c = a_d; \\
\forall (a_b, a_c, a_d) \in A_i^{LL} : a_b * (a_c * a_d) = (a_b * a_c) = a_d = a_b * a_c * a_d; \\
\exists a_e \in A_i^{LL} \to \forall a_\vartheta \in A_i^{LL} : a_\vartheta * a_e = a_e * a_\vartheta = a_\vartheta; \\
\forall a_\vartheta \in A_i^{LL} \to \forall a_\vartheta^{-1} \in A_i^{LL} : a_\vartheta * a_\vartheta^{-1} = a_\vartheta^{-1} * a_\vartheta = a_e; \\
b, c, d, e = \overline{1, r = [A_i^{LL}]},
\end{gathered} \tag{3}$$

то, згідно з теорією груп [3], кожен клас A_i^{LL} є групою порядку r: $G(A_i^{LL}) = (A_i^{LL}; *)$. За бінарну операцію, при якій виконуються умови (3), можна взяти кусково-задану процедуру над індексами ϑ елементів a_ϑ, що полягає у знаходженні абсолютної величини послідовного сумування даних індексів та відніманні від них найбільшого індексу $max(\vartheta) = r$ або найближчого більшого цілого від його половинного значення, залежно від результатів суми самих індексів:

$$d = \begin{cases}
\left| b + c - \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \right|, \text{ якщо } \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \neq b + c \leq \left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor; \\
\left| b + c - \left\lceil \frac{r-2}{2} \right\rceil \right| \equiv 1, \text{ якщо } b + c = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil; \\
\left| b + c - r \right|, \text{ якщо } b + c > \left\lfloor \frac{3r}{2} \right\rfloor.
\end{cases} \tag{4}$$

При цьому нейтральний елемент a_e кожної групи A_i^{LL} знаходиться шляхом перетворення виразу (3) – з рівнянь $|\vartheta + e - \lceil r/2 \rceil| = \vartheta$ та $|\vartheta + e - r| = \vartheta$, звідки випливає значення $e = \lceil r/2 \rceil \vee r$. У свою чергу, обернений елемент a_ϑ^{-1}, згідно з формулою (4), знаходиться із рівнянь $|\vartheta + \vartheta^{-1} - \lceil r/2 \rceil| = e = \lceil r/2 \rceil$ та $|\vartheta + \vartheta^{-1} - r| = e = r$, з яких випливає: $\vartheta^{-1} = r - \vartheta \vee 2r - \vartheta$.

Середній вираз у формулі (3), який виключає нульовий індекс ϑ і прирівнює його до одиниці (оскільки, згідно з (4), $a_0 = \varnothing$), тотожно дорівнює одиниці, тому до уваги не приймається.

Оскільки $r = max(\vartheta)$, індекс $2r - \vartheta$ не має сенсу для всіх значень $\vartheta \neq r$ ($\alpha_{2r-\vartheta\neq r} = \varnothing$), тому єдиним значенням оберненого елемента a_ϑ є $a_\vartheta^{-1} = a_{r-\vartheta}$, якому буде відповідати єдиний нейтральний елемент $a_e = a_{\lceil r/2 \rceil}$. Враховуючи, що виконується рівність $\vartheta + |r/2| \leq max(\vartheta) + |r/2| = r + |r/2| = |3r/2|$, згідно з виразом (4) елемент $a_{\lceil r/2 \rceil}$ буде нейтральним для всіх членів групи A_i^{LL}. Підстановка елементів $a_{r-\vartheta}$ та $a_{\lceil r/2 \rceil}$ в нижні два вирази формули (3) за операцією (3) підтверджує їх істинність.

У той же час істинність першого виразу формули (3), що відображає замкненість бінарної операції (4) відносно елементів групи, випливає із властивостей абсолютної величини та областей значень виразу $b + c$ [5, 6]:

$$b,c \in [1;r] \rightarrow b+c \in [2;\, 2r] \rightarrow b+c = \begin{cases} d + \left\lceil \dfrac{r}{2} \right\rceil, \text{якщо } b+c \in \left[2; \left\lceil \dfrac{r}{2} \right\rceil\right) \cup \left(\left\lceil \dfrac{r}{2} \right\rceil; \left\lceil \dfrac{3r}{2} \right\rceil\right]; \\ d + \left\lceil \dfrac{r-2}{2} \right\rceil = 1 + \left\lceil \dfrac{r-2}{2} \right\rceil, \text{якщо } b+c = \left\lceil \dfrac{r}{2} \right\rceil; \\ d + r, \text{якщо } b+c \in \left[\left\lceil \dfrac{3r}{2} \right\rceil; 2r\right], \end{cases}$$

звідки знаходяться відповідні області значень *D1*, *D2*, *D3* індексу *d*:

$$2 + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq d + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3r}{2} \right\rceil \rightarrow D_1 = [2;\, r],\, D_2 = 1,\, \left\lceil \frac{3r}{2} \right\rceil < d + r \leq 2r \rightarrow D_3 = \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil; r\right].$$

Повна область значень *D* індексу *d* знаходиться як поєднання його локальних областей значень *D1*, *D2*, *D3* [7, 8]:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = [2;\, r] \cup 1 \cup \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil; r\right] = [1;\, r],$$

що відповідає виразу $b,c,d,e = \overline{1, r = [\,A_i^{LL}\,]}$ у формулі (2), а отже, підтверджує замкненість операції (3) відносно елементів групи A_i^{LL}.

Істинність другого зверху виразу у формулі (3) для бінарної операції «*» безпосередньо випливає із асоціативності операції арифметичної суми дійсних чисел, яка закладена в основу зазначеної бінарної операції (4), що визначає адитивний характер кожної групи A_i^{LL}.

Із комутативності арифметичної суми дійсних чисел випливає, що кожний клас толерантності за функціональною ознакою МПК A_i^{LL} є абелевою групою відповідних елементів (напільних пристроїв керування і контролю) [4].

Встановлення відповідності між функціональними групами. Виходячи із досліджень [9, 10], існує бієкція між множинами *A*, *LL* та $ML_A \subset ML$ програмних модулів ОКК у складі ПЗ середнього рівня АСУ ТП, звідки випливають взаємно однозначні класи толерантності за функціональною ознакою на даних множинах:

$$
\left(\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{LL} \leftrightarrow ML_A\right) \rightarrow \left(\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} A_{\mathrm{i}}^{\mathrm{LL}} \leftrightarrow \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} LL_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}} \leftrightarrow \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} ML_{Ai}^{LL}\right), \bigcap_{i=1}^{n} LL_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}} = \varnothing, \bigcap_{i=1}^{n} ML_{Ai}^{LL} = \varnothing;
$$
$$
\tau_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A\_LL}} \subset A \times A : \forall A_{\mathrm{i}}^{\mathrm{LL}} \leftrightarrow \exists! LL_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}} \subset \mathrm{LL}, \tau_{\mathrm{i}}^{\mathrm{LL\_A}} \subset LL \times LL : \forall LL_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}} \leftrightarrow \exists! A_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}} \subset A; \quad (5)
$$
$$
\tau_{\mathrm{i}}^{\mathrm{LL\_ML}} \subset LL \times LL : \forall LL_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}} \leftrightarrow \exists! ML_{Ai}^{LL} \subset ML, \tau_{\mathrm{i}}^{\mathrm{ML\_LL}} \subset ML \times ML : \forall ML_{Ai}^{LL} \leftrightarrow \exists! LL_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}} \subset LL,
$$

де $LL_{\mathrm{i}}^{A} = LL_{\mathrm{i}}$, ML_{Ai}^{LL} – відповідні класи толерантності на множинах *LL* та *ML*; $\tau_i^{A\_LL}$, $\tau_i^{LL\_A}$ – відповідно відношення толерантності за типами використаних МПК та підключених до них ОКК: $\tau_i^{A\_LL} = (\tau_i^{LL\_A})^{-1}$; $\tau_i^{LL\_ML}$, $\tau_i^{ML\_LL}$ – відповідно відношення толерантності за типами використаних програмних модулів та взаємодіючих з ними МПК: $\tau_i^{LL\_ML} = (\tau_i^{ML\_LL})^{-1}$.

Згідно з властивістю суперпозиції бієктивного відношення, яке задано верхнім виразом у формулі (5), класи толерантності на множинах *A* та *ML* також взаємно однозначні $\left(\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} A_{\mathrm{i}}^{LL} \leftrightarrow \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} ML_{Ai}^{LL}\right)$, звідки можна виділити взаємно обернені відношення толерантності $\tau_i^{A\_ML}, \tau_i^{ML\_A}$ на множині *A* за типом ОКК та на множині *ML* за типом їхніх програмних модулів:

$$
\tau_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A\_ML}} \subset A \times A : \forall\left(A_{\mathrm{i}}^{\mathrm{ML}} = A_{\mathrm{i}}^{\mathrm{LL}}\right) \leftrightarrow \exists!\left(ML_{\mathrm{Ai}}^{\mathrm{A}} = ML_{\mathrm{Ai}}^{\mathrm{LL}}\right) \subset \mathrm{ML};
$$
$$
\tau_{\mathrm{i}}^{\mathrm{ML\_A}} \subset ML \times ML : \forall ML_{\mathrm{Ai}}^{\mathrm{A}} \leftrightarrow \exists! A_{\mathrm{i}}^{\mathrm{ML}} \subset A. \quad (6)
$$

Тоді, згідно з властивостями симетричності бієктивного відношення [3], має місце бути рівнопотужність класів толерантності у формулах (5), (6): $\left[A_{\mathrm{i}}^{LL}\right] = \left[LL_{\mathrm{i}}^{A}\right] = \left[ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}\right] = r$, з якої випливає ізоморфізм перестановок елементів на даних множинах: $\mathrm{S}_{r!}\left(A_{\mathrm{i}}^{\mathrm{LL}}\right) \cong \mathrm{S}_{r!}\left(\mathrm{LL}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{A}}\right) \cong \mathrm{S}_{r!}\left(ML_{\mathrm{Ai}}^{\mathrm{LL}}\right)$.

З теорії груп відомо, що множина перестановок скінченної множини *r* елементів є скінченною групою порядку *r!* відносно операції множення перестановок. В кожній такій групі $S_{r!}$ можна виділити підгрупу $\left(S_r \supset P_e\right) \subset S_{r!}$ (де P_e – тотожна перестановка) порядку $[S_r] = r$, яка, згідно з теоремою Келі та транзитивністю ізоморфізму, буде ізоморфною групі A_{i}^{LL}: $A_{\mathrm{i}}^{LL} \cong S_r\left(A_{\mathrm{i}}^{LL}\right) \cong S_r\left(LL_{\mathrm{i}}^{A}\right) \cong S_r\left(ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}\right)$ [4].

Якщо при цьому в межах кожного класу у виразах (5), (6) виконати взаємно однозначну індексацію (нумерацію) відповідних один одному елементів: $\left(a_\vartheta \in A_i^{LL}\right) \leftrightarrow \left(ll_\vartheta \in LL_i^{A}\right) \leftrightarrow \left(ml_\vartheta \in ML_{Ai}^{LL}\right)$, а також задати бінарну операцію (4), то, згідно з теоремою Келі, множини LL_i^A та ML_{Ai}^{LL} також будуть абелевими групами відносно операції «*», ізоморфними відповідно групам $S_r\left(LL_{\mathrm{i}}^{A}\right) = S_r\left(ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}\right)$. Із транзитивності та симетричності ізоморфного відображення випливає ізоморфізм всіх трьох груп відповідних до певного типу ОКК елементів на всіх рівнях [3]:

$$
\left.\begin{array}{l} A_{\mathrm{i}}^{LL} \cong S_r\left(A_{\mathrm{i}}^{LL}\right) \cong S_r\left(LL_{\mathrm{i}}^{A}\right) \cong S_r\left(ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}\right) \\ LL_{\mathrm{i}}^{A} \cong S_r\left(LL_{\mathrm{i}}^{A}\right) \wedge ML_{\mathrm{Ai}}^{LL} \cong S_r\left(ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}\right) \end{array}\right\} \rightarrow A_{\mathrm{i}}^{LL} \cong LL_{\mathrm{i}}^{A} \cong ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}. \quad (7)
$$

Тоді на поєднанні множин $A \cup LL \cup ML$ можна виділити класи еквівалентності елементів $\left\{a_j, ll_j, ml_j\right\} \subset A \times LL \times ML$ за відповідністю конкретному ОКК $a_j \in A$: $\varepsilon_j^{A\_LL\_ML} \subset A \times LL \times ML : \left(a_j \in A\right) \leftrightarrow \left(ll_j \in LL\right) \leftrightarrow \left(ml_j \in ML\right)$.

Виходячи з властивостей транзитивності та симетричності еквівалентності [3] та враховуючи ізоморфізм груп (7), можна виконати композицію відношень $\varepsilon_j^{A\_LL\_ML}$, $(\tau_i^{A\_LL})^{\pm 1}$, $(\tau_i^{LL\_ML})^{\pm 1}$, $(\tau_i^{A\_ML})^{\pm 1}$ та бієкцій, заданих формулами (5), (6), за правилом $\xi(A, LL, ML)$ так, щоб на множині $\Lambda = \{\alpha_j\} = \{\{a_j, ll_j, ml_j\}_j\}$ були утворені класи толерантності $\Lambda_{\mathrm{i}}^{f_i(\alpha)}$ ($\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \Lambda_{\mathrm{i}}^{f_i(\alpha)} = \Lambda, \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_{\mathrm{i}}^{f_i(\alpha)} = \varnothing$):

$$\xi(A,LL,ML) = \varepsilon_j^{A\_LL\_ML} \circ \tau_i^{A\_LL} \circ \tau_i^{LL\_A} \circ \tau_i^{LL\_ML} \circ \tau_i^{ML\_LL} \circ \tau_i^{A\_ML} \circ \tau_i^{ML\_A} = \tau_i^{\gamma(\alpha)};$$

$$\tau_{\mathrm{i}}^{\gamma_{\mathrm{i}}(\alpha)} \subset \Lambda \times \Lambda : \begin{cases} \alpha_j \in \Lambda_i \to [\gamma_i(\alpha_j) = a_j] \wedge [\gamma_{k \neq i}(\alpha_j) = \varnothing] \\ \alpha_j \notin \Lambda_i \to [\gamma_i(\alpha_j) = \varnothing] \wedge \left[\gamma_{k \neq i}(\alpha_j) = \begin{cases} \varnothing, \text{якщо } \alpha_j \notin \Lambda_{\mathrm{k}} \\ a_j, \text{якщо } \alpha_j \in \Lambda_{\mathrm{k}} \end{cases} \right] \end{cases};$$

$$i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,\left(s = [\Lambda] = \sum_{i=1}^{n} [A_i^{LL}] = \sum_{i=1}^{n} [LL_i^A] = \sum_{i=1}^{n} [ML_{Ai}^A] \right)},\ k = \overline{1,(n-1)}, \tag{8}$$

де $\tau_i^{\gamma_i(\alpha)}$ – відношення толерантності за принципом використання єдиного протоколу керування та контролю, що реалізується функцією $\gamma_i(\alpha_j)$.

Згідно з формулою (8), за функціями $\gamma_i(\alpha) = \gamma_i(\alpha_j)$ виконуються бієктивні відображення між відповідними групами, заданими формулою (7). При цьому $\bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i(\alpha) = \varnothing$ [3]. Кожна функція $\gamma_i(\alpha) \in Y(\alpha)$ реалізується відповідним драйвером, що відтворює певний протокол взаємодії між відповідними класами нижнього та середнього рівнів. При цьому кожний драйвер $\gamma_i(\alpha_j)$ однозначно відповідає певному типу ОКК, об'єднаному в групу A_{i}^{LL}. Враховуючи ізоморфізм (7), цей драйвер також однозначно відповідає типу МПК та програмному модулю, об'єднаним у групи LL_{i}^{A} та ML_{Ai}^{LL} [9]:

$$\gamma_i(\alpha_j) \leftrightarrow A_{\mathrm{i}}^{LL}, LL_{\mathrm{i}}^{A}, ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}. \tag{9}$$

Виходячи з можливої багатокальності елементів нижнього рівня, пов'язаної із резервуванням МПК, та враховуючи побудову ПЗ АСУ ТП, кожен елемент LL відтворюється вектором, елементи якого відтворюють відповідні інформаційно-керуючі канали. При цьому векторною є кожна функція $\gamma_i(\alpha)$, а елементи її вектора визначають складові драйверів для відповідних каналів:

$$ll_j = \overrightarrow{ll_j} = \langle ll_{j1}, ll_{j2}, \dots, ll_{jm} \rangle \xleftrightarrow{\gamma_i(\alpha_j)} ml_j;$$
$$\gamma_i(\alpha) = \overrightarrow{\gamma_i(\alpha)} = \langle \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im} \rangle \leftrightarrow \{LL_{i\eta}\} \subset LL_i, \eta = \overline{1,m}, \tag{10}$$

де $\{LL_{i\eta}\}$ – множина елементів η-го каналу у класу LL_i.

У формулі (10) для спрощення прийнято, що кількість каналів кожного елемента в усіх класах LL_i однакова і дорівнює числу m. Тоді, згідно з виразами (5) – (10), взаємні відношення між ОКК та елементами нижнього і середнього рівнів на прикладі одного класу Λ_i визначаються графом на рис. 1.

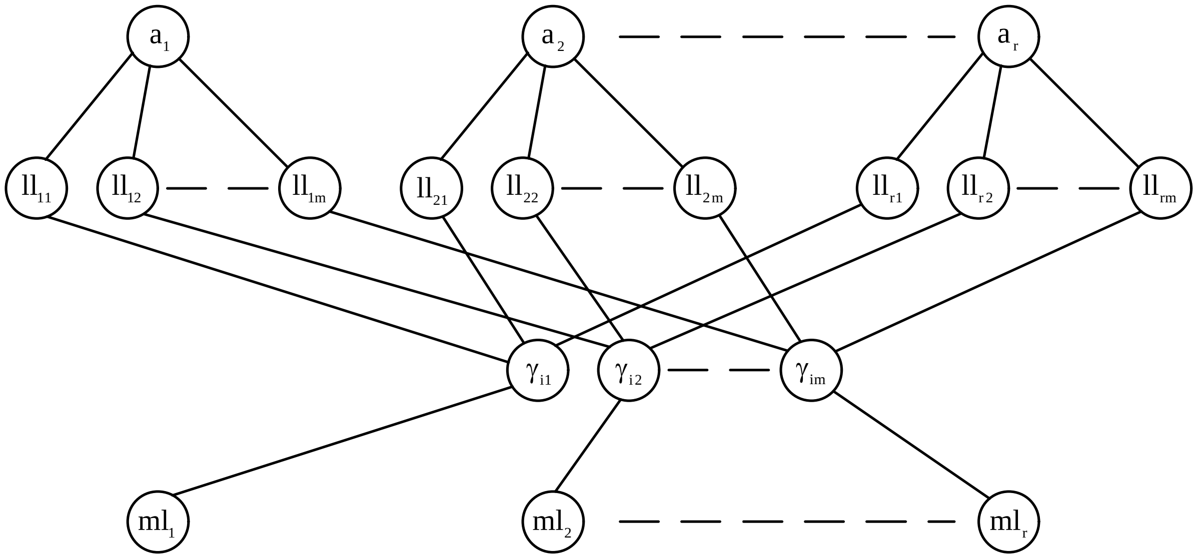

Рисунок 1 – Граф відношень на множинах A_i^{LL}, LL_i^A, ML_{Ai}^A та $\gamma_i(\alpha)$

Всі відношення між відповідними елементами, що відтворюються у складі графа на рис. 1 вершинами, мають характер взаємності (тому ребра, що відтворюють відношення, зображені ненаправленими). Характер відношень з позиції однозначності визначається валентністю вершин у відповідному напрямку (одновалентність визначає однозначність, а багатовалентність – багатозначність).

Згідно з суперпозицією відношень, заданою верхнім виразом у формулі (8), та характером зв'язків, заданим графом на рис. 1, нумерація елементів α_j в межах кожного класу Λ_i збігається з групами $A_{\mathrm{i}}^{LL} \cong LL_{\mathrm{i}}^{A} \cong ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}$ $\left(j = \vartheta\right)$.

Тоді, спираючись на наведені вище викладки, що доводять груповий характер множин A_i^{LL}, LL_i^A, ML_{Ai}^A та ізоморфізм між ними, можна зробити висновок, що кожен клас Λ_i є абелевою групою порядку *r*, ізоморфно всім вищенаведеним групам: $\Lambda_i \cong A_{\mathrm{i}}^{LL} \cong LL_{\mathrm{i}}^{A} \cong ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}, \left[\Lambda_i\right] = \left[A_{\mathrm{i}}^{LL}\right] = \left[LL_{\mathrm{i}}^{A}\right] = \left[ML_{\mathrm{Ai}}^{LL}\right] = r$. Виходячи із доведеного ізоморфізму між класами толерантності на рівнях АСУ ТП, формулу (1) можна записати в більш строгому вигляді:

$$\forall\,(a_j \in A) \leftrightarrow\; !\exists(ll_j \in LL) \leftrightarrow !\exists\;(ml_j \in ML). \tag{11}$$

Аналогічним чином можна довести взаємно-однозначну відповідність між функціональними групами (класами толерантності) на всіх інших (крім нижнього та середнього) рівнів ієрархічних АСУ ТП.

Така взаємно-однозначна відповідність, задана виразом (11), дозволяє встановити єдині принципи для синтезу, проектування і аналізу різних рівнів АСУ ТП, засобів їх дослідження, технічного обслуговування та ремонту.

Формалізація стратегії технічного обслуговування АСУ ТП. На основі вище викладеного можна припустити, що існує простір технічних станів ОКК *(Ξ, S)*, а *(Θ, E)* – простір станів технічної експлуатації. Кожен з цих просторів, в яких $S_j \in S$ та $E_j \in E$ – відповідні алгебри подій, передбачаються вимірюваними. Варіанти V стратегії технічного обслуговування (ТО) (maintenance philosophy), що виникають у даному випадку, зручно визначити такою матрицею [11]:

$$V_{MP} = \begin{vmatrix} V_{MP}(S_j;S) & V_{MP}(S_j;E) \\ V_{MP}(E_j;S) & V_{MP}(E_j;E) \end{vmatrix}$$

Стратегія $\{V_{MP}(S_j;S)\}$ визначає імовірності переходу за технічними станами ОКК як об'єкта експлуатації; $\{V_{MP}(E_j;E)\}$ є стратегією технічної експлуатації; стратегія $\{V_{MP}(S_j;E)\}$ визначає імовірність призначення чергового стану технічної експлуатації; стратегія $\{V_{MP}(E_j;S)\}$ визначає імовірність відновлення працездатності ОКК як об'єкта експлуатації. Використовуючи матрицю V_{MP}, можна подати стратегію ТО в такому вигляді:

$$V_{MP}(S_j;S) = \left[V_{MP}(E_j;S) V_{MP}(S_j;E) V_{MP}(E_j;E) \right].$$

З викладених позицій стратегія $\{V_{MP}(S_j;S)\}$ визначає клас стратегій, що складається з трьох:

– стратегія ТО, що не враховує технічний стан об'єкта експлуатації;

– стратегія ТО, що частково враховує технічний стан об'єкта експлуатації шляхом достовірного вимірювання параметрів та прийняття відповідного рішення;

– стратегія ТО, що повністю враховує технічний стан об'єкта експлуатації шляхом достовірного вимірювання параметрів та прийняття відповідного рішення; крім контролю технічного стану, для пристроїв з відомим значенням наробітку можливий контроль використання.

Графом на рис. 1 можна скористатися для реалізації форм поділу праці як відповідних страт для процесу ТО ОКК (див. рис. 2).

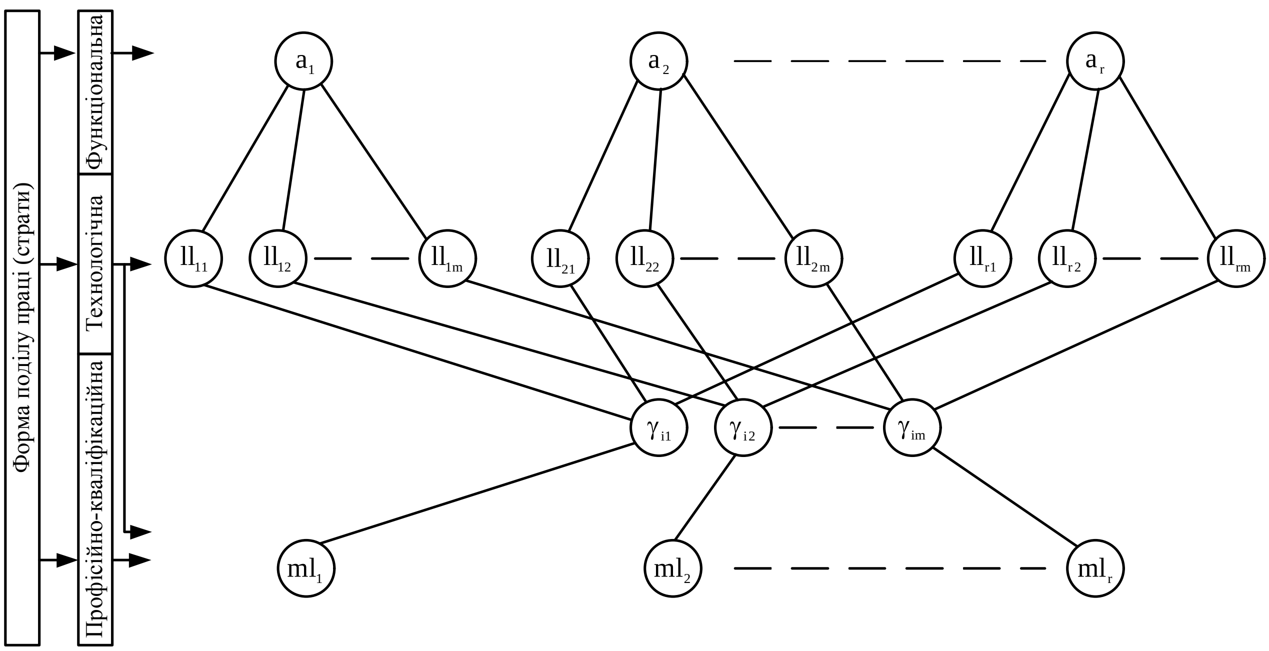

Рисунок 2 – Стратифікована уява форм поділу праці при обслуговуванні ОКК

Використання (див. рис. 2) стратифікації полягає в можливій автоматизації формування технологічних карт та інших керівних документів із ТО АСУ ТП в цілому та її ОКК зокрема.

Висновки.

1. Запропоновано новий вид абелевої адитивної групи, що базується на кусково-заданій бінарній арифметичній операції над індексами функціональних елементів систем керування.

2. Встановлено, що класи толерантності технологічних об'єктів систем керування, сформовані за функціональним принципом, мають всі ознаки абелевих адитивних груп відносно вищеназваної кусково-заданої бінарної арифметичної операції.

3. На підставі теореми Келі із теорії груп встановлена та доведена взаємно-однозначна відповідність (ізоморфізм) між функціональними групами на різних рівнях ієрархічних систем керування.

4. Визначена можливість використання доведеного ізоморфізму між функціональними групами для формування єдиних принципів синтезу, аналізу, проектування, технічного обслуговування та ремонту різних складових АСУ ТП, а також засобів їх досліджень.

5. На підставі виконаного функціонального розподілення ОКК та її керуючих програмно-апаратних модулів на різних рівнях ієрархічних АСУ ТП запропоновано формалізацію стратегії ТО АСУ ТП на базі простору станів ОКК.

Список використаної літератури

1. Глинков, Г.М. АСУ ТП в чёрной металлургии [Текст] / Г.М. Глинков, В.А. Маковский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Металлургия, 1999. – 310 с.
2. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем [Текст] / М. Месарович, Д. Мако, И. Такахара; пер. с англ.; под ред. И. Ф. Шахнова; предисл. чл.-кор. АН СССР Г. С. Поспелова. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
3. Сигорский, В.П. Математический аппарат инженера [Текст] / В.П. Сигорский. – изд. 2-е, стереотип. – К.: Техника, 1977. – 768 с.
4. Каргаполов, М.И. Основы теории групп [Текст] / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
5. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. – М.: Гос. изд-во технико-теор. литературы, 1957. – 672 с.
6. Сидняев, Н.И. Введение в теорию планирования эксперимента [Текст]: учебное пособие / Н.И. Сидняев, Н.Т. Вилисова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 463 с.
7. Патент № 77047. Україна МПК G05B 23/00. Комбінований випробувальний комплекс мікропроцесорної централізації стрілок та сигналів (КВК МПЦ) [Текст] / О.Ю. Каменєв, В.Ф. Кустов; Заявник та патентовласник Українська державна академія залізничного транспорту. – № U201208749; заявл. 16.07.2012; опубл. 25.01.2013, Бюл. № 2. – 6 с.
8. Кустов, В.Ф. Экспериментально-статические модели распределённых технологических объектов [Текст] / В.Ф. Кустов, А.Ю. Каменев // Металлургическая и горнорудная промышленность. – 2013. – № 2. – С. 97 – 101.
9. Каменєв, О.Ю. Процедура періодичного контролю підсистеми технічної діагностики об'єктних контролерів мікропроцесорної централізації [Текст] / О.Ю. Каменєв // Залізничний транспорт України. – 2014. – №3. – С. 34 – 46.
10. Дослідження надійності та функційної безпечності мікропроцесорних систем електричної централізації стрілок та сигналів ЕЦМ та МПЦ-С [Текст]: звіт про НДР (заключ.) / УкрДАЗТ; керівник А.Б. Бойнік, 2012. Номер держ. реєстр. 0112U000578; інв. номер 0712U006644.
11. Fredriksson, G. An analysis of maintenance strategies and development of a model for strategy formulation [Text]: A case study / G. Fredriksson, H. Larsson. – Göteborg: Chalmers University of Technology, 2012. – 159 p.

References

1. Glinka , G.M. and Makovsky, V.A. (1999), *ASU TP v chjornoj metallurgii* [APCS in the steel industry], Metallurhyia, Moscow, Russia.
2. Mesarovich, M., Mako, J. and Takahara, J. (1973) *Teorija ierarhicheskih mnogourovnevyh sistem* [Hierarchical multilevel systems theory], in Shahnov, I.F. (ed.), Mir, Moscow, Russia.
3. Sigorsky, V.P. (1977), *Matematicheskij apparat inzhenera* [Mathematical engineer unit], Tekhnyka, Kiev, UA.
4. Kargapolov, M.I. (1982), *Osnovy teorii grupp* [Basics of group theory], Nauka, Moscow, Russia.
5. Vygodskiy, M.Ya. (1957), *Spravochnik po vysshej matematike* [Reference book on higher mathematics], State Publishing House technical and theoretical literature, Moscow, Russia.
6. Sidnyaev, N.I. and Vilisova, N.T. (2011), *Vvedenie v teoriju planirovanija jeksperimenta* [Introduction to experimental design], Publishing House of the MSTU named Bauman, Moscow, Russia.
7. Kamenev, A.J. and Kustov, V.F. Ukrainian State Academy of Railway Transport (2013), *Kombinovanyi vyprobuvalnyi kompleks mikroprotsesornoi tsentralizatsii strilok ta syhnaliv* [Combined test complex of microprocessor pointers and signals interlocking], State Register of Patents of Ukraine, Kiev, UA, Pat. № 77047.
8. Kustov, V.F. and Kamenev, A.J. (2013), “Experimental static model of distributed technological objects”, *Metallurgical and mining industry*, no. 2, pp. 97 – 101.
9. Kamenev, A.J. (2014), “Procedure of periodic inspection of technical diagnostics subsystem of objective comptrollers of microprocessor interlocking”, *Railway transport of Ukraine*, no. 3, pp. 34 – 46.
10. Bojnik, A.B. (ed.) (2012), *Research the reliability and functional safety of microprocessor systems of electric pointers and signals interlocking ECM and MPC-S*, Report of research (in key), Ukrainian State Academy of Railway Transport, state registration number 0112U000578, inv. number 0712U006644.
11. Fredriksson, G. and Larsson, H. *An analysis of maintenance strategies and development of a model for strategy formulation*: *A case study*, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.

Надійшла до редакції: 28.04.2016	Рецензент: д-р техн. наук, проф. Зорі А.А.

А.Ю. Каменев, А.А. Лапко

Украинский государственный университет железнодорожного транспорта

Изоморфизм классов толерантности на разных уровнях иерархических систем управления. *На основании теоретико-множественного анализа многоуровневых иерархических автоматизированных систем управления технологическими процессами выделены классы толерантности на различных их уровнях по функциональному признаку, связанному с назначением технологических объектов. Установлено, что указанные классы толерантности имеют признаки абелевых аддитивных групп, для чего предложено использование групп, основанных на кусочно-заданной бинарной операции над индексами их элементов. С использованием теоремы Келли по теории групп доказано, что указанные классы толерантности изоморфны по отношению друг к другу на различных уровнях систем. Это позволяет выработать единые подходы к синтезу, проектированию, техническому обслуживанию и ремонту различных уровней иерархических систем и средств их исследований.*

Ключевые слова*: биекция, толерантность, изоморфизм, группа, АСУ, уровень.*

A.J. Kamenyev, A.O. Lapko
Ukrainian State University of Railway Transport
Isomorphism classes of tolerance at different levels of hierarchical control systems. *Virtually all modern microprocessor automated process control systems in different sectors of the economy are built on a multi-level hierarchical principle. One of their distinguishing features is the uniformity of construction of hierarchical information and control levels, which is associated with the operation of the software logic, common components and multi-stage decision-making. Different approaches to synthesis, design, maintenance and repair of technical equipment of different levels of such systems are currently practiced. The establishment and confirmation of the mutual uniqueness will optimize the processes of development, operation, repair and maintenance of such systems. Therefore, by using the mathematical apparatus of the theory of groups we carried out the formation of coherent with each other tolerance classes on a functional basis for the generalized multi-level hierarchy of the automated control system based on client-server architecture. To do this, we introduced a new type of additive Abelian group on the basis of piece-wise given the binary arithmetic operations, which have the features of the above classes of tolerance. To specify an arithmetic operation based on the processing of index values of elements included in each functional class of tolerance. On the basis of Kelly theorem of group theory we proved the isomorphism between these classes of tolerance. This taken into account the possible construction of a multi-channel version of the individual devices and levels of control systems, which may be due to their redundancy required to achieve the specified performance reliability and functional safety. This allows further to reach the unification of approaches to the development of control systems, their research, and the development of the necessary hardware and software. Possible application of the proposed separation of the group of functional elements was shown in the example of the formalization of the maintenance of technological objects.*
Keywords: *bijection, tolerance, isomorphism, the group, ACS, level.*

Каменєв Олександр Юрійович, Україна, закінчив Українську державну академію залізничного транспорту, канд. техн. наук, в.о. доцента кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів, Український державний університет залізничного транспорту (пл. Фейєрбаха, 7, м. Харків, 61050, Україна). Основний напрямок наукової діяльності – синтез безпечних автоматизованих систем керування технологічними процесами на залізничному транспорті.

Лапко Антон Олександрович, Україна, закінчив Харківську державну академію залізничного транспорту, канд. техн. наук, доцент кафедри автоматики та комп'ютерного телекерування рухом поїздів, Український державний університет залізничного транспорту (пл. Фейєрбаха, 7, м. Харків, 61050, Україна).
Основний напрямок наукової діяльності – технічне обслуговування пристроїв та систем автоматизації технологічних процесів.